بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه هرمزگان

دانشکده علوم پایه

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض

عنوان پایان نامه:

تابعگرهای رادیکالی در رسته مدولها روی تمام حلقه‌ها

استاد راهنما:

دکتر قاسم میر حسین خانی

دانشجو:

عباس عباسی

آذرماه ۱۳۸۸

تقدیم به پدر و مادرم، آنان که سپید موی گشتند تا من سپیدروی شدم.

تشکر و قدردانی

حال که به لطف الهی نگارش پایان نامه، به پایان رسیده بر خود لازم می دانم که از زحمات همه ی اساتید خویش به ویژه از جناب آقای دکتر سبزواری مدیر محترم گروه و آقای غلامی و استاد راهنمای محترم جناب دکتر میرحسین خانی که با زحمات بی دریغ و بی شائبه در تمام مراحل نگارش، مساعدتهای لازم را مبذول فرمودند، تشکر نمایم آنان که همچون چراغی فروزان بنده را از تاریکیهای جهل به وادی روشن علم، راهنمائی نمودند.

عباس عباسی

چکیده

در این پایان نامه، بعضی خواص دو کلاس از رادیکال ها تحت عنوان T– رادیکال و E– رادیکال بررسی می کنیم، همچنان تعمیمی از رادیکال ها وپیش رادیکالها تحت عنوان تابعگر رادیکالی در رسته مدولها روی تمام حلقه ها بیان می کنیم و بعضی خواص آنها را بررسی می کنیم متناظر با هر کلاس رادیکالی و هر کلاس هم رادیکالی، یک تابعگر رادیکالی تعریف می کنیم و نشان می دهیم که این تابعگرها تعمیمی از رادیکالهای W_F و H_V هستند که توسط آقای تیموشنکو مورد مطالعه قرار گرفته است

فهرست مطالب

مقدمه

در فصل اول پیش نیازهای مورد نیاز نظریه رسته و مدولها آورده شده است. در فصل دو که برگرفته از مقاله آقای تیموشنکو است رادیکال، پیش رادیکال، خودتوان، تابی، هم تابی، کلاس رادیکالی و کلاس هم رادیکالی(نیم ساده) در رسته مدول ها روی حلقه ی دلخواه S تعریف شده وبرای مدول F، کلاس T(F)- مدول و برای مدول V، کلاس E(V)- مدول را داریم و متناظر با این کلاسها رادیکال H_V و W_F تعریف شده و خواص آنها را مورد بررسی قرار گرفته است. یکی از نتایج مهم این فصل این است که اگر F یک مدول یکدست باشد، آنگاه W_F تابی و اگر F یک مدول تصویری باشد، آنگاه H_Vیک هم تابی است . در فصل سوم تعمیمی از این دو نوع رادیکال تحت عنوان کلاس T- رادیکال و E- رادیکال و برخی خواص آنها را بیان کرده ایم. در فصلهای قبل خواص رادیکالها از دیدگاه رستهای بررسی نشده است بنابراین یکی از کارهای اصلی ما در فصل چهارم این است که تابعگر رادیکالی در رسته ی مدولها را تعریف کردهایم. متناظر با هر تابعگر رادیکالی، کلاس رادیکالی و هم رادیکالی تعریف و برخی خواص آنها را بررسی کردهایم و برعکس متناظر با کلاس رادیکالی و هم رادیکالی یک تابعگر رادیکالی تعریف کردهایم که کلاس متناظر با آن همان کلاسهای رادیکالی و هم رادیکالی اولیه است. در فصل پنجم تابعگر رادیکالی روی رسته $\mathcal{G}$ که رسته مدولها روی تمام حلقههای متمایز است بررسی شده است. به عنوان یک قضیه مهم شرط لازم و کافی برای تابعگر پیش رادیکال روی رسته $\mathcal{G}$ که رادیکال باشد این است که: تابعگر پیش رادیکالی روی رسته $\mathcal{G}$ رادیکال است اگر و فقط اگر تحدیدش به هر رسته R-Mod رادیکال است.

فصل اول:

پیش نیاز ها

تعریف ۱.۱.۱. یک **رسته**، رده ای مانند $\mathcal{C}$ از اشیا (که با ...,A, B, C نمایش داده مـی شـود) بـه انضمام یک رده از مجموعه های از هم جدا، که با hom(A,B) نموده میشود، برای هر جفت از اشیاء در $\mathcal{C}$ (عنصر f از hom(A,B) یک ریخت از A به B نامیده وبا $f : A \to B$ نموده می شود) به ازای هرســه تایی (A, B, C) از اشـیاء $\mathcal{C}$ درتابعـی مانـنـد $\hom(B,C) \times \hom(A,B) \longrightarrow \hom(A,C)$ (برای ریخت های $f:A \to B$ و $g:B \to C$ این تابع بصورت $(g,f) \longrightarrow gof$ نوشته و $gof:A \to C$ ترکیب f و g خوانده می شود) که در دو اصل موضوع زیر صدق می کند:

۱) شـرکت پـذیری: هرگـاه $h:C \to D$ و $g:B \to C$ و $f:A \to B$ از ریخـت هـای $\mathcal{C}$ باشــند، آنگـاه $ho(gof)=(hog)of$

۲) همانی: به ازای هرشی B از $\mathcal{C}$ ریختی مانند $1_B:B \to B$ وجود دارد بـه طـوری کـه بـه ازای هـر $g:B \to C$ و $f:A \to B$، $1_B of=f$ و $go1_B=g$

مثال: فرض کنیم $\mathcal{G}$ رده مجموعـه هـا، بـه ازای هـر $A, B \in \mathcal{G}$، hom(A,B) مجموعـه تمـام توابـع $f:A \to B$ است.

تعریف ۲.۱.۱. **فرض** کنـیم $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ رسـته باشـند، تـابعگر**همــورد** T از $\mathcal{A}$ بـه $\mathcal{B}$ (کـه بـا نمـاد $T:\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ نمـایش داده مـی شـود) جفتـی از توابـع اسـت (کـه هـردو بـا Tنمـایش داده مـی شود) یکی تابع شـی کـه بـه هرشـی C از$\mathcal{A}$ شـیئی مانـند T(C) از $\mathcal{B}$ نسـبت میدهـد ودیگـری تـابع ریخـت کـه بـه هـر ریخـت $f:c \longrightarrow c'$ ریختـی مانـند $T(f) : T(C) \longrightarrow T(C')$ نسـبت می دهد به طوری که:

۱) به ازای هر ریخت همانی 1_C از C، $T(1_C)=1_{T(C)}$

۲) به ازای هر دو ریخت g و f از C که ترکیب gof آنهـا تعریـف شـده باشـد $T(gof)=T(g)oT(f)$

مثال ۳.۱.۱. تابعگر همانی (همورد) $1_{\mathcal{C}}:\mathcal{C} \to \mathcal{C}$ هرشی و هر ریخت از رسته $\mathcal{C}$ رابه خودش می‌برد

مثال ۴.۱.۱. فرض کنید R یک حلقه بوده و A یک R- مدول چپ ثابتی باشد در این صورت به ازای هر R- مدول C قرار می دهیم $T(C)=Hom_R(A,C)$ به ازای هر همریختی $f:C \to C'$ از R- مدولها، $T(f)$ رانگاشت القایی معمولی $T(f):Hom_R(A,C) \longrightarrow Hom_R(A,C')$ می گیریم و در این صورت T یک تابعگر همورد از رسته R- مدولهای چپ به رسته ی گروههای آبلی است.

مثال ۵.۱.۱. به طور کلی فرض کنیم A شی ثابتی در رسته $\mathcal{C}$ باشد. تابعگر هموردِ h_A از رسته $\mathcal{C}$ به رسته $\mathcal{G}$ از مجموعه ها را این طور تعریف می کنیم که به شی C از $\mathcal{C}$ مجموعه $h_A(c)=hom(A,C)$ مرکب از تمام ریخت ها در $\mathcal{C}$ از A به C نسبت می دهد. اگر $f:C \longrightarrow C'$ یک ریخت از $\mathcal{C}$ باشد $h_A(f):hom(A,C) \longrightarrow hom(A,C')$ را تابعی می گیریم که با $g \longrightarrow fog$ برای $g \in hom(A,C)$ داده میشود تابعگر h_A، تابعگر هموردِ hom نام دارد.

مثال ۶.۱.۱. فرض کنیم F تا بعگر هموردِ زیر از رسته مجموعه ها به رسته مدولهای چپ روی حلقه یکدار R باشد. به ازای هر مجموعه X، $F(X)$، R-مدول آزاد بر X است. اگر $f:X \longrightarrow X'$ یک تابع باشد $F(f):F(X) \longrightarrow F(X')$ را همریختی منحصر بفرد $\bar{f}:F(X) \longrightarrow F(X')$ از مدولها می‌گیریم که $\bar{f}i=f$ و درآن i نگاشت $X \longrightarrow F(X)$ می باشد.

مثال ۷.۱.۱. فرض کنیم $\mathcal{C}$ یک رسته ملموس نظیر رسته R- مدولهای چپ یا گروهها یا حلقه ها، باشد. تابعگر فراموشگر (هموردِ) از $\mathcal{C}$ به رسته $\mathcal{G}$ از مجموعه ها به هر شی A مجموعه زمینه آن (که نیز با A نموده می شود) و به هر ریخت $f:A \longrightarrow A'$ ، تابع $f:A \longrightarrow A'$ را نسبت می دهد.

تعریف ۸.۱.۱ . فرض کنیم $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ رسته باشند. تابعگر **پا دورد** S از $\mathcal{A}$ به $\mathcal{B}$ (که $S: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ نموده می شود) جفتی از توابع است (که هر دو باSنموده میشود) یکی تابع شی که به هرشی C

از $\mathcal{A}$ شیی مانند $S(C)$ از $\mathcal{B}$ را نسبت می دهد و دیگری تابع ریخت که به هر ریخت $f:C\longrightarrow C'$ از $\mathcal{A}$ ریخت $S(f):S(C')\rightarrow S(C)$ از $\mathcal{B}$ را نسبت می دهد به طوری که:

۱. به ازای هر ریخت همانی 1_C از $\mathcal{A}$، $s(1_C)=1_{S(C)}$

۲. به ازای هر دو ریخت f,g از $\mathcal{A}$ که ترکیب gof آنها تعریف شده باشد $S(gof)=S(f)oS(g)$ لذا تابع ریخت تابعگر پادورد $S:C\longrightarrow D$ جهت ریخت ها را عوض می کند

مثال ۹.۱.۱. فرض کنیم R یک حلقه بوده و B یک R- مدول چپ ثابتی باشد تابعگر پادورود از رسته R- مدولهای چپ به رسته گروههای آبلی را با $S(C)=Hom_R(C,B)$ به ازای هر R- مدول C تعریف کنیم هرگاه $f:C\longrightarrow C'$ یک همریختی R- مدولها باشد آنگاه $s(f)$ نگاشت القایی بـه صـورت $\bar{f}:Hom_R(C',B)\longrightarrow Hom_R(C,B)$ می باشد.

مثال ۱۰.۱.۱. به طور کلی، فرض کنیم B شیئی ثابت در رسته $\mathcal{C}$ باشد، تابعگر پادورد h^B از $\mathcal{C}$ بـه رسته $\mathcal{G}$ از مجموعـه هـا را ایـن طـور تعریـف مـی کنـیم کـه بـه ازای هـر شـی C از $\mathcal{C}$ مجموعـه $h^B(C)=hom(C,B)$ مرکب از تمام ریخت ها در $\mathcal{C}$ از C به B نسبت می دهـد اگـر $f:C\longrightarrow C'$ یـک ریخت از $\mathcal{C}$ باشد تـابع $h^B(f):hom(C',B)\longrightarrow hom(C,B)$ رابا $g\longrightarrow gof$ کـه $g\in hom(C',B)$ تعریـف می کنیم تابعگر h^B را تابعگر پادورد $hom\,\mathcal{C}$ می نامند.

با استفاده از روش زیر می توان بررسی تابعگرهای پادورد را به بررسی تابعگرهـای همـورد تحویـل کرد. هرگاه $\mathcal{C}$ یک رسته باشد آن گاه رسته متقابل (یادوگـان) $\mathcal{C}$، کـه بـا $\mathcal{C}^{oP}$ نمـوده میشـود، بـه صورت زیر تعریف می گردد اشیا $\mathcal{C}^{oP}$ همان اشیا $\mathcal{C}$ انـد. مجمـوع $hom_{\mathcal{C}}^{oP}(A,B)$ از ریخـت هـا در $\mathcal{C}^{oP}$ از A به B مساوی مجموعه $hom_{\mathcal{C}}(B,A)$ ازریختها در $\mathcal{C}$ از B به A در نظرگرفته میشـود آن را با f^{op} نشان می دهیم ترکیب ریختها در $\mathcal{C}^{oP}$ به صورت زیرتعریف می شود:

$$g^{op} o f^{op} = (fog)^{op}$$

اگر $S:\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ یک تابعگر پادورد باشد، $\bar{S}:\mathcal{A}^{op} \to \mathcal{B}$ تابعگر همورد منحصر بفرد می گیریم که به ازای هر شی A و ریخت f از $\mathcal{A}^{op}$ با $\bar{S}(A) = A$ و $\bar{S}(f^{op}) = S(f)$ تعریف میشود به عکس هر تابعگر همورد بر $\mathcal{A}^{op}$ به همین نحو ازیک تابعگر پادورد بر $\mathcal{A}$ ناشی می گردد.

به یاد آورید که هر حکم در رابطه با اشیاء دوریخت های یک رسته حکم دوگانی دارد که با عکس کردن جهت ریخت ها به دست می آید. یک حکم در $\mathcal{C}$ درست است اگروفقط اگر حکم دوگان آن در $\mathcal{C}^{op}$ درست باشد. در نتیجه ، هر حکم مستلزم اشیاء، ریخت ها، وتابعگرها پادورد S بر $\mathcal{C}$ درست است مشروط براینکه حکم دوگان آن برای تابعگرهمورد $\bar{S}$ بررسته $\mathcal{C}^{op}$ درست باشد. به این دلیل بسیاری از نتایج برای تابعگرهای همورد ثابت می شوند حالت پادورد به آسانی با دوگان سازی اثبات می شود.

تعریف ۱.۱.۱۱. اگر $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ رسته باشند حاصلضرب آنها رسته $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$ است که اشیاء آن تمام جفت های (C,D) اند که به ترتیب اشیاء $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ می باشد ریخت $(C,D) \to (C',D')$ از $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$ جفتی مانند (f,g) است. که درآن داریم :

$f:C\to C'$ ریختی در $\mathcal{A}$ و $g:D\to D'$ ریختی در $\mathcal{B}$ است.ترکیب در این رسته به صورت $(f',g')o(f,g) = (f'of, g'og)$ تعریف می شود

تعریف ۱.۱.۱۲. شی I در رسته $\mathcal{C}$ را عمومی (اولیه) گوییم هرگاه به ازای هر شی C از $\mathcal{C}$، یک و فقط یک ریخت مانند $I\to C$ موجود باشد.

تعریف ۱۳.۱.۱. شی T در رسته ی $\mathcal{C}$ هم عمومی(نهایی) گوییم اگر به ازای هر شی C از $\mathcal{C}$، یک و فقط یک ریخت مانند $C \longrightarrow T$ موجود باشد.

تعریف ۱۴.۱.۱. شی ۰ در رسته $\mathcal{C}$ را یک شی صفر گوییم اگر ۰ در $\mathcal{C}$ عمومی وهم عمومی باشد لذا، به ازای هر شیC از $\mathcal{C}$، ریخت منحصر بفردی چون $C \longrightarrow 0$ ریخت منحصر فردی چـون $0 \longrightarrow C$ وجود دارد.

مثال ۱۵.۱.۱. مدول صفر یک شی صفر در رسته مدولهای چپ روی یـک حلقـه اسـت. بـه همـین ترتیب رسته گروهها و رسته حلقه ها نیز دارای شی صفر هستند ولی رسته مجموعه ها دارای شـی صفر نیست.

تعریف ۱۶.۱.۱. ریخت صفر $A \xrightarrow{\cdot} B$ ریخت منحصر بفرد $A \longrightarrow 0 \longrightarrow B$ می باشد.

تعریف ۱۷.۱.۱. ریخت $f{:}C \longrightarrow D$ دریک رسته تعادل می نامند اگروفقط اگرریختی مانند $g{:}C \longrightarrow D$ موجود باشد که $gof = 1_C$ و $fog = 1_D$

تعریف ۱۸.۱.۱. ریخت $f{:}C \longrightarrow D$ از رسته ی $\mathcal{C}$ تکریختـی اسـت اگـر بـه ازای جمیـع اشـیاء B و ریختهای $g, h \in hom(B,C)$ داشته باشیم:

$$fh = fg \Rightarrow h = g$$

تعریف ۱۹.۱.۱. ریخت$f : C \longrightarrow D$ برویختی نامیده می شود اگر به ازای جمیع اشیاء E وریختهـای $k,t \in hom(B,C)$ داشته باشیم: $kf = tf \Rightarrow k = t$

مثال ۲۰.۱.۱. یک ریخت در رسته ی مجموعه ها تکریختی(برویختی) است اگروفقط اگر یـک بـه یک (پوشا) باشد.

حکم: فرض کنیم $\mathcal{C}$ یک رسته بوده و C شیء از آن باشد.

۱)- هر دو شی صفر از $\mathcal{C}$ با هم معادلند (وهر دو شی اولیه و نهایی چنین هستند)

۲)- هر گاه ۰ یک شی صفر باشد آن گاه ریخت منحصر فردی $C \longrightarrow 0$ تکیریختی و ریخت منحصر فرد $0 \longrightarrow C$ بروریختی است.

تعریف ۲۱.۱.۱. فرض کنیم $f:C \longrightarrow D$ و $g:C \longrightarrow D$ ریخت هایی از رسته ی $\mathcal{C}$ باشند یک هسته تفاضلی یا مساوی ساز برای جفت (f, g) ریختی مانند $i:B \longrightarrow C$ است به طوری که

یک) $gi = fi$

دو) هرگاه $h:A \longrightarrow C$ ریختی با خاصیت $gh=fh$ باشد آنگاه ریخت منحصر فرد مانند $\bar{h} : A \longrightarrow B$: وجود دارد به طوری که $i\bar{h}=h$

مثــال ۲۲.۱.۱. در رسته ی $\mathcal{G}$ مجموعه ها، هسته تفاضلی $f:C \longrightarrow D$ و $g:C \longrightarrow D$ نگاشت شمول $B \longrightarrow C$ است، که در آن $B=\{c \in C | f(c) = g(c)\}$ همین ساختن نشان می دهد که هر جفت ریخت در رسته گروهها، حلقه ها و مدولها دارای هسته تفاضلی است.

تعریف ۲۳.۱.۱. فرض کنیم $f:C \longrightarrow D$ و $g:C \longrightarrow D$ ریخت هایی از رسته ی $\mathcal{C}$ باشند یک هم هسته تفاضلی یا هم مساوی ساز برای جفت (f, g) ریختی مانند $j:D \longrightarrow E$ است به طوری که:

۱)- $jf=jg$

۲)-هر گاه $k:D \longrightarrow F$ با خاصیت $kg = kf$ باشد آن گاه یک ریخت منحصر بفرد مانند $\bar{k}:E \longrightarrow F$ وجود دارد که $\bar{k}j = k$

مثال ۲۴.۱.۱. فرض کنیم $f:G \longrightarrow H$ و $g:G \longrightarrow H$ همریختی های گروهها باشند. همچنین، N کوچکترین زیر گروه نرمال H باشد که شامل $\{f(a)g(a)^{-1} | a \in G\}$، آنگاه طبق قضیه ۱.۵.۶ هانگرفورد بروریختی کانونی $H \longrightarrow H/N$ یک هم هسته تفاضلی است.

حکم ۲۵.۱.۱. فرض کنیم $f:C\to D$ و $g:C\to D$ ریخت هایی از رسته ی $\mathcal{C}$ باشند

۱) هر گاه $i:B\to C$ یک هسته تفاضلی (f,g) باشد، آنگاه i تکریختی است.

۲) هر گاه $i:B\to C$ و $j:A\to C$ هسته های تفاضلی (f,g) باشد، آن گاه یک تعادل منحصر به فرد $h:A\to B$ وجود دارد که $j=ih$

تعریف ۲۶.۱.۱. فرض کنیم $\mathcal{C}$ رسته ای دارای شی صفر و در نتیجه ریختهای صفر باشد هسته ی ریخت $f:C\to D$ (در صورت وجود) مساوی یک هسته تفاضلی ($(f, 0_{C,D})$ تعریف می شود این هسته با $\operatorname{Ker} f$ نموده می شود تعریف ۵.۳.۱۰ و احکام ۴.۳.۱۰ و ۶.۳.۱۰ جبرهانگرفورد نشان می‌دهد که $k:K\to C$ یک هسته $f:C\to D$ است اگر و فقط اگر

۱) k تکریختی با خاصیت $fk = 0_{K,D}$ باشد.

۲) هرگاه $h:B\to C$ یک ریخت باشد به طوری که $fh = 0_{B,D}$ آن گاه یک ریخت منحصر فرد مثل $\bar{h}: B \to K$ هست که $h=k\bar{h}$

تعریف ۲۷.۱.۱. هم هسته ی $t:D\to E$ از یک ریخت $f:C\to D$ به طور دوگان مساوی هم هسته تفاضلی جفت $(f,0_{C,D})$ تعریف می شود و با $\operatorname{coker} f$ نموده خواهد شد . با شرایط زیر مشخص خواهد شد:

۱) t برو ریختی با این خاصیت است $tf=0_{C,E}$

۲) هر گاه $g:D\to F$ یک ریختی باشد به طوری که $gf = 0_{C,F}$، آنگاه ریخت منحصر بفردی مثل $\bar{g}:E\to F$ هست که $g=\bar{g}t$

مثال ۱. ۲۸.۱. در رسته گروهها، حلقه و مدولها، هسته ریخت $f:C\to D$ عبارت است از نگاشت شمول $C\to D$که در آنK هسته معمولی است و $\{c \in C | f(c) = 0\}$ در رسته مدولها، برویختی کانونی $D\to D/\operatorname{Im} f$ یک هم هسته f خواهد بود.

تعریف ۲۹.۱.۱. گوییم A' زیرشی نرمال A است اگر $A' \longrightarrow A$ هسته یک ریخت باشد.

تعریف ۳۰.۱.۱. یک رسته را آبلی می گوییم هرگاه:

۱. شی صفر داشته باشد.

۲. برای جفت شی آن ضرب و جمع موجود باشد (ضرب همان حاصلضرب و جمع همان هم ضرب است).

۳. هر نگاشت دارای هسته و هم هسته باشد.

۴. هر نگاشت تکریختی هسته ی یک نگاشت باشد.

۵. هر نگاشت بروریختی هم هسته ی یک نگاشت باشد.

که اصل ۴ بیان می کند که هر زیرشی نرمال است.

مثال ۳۱.۱.۱. رسته R-mod یک رسته آبلی است.

تعریف ۳۲.۱.۱. فرض کنیم $\{G_i | i \in I\}$ خانواده ای از گروهها باشد دراین صورت $f \in \prod_{i \in I} G_i$ به شکل $(\ldots, a_1, a_2, \ldots, a_j)$ = $f = \{a_i\}$ نوشته میشود آن گاه عمل دوتایی در $\prod_{i \in I} G_i$ ضرب مولفه به مولفه می باشد $\{a_i\}\{b_i\} = \{a_i b_i\}$. $\prod_{i \in I} G_i$ همراه با این عمل دوتایی یک حاصلضرب مستقیم (یا مجموع مستقیم تام برای خانواده $\{G_i | i \in I\}$ از گروهها نامیده میشود اگر $I = \{1,2,\ldots,n\}$ را معمولاً با $G_1 \times G_2 \times \ldots G_n$ یا در نماد جمعی با $G_1 + G_2 \ldots + G_n$ نشان می دهند.

قضیه ۳۳.۱.۱. فرض کنیم $\{G_i | i \in I\}$ خانواده ای از گروهها بوده و $\{\varphi_i : H \longrightarrow G_i | i \in I\}$ خانواده ای از همریختی گروهها باشد دراین صورت همریختی منحصر بفرد $\varphi : H \longrightarrow \prod_{i \in I} G_i$ هست که به

ازای هر $i\in I$، $\pi_i\varphi=\varphi_i$ و این خاصیت $\prod_{i\in I} G_i$ رابا تقریب یکریختی معین می کند . بعبارت دیگر: $\prod_{i\in I} G_i$ یک حاصلضرب دررسته گروههاست.

نکته: حاصلضرب مستقیم گروههای آبلی، حاصلضربی در رسته گروههای آبلی است.

تعریف ۱. ۱. ۳۳. خانواده $\{G_i|i\in I\}$ ازگروهها، در نظر بگیرید حاصلضرب مستقیم ضعیف این خانواده را با $\prod_{i\in I}^{W} G_i$ نموده می شود و مجموعه تمام $f\in\prod_{i\in I}^{W} G_i$ به طوری که به ازای هر $i\in I$ به جز تعداد متناهی، (همانی در G_i) یعنی $f(i)=e_i$ اگر گروههای G_i همه آبلی (جمعی) باشد $\prod_{i\in I}^{W} G_i$ را معمولاً مجموع مستقیم (خارجی) و با $\sum_{i\in I} G_i$ نشان می دهد.

اگر I متناهی باشد حاصلضرب مستقیم ضعیف با حاصلضرب مستقیم یکی است.

قضیه ۱.۱.۳۴. فرض کنیم $\{A_i|i\in I\}$ خانواده ای از گروههای آبلی باشد (که جمعی نوشته می‌شود) و B گروهی آبلی بوده و $\{\Psi_i: A_i\longrightarrow B\ |i\in I\}$ خانواده ای از همریختیها باشد آن گاه همریختی منحصر فردی مثل $\Psi:\sum_{i\in I} A_i\longrightarrow B$ هست که به ازای هر $i\in I$، $\Psi|_i=\Psi_i$ **این** خاصیت $\sum_{i\in I} A_i$ را با تقریب یکریختی مشخص می کند. بعبارت دیگر $\sum_{i\in I} A_i$ یک هم حاصلضرب در رسته گروههای آبلی است.

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنیم R یک حلقه باشد. یکR- مدول (چپ) گروهی آبلی و جمعی مانند A همراه با تابعی مانند $R \times A \longrightarrow A$ (نقش (r,a) با raنموده می شود) به طوری که به ازای هر $r,s \in R$ و $a, b \in A$

۱) $r(a+b)=ra+rb$

۲) $(r+s)a=ra+sa$

۳) $r(sa)=(rs)a$

۴) گوییمA یک R- مدول یکانی است اگر به ازای هر $a \in A$، $1_R a=a$. هرگاه یک حلقه ی بخشی باشد، آنگاه یک R- مدول یکانی یک فضای برداری(چپ) نام دارد.

تعریف ۲.۲.۱. گوییم مدول J روی R تصویری است اگربه ازای هر نمودار

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "f"] & \\ A \arrow[r, "g"] & B \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

از همریختیهای R- مدولها که سطر پایین آن کامل باشد(یعنی، g بروریختی باشد) یک همریختیR- مدولها مانند $h:P \longrightarrow A$ وجود داشته باشد به طوری که نمودار

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "f"] \arrow[dl, "h"'] & \\ A \arrow[r, "g"] & B \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

تعویضپذیر باشد(یعنی، $gh=f$)

تعریف ۳.۲.۱. گوییم مدولJ روی حلقه R انژکتیو است اگر به ازای هر نمودار

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & B \\ & J & \end{tikzcd}$$