بەنام خداوند جان و خرد

۱۲۰۲۸۵

دفاع پایان نامه

عنوان:

حل‌های با تقارن کروی در گرانش f(R) در شامه

استاد راهنما:

آقای دکتر حمید رضا سپنجی

استاد مشاور:

آقای دکتر مهرداد فرهودی

ارائه دهنده:

راضیه یوسفی

شهریور 88

تاریخ ....
شماره ....
پیوست........................

۱

دانشگاه شهید بهشتی

بسمه تعالی

«صورتجلسه دفاع پایان نامه دانشجویان دوره کارشناسی ارشد»

ن ۱۹۸۳۹۶۳۱۱۳ اوین
۲۹۹۰۱ :

بازگشت به مجوز دفاع شماره ۲۰۰/۱۵۵۶/د مورخ ۸۸/۴/۳۱ جلسه هیأت داوران ارزیابی پایان نامه خانم راضیه یوسفی به شماره شناسنامه ۱۷۰ صادره ازمرودشت متولد ۱۳۶۲ دانشجوی دوره کارشناسی ارشد ناپیوسته رشته فیزیک – ذرات بنیادی و نظریه میدانها

با عنوان :

حل های با تقارن کروی در گرانش f(R) در شامه

به راهنمائی:

آقای دکتر حمیدرضا سپنجی

طبق دعوت قبلی در تاریخ ۸۸/۵/۱۳ تشکیل گردید و براساس رأی هیأت داوری و با عنایت به ماده ۲۰ آئین نامه کارشناسی ارشد مورخ ۷۵/۱۰/۲۵ پایان نامه مزبور با نمره ۱۸٫۵ درجه عالی مورد تصویب قرار گرفت.

۱ -استاد راهنما : آقای دکترحمیدرضا سپنجی

۲- استاد مشاور : آقای دکتر مهرداد فرهودی

۳- استاد داور: آقای دکتر محمد نوری زنوز

۴-استاد داور و نماینده تحصیلات تکمیلی: آقای دکتر شهرام جلال زاده

تقدیم به:

تمامی جان‌باختگان سانحه‌ی هوائی پرواز تهران-ایروان (تیرماه 88)

سپاس‌گذاری

مجموعه‌ی تحقیقی حاضر نتیجه‌ی راهنمایی‌ها و همکاری اساتید و همکاران علمی اینجانب است که نگارنده خود را موظف به قدردانی و سپاس‌گذاری از آنان می‌داند.

بیش از همه خود را مدیون راهنمایی‌های علمی جناب آقای دکتر حمید رضا سپنجی، استاد راهنمایم می‌دانم و بدینوسیله از زحمات بی‌شائبه‌ی ایشان کمال تشکر و قدردانی را می‌نمایم. از جناب آقای دکتر فرهودی استاد مشاور و نیز از اعضای محترم کمیته‌ی دفاع، جناب آقای دکتر نوری و جناب آقای دکتر جلال‌زاده بسیار سپاس‌گذارم. از همکاران خود آقایان احمد برزو و شهاب شهیدی که همواره از همکاری و نظراتشان بهره‌مند شده ام کمال تشکر را می‌نمایم.

چکیده

در این پایان‌نامه ما به بررسی نظریه‌ی گرانشی تعمیم یافته‌ی $f(R)$ پرداخته‌ایم و به صورت دقیق معادلات میدان را برای این نظریه به دست آورده‌ایم. سپس به حل‌های با تقارن کروی پرداخته و با در نظر گرفتن شرایط مختلف حل‌های با تقارن کروی را برای معادلات میدان به دست آورده‌ایم. سپس با معرفی یک مدل، گرانش $f(R)$ را در مدل شامه[1] بررسی کرده‌ایم. در مدل ارائه شده با در نظر گرفتن گرانش $f(R)$ روی توده[2] و تصویر معادلات توده روی شامه، معادلات میدان روی شامه به دست می‌آیند. سپس به بررسی حل‌های با تقارن کروی در این مدل پرداخته‌ایم.

[1]- Brane
[2]- Bulk

فهرست مطالب

فصل اول

مبانی کیهان‌شناسی

مقدمه

یکی از موفق‌ترین و قابل استفاده ترین کاربردهای نظریه‌ی نسبیت عام اینشتین در زمینه‌ی کیهان‌شناسی است. کیهان‌شناسی در مورد کل جهان بحث می کند. این در حالی است که قانون گرانش نیوتون جاذبه‌ی بین اجرام آسمانی را در بر می‌گیرد و در مورد تحول جهان بحث زیادی نمی‌کند. در ابتدا تصور بر این بود که جهان ایستا است اما بعد از سال 1917 همه چیز در مورد تحول جهان متفاوت شد. دو سال بعد از تولد نظریه‌ی نسبیت عام، اینشتین دریافت که این نظریه قابلیت پیشگویی در مورد تحول جهان را دارد از این رو یک مدل جهان ایستا را به عنوان حل معادلات میدان نسبیتی ارائه کرد. از اینجا بود که کیهان‌شناسی پیشرفته شروع شد و دید ما را نسبت به جهان متحول ساخت.

1.1 اصول کیهان‌شناسی

در قرون وسطی تصور بر این بود که عالم یک مجموعه ی ثابت است که زمین مرکز آن است و همه چیز از جمله ماه، خورشید، سیارات ودیگر ستارگان در مدارهای دایره‌ای حول آن می چرخند. بعدها، کوپرنیکوس این تصور را با جانشین کردن خورشید به جای زمین در مرکز عالم تغییر داد. با تکنیک‌های مشاهده‌ای، مرکز عالم به تدریج دورتر ودورتر شد تا اینکه امروزه ما معتقدیم که هیچ مرکزی برای عالم نیست. حتی تا قبل از سال 1920 تصور بر این بود که کهکشان راه شیری تنها کهکشان موجود در عالم است در حالی که امروزه می دانیم این کهکشان، یک کهکشان معمولی از میلیاردها کهکشان موجود در عالم است. وقتی کهکشان‌ها را مشاهده می‌کنیم، دو چیز قابل ذکر است. با نگاه کردن به آسمان در جهت‌های مختلف، مشاهده می شود که کهکشان‌ها به طور یکنواخت در جهت‌های مختلف پراکنده شده‌اند. منظور از مقیاس‌های بزرگ در اینجا مقیاس‌های کهکشانی یا حتی خوشه‌های کهکشانی نیست بلکه مقیاسی

است از اندازه‌ی میلیاردها سال نوری. در این مقیاس کهکشان‌ها یک توزیع همسانگرد دارند و به طور یکنواخت در جهت‌های مختلف در جهان پراکنده شده‌اند. همچنین کهکشان‌ها به طور یکنواخت در فضا پراکنده شده‌اند، به عبارتی توزیع آن‌ها در مقیاس بزرگ به صورت همگن است. این دو واقعیت دو اصل کیهان‌شناسی هستند:

- هیچ نقطه‌ی برتری در عالم وجود ندارد. در مقیاس بزرگ، کهکشان‌ها به صورت یکنواخت در عالم پراکنده شده‌اند. گفته می‌شود که در مقیاس بزرگ، عالم همگن است.
- هیچ جهت فضایی برتری در عالم وجود ندارد. در مقیاس بزرگ، کهکشان‌ها به صورت یکنواخت در جهت‌های مختلف فضایی پراکنده شده‌اند. گفته می‌شود که در مقیاس بزرگ، عالم همسانگرد است.

این دو اصل که در مقیاس‌های کوچک برقرار نیستند، ما را یاری می‌کنند تا مدل‌های کیهان‌شناسی ساده‌ای که بر مبنای آن‌ها پایه‌گذاری شده‌اند را ارائه دهیم. این موضوع ابتدا توسط چند فیزیکدان از جمله اینشتین دریافت شد. اینشتین معادلات خود را در کیهان‌شناسی مورد استفاده قرار داد و حاصل آن یک جهان در حال انبساط بود در حالی که او تصور می‌کرد که جهان ایستا است، به همین دلیل او یک جمله که امروزه ثابت کیهان‌شناسی نام دارد را وارد معادلات خود کرد و این گونه معادلات او جهان ایستا را توصیف می‌کردند. با گذشت زمان و بررسی مشاهدات جدید، در سال 1929 هابل نشان داد که جهان در حال انبساط است. این اطلاعات اینشتین را وادار کرد که ثابت کیهان‌شناسی را از معادلات خود حذف کند. بعدها اینشتین وارد کردن این ثابت را به معادلات خود "بزرگترین اشتباه زندگی خود" نامید.

1.2 عناصر کیهان‌شناسی FRW

دینامیک عالم توسط معادلات اینشتین که در کل معادلات پیچیده‌ی غیر خطی هستند، توصیف می‌شود. با این حال در موردی که یکسری تقارن ها داشته باشیم این معادلات پیچیده، دارای جوابهای تحلیلی ساده ای هستند. متریک Friedmann-Robertson-Walker (FRW)، متریکی است که بر پایه‌ی اصول کیهان‌شناسی یعنی فرض همگنی و همسانگردی در ابعاد بزرگ بنا نهاده شده است. این متریک به صورت زیراست: [1,2,3,4]

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)\right] \tag{1.1}$$

که در آن $a(t)$ ضریب مقیاس است با زمان کیهانی t. معادله ی (1.1) یک بیان کاملاً سینماتیک است. در این مساله دینامیک عالم در ضریب مقیاس $a(t)$ نهفته است. در صورتی که محتوای ماده‌ی کیهانی برای ما مشخص باشد با استفاده از معادلات اینشتین می‌توان ضریب مقیاس $a(t)$ را به دست آورد. ثابت k نیز هندسه‌ی قسمت فضایی فضا زمان را نشان می‌دهد به این صورت که $k=1$ یک جهان بسته[3] ، $k=0$ یک جهان تخت[4] و $k=-1$ یک جهان باز[5] را توصیف می کند. گاهی بهتر است که متریک (1.1) را به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)[d\chi^2 + f_k^2(\chi)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)] \tag{1.2}$$

که در آن:

$$f_k(\chi) = \begin{cases} \sin\chi, & k=+1 \\ \chi\ , & k=0 \\ \sinh\chi, & k=-1 \end{cases} \tag{1.3}$$

[3]- Closed Universe
[4]- Flat Universe
[5]- Open Universe

1.2.1 معادلات تحول زمانی

معادلات دیفرانسیل برای ضریب مقیاس و چگالی ماده از معادلات اینشتین به دست می آیند:

$$G^{\mu}_{\nu} = R^{\mu}_{\nu} - \frac{1}{2}R\delta^{\mu}_{\nu} = 8\pi G T^{\mu}_{\nu} \tag{1.4}$$

که در آن G^{μ}_{ν} تانسوراینشتین[6] و R^{μ}_{ν} تانسور ریچی[7] است که به ضرایب متریک و مشتقات آن بستگی دارد. R نیز اسکالر ریچی[8] است و T^{μ}_{ν} تانسور انرژی تکانه[9] است. برای متریک FRW عبارت‌های خمش[10] به صورت زیر داده می‌شوند:[3]

$$R^{0}_{0} = \frac{3\ddot{a}(t)}{a(t)} \tag{1.5}$$

$$R^{i}_{j} = (\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} + \frac{2\dot{a}(t)}{a^2(t)} + \frac{2k}{a^2(t)})\delta^{i}_{j} \tag{1.6}$$

$$R = 6(\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} + \frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} + \frac{2k}{a^2(t)}) \tag{1.7}$$

که در آن‌ها نقطه مشتق نسبت به t است. با در نظر گرفتن جهان همگن و همسانگرد یک سیال کامل[11] را به عنوان منبع تانسور انرژی تکانه در نظر می‌گیریم. در این حالت داریم:

6- Einstein Tensor
7- Ricci Tensor
8- Ricci Scalar
9- Energy-Momentum Tensor
10- Curvature
11- Perfect Fluid

$$T_{\nu}^{\mu} = Diag(-\rho(t), P(t), P(t), P(t)) \tag{1.8}$$

که در آن $\rho(t)$ و $P(t)$ به ترتیب چگالی[12] و فشار[13] این سیال کیهانی می‌باشند. از معادله‌ی (1.4)، معادلات مستقل زیر با در نظر گرفتن رابطه‌ی (1.8) به دست می‌آیند:

$$H^2 \equiv (\frac{\dot{a}(t)}{a(t)})^2 = \frac{8\pi GP(t)}{3} - \frac{k}{a^2(t)} \tag{1.9}$$

$$\dot{H} = -4\pi G(\rho(t) + P(t)) + \frac{k}{a^2(t)} \tag{1.10}$$

که در آن‌ها $H \equiv \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$ پارامتر هابل است[14] و $\rho(t)$ و $P(t)$ محتوای مادی عالم در زمان t می باشند.

تانسور انرژی تکانه نیز به واسطه‌ی اتحاد بیانکی[15] پایسته است که به معادلات پیوستگی منتج می شود:

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + P) = 0 \tag{1.11}$$

معادله ی (1.11) از معادلات (1.9) و (1.10) نیز به دست می‌آید. این به این معناست که معادلات (1.9) و (1.10) که همان معادلات فریدمن هستند، به تنهایی می‌توانند جهان را توصیف کنند. با حذف $\frac{k}{a^2(t)}$ از معادلات (1.9) و (1.10) خواهیم داشت:

$$\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} = -\frac{8\pi G}{3}(\rho(t) + 3P(t)) \tag{1.12}$$

[12]- Density
[13]- Pressure
[14]- Hubble Parameter
[15]- Bianchi Identities

این معادله گویای این است که برای یک جهان با شتاب مثبت باید $\rho+3P<0$. معادله‌ی (1.9) می تواند به شکل زیر بازنویسی شود:

$$\Omega(t)-1=\frac{k}{(a(t)H(t))^2} \tag{1.13}$$

که در آن $\Omega(t)=\rho(t)/\rho_c(t)$ پارامتر بدون بعد چگالی[16] است و $\rho_c(t)=\frac{3H^2(t)}{8\pi G}$ چگالی بحرانی[17] است. توزیع ماده به طور واضح هندسه‌ی فضایی جهان را نشان می دهد. یعنی:

$$\Omega(t)>1 \quad or \quad \rho(t)>\rho_c(t)\rightarrow k=+1 \tag{1.14}$$

$$\Omega(t)=1 \quad or \quad \rho(t)=\rho_c(t)\rightarrow k=0 \tag{1.15}$$

$$\Omega(t)<1 \quad or \quad \rho(t)<\rho_c(t)\rightarrow k=-1 \tag{1.16}$$

مشاهدات نشان می‌دهند که جهان امروزی به یک هندسه‌ی از نظر فضایی، تخت ($\Omega(t)\approx 1$) بسیار نزدیک است [5]. بنابر این در این قسمت ما یک جهان تخت ($k=0$) را در نظر می‌گیریم.

1.2.2 تحول عالم با محتوای شاره‌ی کامل

فرض کنید تحول جهانی را در نظر بگیریم که محتوای آن شاره‌ی کامل است با معادله‌ی حالت زیر:

$$\omega(t)=\frac{\rho(t)}{P(t)} \tag{1.17}$$

16- Density Parameter
17- Critical Density

$\omega(t)$ پارامتر معادله‌ی حالت[18] است. با حل معادلات اینشتین که بوسیله‌ی (1.9) و (1.10) با $k=0$ داده شده‌اند داریم:

$$H(t)=\frac{2}{3(1+\omega(t))(t-t_0)} \qquad (1.18)$$

$$a(t)\propto (t-t_0)^{\frac{2}{3(1+\omega(t))}} \qquad (1.19)$$

$$\rho(t)\propto a^{-3(1+\omega(t))} \qquad (1.20)$$

که در آن‌ها t_0 یک ثابت است. قابل ذکر است که این حل‌ها برای حالت $\omega(t)\neq -1$ معتبر است. برای جهانی که محتوای آن تابش[19] است، $\omega(t)=1/3$ و

$$a(t)\propto (t-t_0)^{\frac{1}{2}} \quad , \rho(t)\propto a(t)^{-4} \qquad (1.21)$$

و برای جهانی که محتوای آن غبار[20] است، $\omega(t)=0$ و

$$a(t)\propto (t-t_0)^{\frac{2}{3}} \quad , \rho(t)\propto a(t)^{-3} \qquad (1.22)$$

این دو حالت مربوط به یک جهان شتاب‌دار با شتاب منفی است. از معادله‌ی (1.12) یک جهان شتاب‌دار با شتاب مثبت زمانی اتفاق می افتد که معادله‌ی حالت آن به صورت:

$$\omega(t)<-1/3 \qquad (1.23)$$

[18]-Equation of State Parameter
[19]- Radiation
[20]- Dust

باشد. برای توضیح شتاب فعلی عالم ما احتیاج به یک انرژی نامتعارف داریم که همان انرژی تاریک است و معادله‌ی حالت (1.23) را ارضا می‌کند. همانطور که قبلا نیز ذکر شد، مکانیک نیوتونی قابلیت توضیح انبساط شتاب‌دار عالم را ندارد. در اینجا ما یک کره‌ی همگن به شعاع a و چگالی ρ در نظر می‌گیریم. معادله‌ی حرکت نیوتون برای یک ذره‌ی نقطه‌ای به جرم m در این کره به صورت زیر است:

$$m\ddot{a}=-\frac{Gm}{a^2}\left(\frac{4\pi a^3\rho}{3}\right), \qquad \frac{\ddot{a}}{a}=-\frac{4\pi G}{3}\rho \tag{1.24}$$

تفاوت این معادله با معادله‌ی (1.12) در این است که ترم مربوط به فشار p در اینجا ظاهر نمی شود. این ترم در معادلات اینشتین حاصل از اثرات نسبیتی است. معادله‌ی (1.23) گویای این است که ما به یک فشار منفی خیلی بزرگ احتیاج داریم که بتوانیم انبساط شتاب‌دار عالم را توضیح دهیم. از معادله‌ی (1.11) چگالی انرژی $\rho(t)$ برای حالت $\omega(t)=-1$ ثابت است. از معادله‌ی (1.9) نیز در این حالت $H(t)$ ثابت است و ضریب مقیاس به صورت زیر به دست می آید:

$$a(t)\propto e^{Ht} \tag{1.25}$$

که یک جهان دوسیته[21] را توضیح می‌دهد.این حالت با اضافه کردن یک ثابت به معادلات میدان اینشتین نیز به دست می‌آید که در بخش‌های بعد مورد بررسی قرار می‌گیرد. مشاهدات اخیر بیانگر این است که حالت‌هایی با $\omega(t)<-1$ نیز امکان‌پذیر است [6]. این حالت خاص از معادله‌ی حالت را فانتوم[22] می‌نامند [7].

یک حل دیگر از معادله‌ی (1.9) که یک جهان شتاب‌دار را توضیح می‌دهد به صورت زیر است:

[21]- de Sitter Universe
[22]- Phantom

$$a(t) = (t_s - t)^{\frac{2}{3(1-\omega(t))}} \tag{1.26}$$

که در آن t_s یک ثابت است. این حل مربوط به یک حالت ابرتورمی[23] است که در آن پارامتر هابل و اسکالر انحنا به صورت زیر هستند:

$$H(t) = \frac{n}{t_s - t} \qquad n = \frac{2}{3(1+\omega(t))} > 0 \tag{1.27}$$

$$R = 6(2H(t)^2 + \dot{H}(t)) = \frac{6n(2n+1)}{(t_s - t)^2} \tag{1.28}$$

ثابت هابل در $t = t_s$ واگرا می‌شود که مربوط به یک چگالی انرژی بینهایت بزرگ در یک زمان مشخص در آینده است. این مورد را Big Crunch می نامند [8,9] .

1.3 انرژی تاریک

یکی از مهمترین کشفیات علم کیهان‌شناسی از بدو تولد آن که در دهه‌ی گذشته اتفاق افتاد این بود که جهان با شتاب مثبت در حال انبساط است [10,11] . از آن پس تلاش‌های زیادی برای توضیح این شتاب برافزاینده صورت گرفت. عاملی که باعث وقوع این پدیده می شود را انرژی تاریك[24] می‌نامند. در این قسمت به صورت خلاصه مشاهداتی که وجود انرژی تاریک را تائید می کنند، مرور می‌کنیم.

[23]- Super Inflationary
[24]- Dark Energy

1.3.1 فاصله‌ی درخشندگی[25]

در سال 1988 انبساط شتابدار عالم با مشاهدات ابرنواختر Ia توسط دو گروه مختلف گزارش داده شد. [10,11] ما معمولا از یک انتقال به سرخ برای توضیح تحول عالم استفاده می‌کنیم. این از این واقعیت ناشی می‌شود که نور منتشر شده از یک جسم ستاره‌ای به خاطر انبساط عالم انتقال به سرخ پیدا می‌کند و طول موج λ متناسب با ضریب مقیاس افزایش پیدا می‌کند و اثر آن می‌تواند توسط انتقال به سرخ به صورت زیر تعریف شود:

$$1+z=\frac{\lambda_0}{\lambda}=\frac{a_0}{a} \tag{1.29}$$

که در آن اندیس صفر، کمیت‌ها را در زمان حال نشان می‌دهد.

مفهوم مهم دیگری که به اسباب مشاهده‌ای مربوط می‌شود وابسته به تعریف فاصله است. در واقع چند راه برای اندازه‌گیری فاصله در عالم در حال انبساط وجود دارد. یکی از آن ها فاصله‌ی همراه[26] است که در مدت تحول بدون تغییر باقی می‌ماند. این بدان معناست که در دستگاه مختصات همراه در طول تحول جهان، مختصات ثابت می‌ماند و فواصل فیزیکی متناسب با ضریب مقیاس می‌باشند. روش دیگر استفاده از مفهوم فاصله‌ی درخشندگی است. فاصله‌ی درخشندگی d_L نقش مهمی در مشاهدات ابرنواخترها بازی می‌کند.

[25]- Luminosity Distance
[26]- Comoving Distance

در فضا زمان مینکوفسکی[27] درخشندگی مطلق[28] L_s یک منبع و شار انرژی[29] F در فاصله d توسط رابطه‌ی $F=\frac{L_s}{4\pi d^2}$ به هم مربوط می‌شوند. با در نظر گرفتن یک جهان در حال انبساط، فاصله‌ی درخشندگی توسط رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$d_L^2=\frac{L_s}{4\pi F} \tag{1.30}$$

فرض کنید یک شیء با درخشندگی مطلق L_s از یک مشاهده‌گر که در $\chi = 0$ قرار دارد، واقع شده باشد. انرژی ساطع شده از شی در زمان Δt_1 را ΔE_1 می‌نامیم. در همین حال انرژی دریافت شده توسط کره‌ای به شعاع χ_s را ΔE_1می‌نامیم. می‌دانیم که ΔE_1 و ΔE_0 به ترتیب متناسب با فرکانس نور در $\chi=\chi_s$, $\chi=0$ می‌باشند، یعنی $\Delta E_1 \propto \nu_1, \Delta E_2 \propto \nu_2$. در این حالت درخشندگی‌های L_s و L_0 به صورت زیر هستند:

$$L_s=\frac{\Delta E_1}{\Delta t_1}, \qquad L_0=\frac{\Delta E_0}{\Delta t_0} \tag{1.31}$$

سرعت نور برابر است با $c=\nu_1\lambda_1=\nu_2\lambda_2$، بطوریکه λ_1, λ_o طول موجهای نور در $\chi=\chi_s$, $\chi=0$ هستند. بنابراین از معادله‌ی (1.29) داریم:

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_1}=\frac{\nu_1}{\nu_0}=\frac{\Delta t_0}{\Delta t_1}=\frac{\Delta E_1}{\Delta E_0}=1+z \tag{1.32}$$

که در آن از تساوی $\nu_0\Delta t_0=\nu_1\Delta t_1$ نیز استفاده کرده‌ایم. از ترکیب (1.31) و (1.32) داریم:

[27]- Minkowski
[28]- Absolute Luminosity
[29]- Energy Flux