بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه ارومیه

تقریب جمعی معادلات تابعی با دو متغیر

لیلا ساجدی

دانشکده‌ی علوم

گروه ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

استاد راهنما:

دکتر علی عبادیان

مردادماه ۱۳۸۹

پایان نامه آقای : **لیلا ساجدی** به تاریخ ۸۹/۵/۱۳ شماره ۲-۱۰۶۲

مورد پذیرش هیات محترم داوران با رتبه عالی و نمره ۱۸/ (به حروف هجده تمام)
قرار گرفت.

۱- استاد راهنما و رئیس هیئت داوران: دکتر علی عبادیان

۲- داور خارجی: دکتر سعید شمس

۳- داور داخلی: دکتر رسول آقالاری

۴- نماینده تحصیلات تکمیلی: دکتر حبیب اذانچیلر

۱۳۸۹/۹/ ۸

تقدیم به:

پدر و مادر مهربان ، صبور و دلسوزم

خواهران مهربان و فرزانه‌ام

و برادران عزیزم

تقدير و تشكر:

سپاس بي حد خداوندي را كه تفكر را به انسان ارزاني داشت و انديشيدن و آموختن را از كل هستي به انسان عطا نمود.

از زحمات استاد راهنماي ارجمندم جناب آقاي دكتر علي عباديان كه در طول دوره‌ي كارشناسي و كارشناسي ارشد از سرچشمه‌ي علم و فضل ايشان بهره‌مند بوده‌ام كمال تشكر و قدرداني را دارم و در ادامه از جناب آقاي دكتر سعيد شمس به عنوان داور خارجي و جناب آقاي دكتر رسول آقالاري به عنوان داور داخلي و جناب آقاي دكتر اذانچيلر به عنوان نماينده‌ي تحصيلات تكميلي تشكر و قدرداني مي‌كنم.

و در پايان از دوستان عزيزم دكتر سميه ذوالفقاري و دكتر قبادي پور به خاطر راهنمايي‌هاي ارزنده‌شان صميمانه سپاسگذاري مي‌كنم. و همچنين از دكتر سميرا رهروي، مهندس مريم خسروي، مهندس بهرخ عباس نژاد، آتنا دريادل ، ليلا شريعتي فر، زينب ميرعلي اشرفي، سميه بهلولي، رقيه علوي كه در طول اين دوره مرا همراهي نموده‌اند متشكرم.

خدایا

به من قدرت بده بپذیرم تقدیري را که نمي‌توانم تغییرش دهم

دلیري ده تا تغییر دهم تقدیري را که مي‌توانم تغییرش دهم

بینش ده تا تفاوت این دو را بدانم

مرا فهم ده تا متوقع نباشم دنیا و مردمانش مطابق میل من رفتار کنند.

(جبران خلیل جبران)

فهرست مندرجات

چکیده

هدف این پایان نامه، بررسی پایداری معادلات تابعی است. در این پایان نامه پایداری هایرز— اولام تعمیم یافته‌ی معادله‌ی جمعی— درجه‌ی چهارم و معادله‌ی درجه‌ی دوم— سوم را ثابت می‌کنیم.

۱.۰ پیش گفتار

در سال ۱۹۴۰ اولام[۱] [۲۸] سخنرانی در حضور انجمن ریاضی دانشگاه ویزکانسین ارائه داد که در آن تعدادی از مسائل حل نشده را مورد بررسی قرار داد. برای نخستین بار مساله‌ی پایداری درباره‌ی همریختی گروه ها با این سوال مطرح شد:

فرض کنیم G یک گروه و G' یک گروه متریک با متر d باشد. آیا به ازای هر $\epsilon > ۰$، $\delta > ۰$ وجود دارد به‌طوری‌که هرگاه نگاشت $f : G \to G'$ در $d(f(xy), f(x)f(y)) < \delta$ صدق کند؛ آنگاه همریختی $h : G \to G'$ را بتوان یافت که

$$d(f(x), h(x)) < \epsilon?$$

به عبارت دیگر اگر یک نگاشت تقریباً همریختی باشد، آیا می‌توان یک همریختی نزدیک به آن را پیدا کرد؟ در صورت مثبت بودن جواب، معادله‌ی $h(xy) = h(x)h(y)$ همریختی پایدار خواهد بود. بنابراین مفهوم پایداری برای معادلات تابعی از مساله‌ی اولام سرچشمه گرفته است. در صورتی که ما یک معادله‌ی تابعی که با نامساوی بیان می‌شود را جایگزین این همریختی کنیم، آنگاه می توان مفهوم پایداری را برای آن بیان کرد.

در حقیقت مساله‌ی پایداری برای یک معادله‌ی تابعی معین، بیان شرایطی است که تحت آن، برای نگاشت دلخواهی مانند f که در آن شرایط صدق می‌کند، نگاشتی نزدیک به f و با خطای کم که در معادله‌ی تابعی گفته شده صدق کند، پیدا شود.

در سال ۱۹۴۱ هایرز[۲] [۱۴] مساله‌ی اولام برای فضاهای باناخ را حل نمود بدین صورت که:

فرض کنیم $E_۱$ و $E_۲$ فضاهای باناخ باشند و $\epsilon > ۰$. اگر $f : E_۱ \to E_۲$ به ازای هر $x, y \in E_۱$ در

---

[۱] S. M. Ulam

[۲] D. H. Hyers

رابطه‌ی زیر صدق کند

$$\|f(x+y)-f(x)-f(y)\|\leq\epsilon$$

آنگاه حد

$$T(x)=\lim_{n\to\infty}2^{-n}f(2^nx)$$

به ازای هر $x\in E_1$ موجود می‌باشد و $T:E_1\to E_2$ نگاشت جمعی منحصربه‌فردی است که به ازای هر $x\in E_1$ در رابطه‌ی

$$\|f(x)-T(x)\|\leq\epsilon$$

صدق می‌کند. به علاوه اگر تابع $f:\mathbb{R}\to E_2$ برای هر عضو ثابت مانند $x\in E_1$ نسبت به t پیوسته باشد آنگاه T خطی است.

در واقع نگاشت f پایدار شده است. این نوع پایداری، به پایداری هایرز– اولام موسوم است.

در قضیه‌ی هایرز، نگاشت جمعی $T:E_1\to E_2$ به وضوح از تابع f به دست آمده بود. لذا آن را روش مستقیم نامیدند که امروزه ابزار قدرتمندی در مطالعه‌ی پایداری معادلات تابعی می‌باشد.

بعدها قضیه‌ی هایرز در جهات مختلفی تعمیم یافت. در سال ۱۹۷۸ تی. ام. راسیاس [3] [۲۳] تابع کنترل در قضیه‌ی هایرز را ضعیف تر کرد و از تابع کنترل $\epsilon(\|x\|^p+\|y\|^p)$ استفاده نمود و قضیه‌ی هایرز را ثابت کرد. در این صورت این نوع پایداری، پایداری هایرز– اولام– راسیاس نامیده شد.

فرض کنید E_1 و E_2 فضاهای باناخ باشند. همچنین فرض کنید ثابت های $\epsilon>0$ و $0\leq p<1$ چنان باشند که $f:E_1\to E_2$ به ازای هر $x,y\in E_1$، در رابطه‌ی

$$\|f(x+y)-f(x)-f(y)\|\leq\epsilon(\|x\|^p+\|y\|^p)$$

[3] Th. M. Rassias

صدق کند. در این صورت نگاشت جمعی و منحصربه فرد $T:E_1\to E_2$ وجود دارد به‌طوری‌که به ازای هر $x\in E_1$،

$$\|f(x)-T(x)\|\leq\frac{\epsilon\|x\|^p}{1-2^{p-1}}.$$

به علاوه اگر تابع $f:\mathbb{R}\to E_2$ برای هر عضو ثابت مانند x در E_1 نسبت به t پیوسته باشد، آنگاه T خطی است.

قضیه‌ی راسیاس برای حالت $p\neq 1$ نیز ثابت شد. حتی تابع کنترل $\epsilon(\|x\|^p+\|y\|^p)$ نیز به صورت های مختلفی تعمیم یافت این حالت پایداری را نیز برخی پایداری هایرز– اولام– راسیاس تعمیم یافته نامیدند. جان. راسیاس [۴] به جای تابع کنترل در پایداری هایرز– اولام– راسیاس یعنی $\epsilon(\|x\|^p+\|y\|^p)$، تابع کنترل $\epsilon(\|x\|^p\|y\|^p)$ را جایگزین کرد که به پایداری اولام– گاوروتا– راسیاس معروف شد. گاوروتا [۵][۱۲] این نتایج را تعمیم داد او به جای تابع کنترل در قضیه‌ی هایرز– اولام– راسیاس تابع کنترل $\phi(x,y)$ را جایگزین کرد.

بعد از آن مساله‌ی پایداری هایرز– اولام برای سایر معادلات تابعی نیز به این صورت مطرح شد: هرگاه معادله‌ی تابعی با یک نامعادله‌ی تابعی جایگزین شود، آیا می‌توان نتیجه گرفت جواب های نامعادله در نزدیکی جواب های معادله قرار دارند؟ در صورت مثبت بودن جواب، معادله‌ی مزبور پایدار است. در دو دهه‌ی اخیر مساله‌ی پایداری معادلات تابعی مختلفی بررسی شد که از آن جمله به معادلات تابعی معروفی چون درجه‌ی دوم، درجه‌ی سوم، درجه‌ی چهارم، معادلات لگاریتمی، معادلات سینوسی ، ترکیبی از معادلات تابعی، معادله‌ی مخلوط کوشی و درجه‌ی دوم، معادله‌ی مخلوط درجه‌ی چهارم و درجه‌ی دوم ... می‌توان اشاره کرد.

---

[۴] J.M. Rassias

[۵] *P.Găvruta*

این پایان نامه که براساس مقاله‌ی [۹] می‌باشد، در چهار فصل تنظیم شده است که در فصل اول، نخست تعاریف را بیان می‌کنیم و سپس مفاهیم و قضایای مقدماتی پایداری معادلات تابعی را که در فصلهای بعدی نقش به سزایی دارند، مورد بررسی قرار می‌دهیم و در فصل دوم روش‌های پایداری معادلات تابعی را بیان می‌کنیم و در فصل سوم به بررسی پایداری سیستم های معادله‌ی تابعی جمعی— درجه‌ی چهارم و معادله‌ی تابعی درجه‌ی دوم— سوم می‌پردازیم. و فصل چهارم شامل واژه نامه و کتاب نامه می‌باشد.

فصل ۱

تعاریف و قضایای بنیادی

این فصل حاوی تعاریف و مفاهیم مقدماتی می باشد که در فصلهای بعدی مورد نیاز است.

۱.۱ تعاریف

تعریف ۱.۱.۱ مجموعه‌ی ناتهی V را یک فضای برداری (خطی) روی میدان $\mathbb{F}$ می‌نامیم، هرگاه V با عمل جمع برداری، گروه آبلی بوده و به ازای هر $v \in V$ و $\alpha \in \mathbb{F}$، $\alpha v \in V$ باشد (این عمل را ضرب اسکالر می‌نامند) همچنین به ازای هر $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ و $u, w \in V$ داشته باشیم:

۱) $\alpha(u + w) = \alpha u + \alpha w$؛

۲) $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$؛

۳) $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v$؛

۴) $ev = v$ (که در آن e نشان دهنده عنصر یکه تحت عمل ضرب می‌باشد).

اعضای V را بردار و اعضای $\mathbb{F}$ را اسکالر می‌نامیم.

تعریف ۲.۱.۱ فرض کنیم X یک فضای برداری و τ یک توپولوژی روی X باشد به‌طوری‌که:

الف) مجموعه های تک عضوی بسته باشند؛

ب) عملهای جمع برداری و ضرب اسکالر در این فضا پیوسته باشند؛

در این صورت (X, τ) را فضای برداری توپولوژیک $(T.V.S)$ می‌نامیم.

تعریف ۳.۱.۱ فرض کنیم (X, τ) یک فضای برداری توپولوژیکی و d نیز یک متر روی X باشد. d را یک متر پایا روی X می‌نامیم هرگاه برای هر $x, y, z \in X$ داشته باشیم:

$$d(x + z, y + z) = d(x, y).$$

تعریف ۴.۱.۱ فرض کنیم X یک فضای $T.V.S$ با توپولوژی τ باشد، در این صورت X را:

الف) به‌طور موضعی محدب گوییم هرگاه پایه ای موضعی با اعضای محدب داشته باشد؛

ب) متریک پذیر گوییم هرگاه متری مانند d روی X موجود باشد به‌طوری‌که τ با متریک d سازگار باشد؛

پ) $F-$ فضا گوییم هرگاه توپولوژی آن τ توسط متر پایا و تامی مانند d القا شده باشد؛

ت) فرشه گوییم هرگاه X، یک $F-$ فضای به‌طور موضعی محدب باشد؛

ث) نرم پذیر گوییم هرگاه نرمی روی X موجود باشد که متریک حاصل از این نرم با توپولوژی τ سازگار باشد.

تعریف ۵.۱.۱ فضای برداری X روی میدان اسکالر $\mathbb{F}$ را فضای نرمدار گوییم، هرگاه تابع $\|.\| : X \to \mathbb{R}$ موجود باشد به‌طوری‌که برای هر $x, y \in X$ و هر اسکالر $\lambda \in \mathbb{F}$، سه خاصیت زیر را دارا باشد:

۱) $\|x\| \geq 0$ و $\|x\| = 0$ اگر و فقط اگر $x = 0$؛

۲) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$؛

۳) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$.

در این صورت زوج $(X, \|.\|)$ را فضای نرمدار می‌نامیم. با قرار دادن $d(x, y) = \|x - y\|$ فضای نرمدار X به یک فضای متریک با متر d تبدیل می‌شود. این متر را، متر تعریف شده توسط نرم می‌نامیم.

تعریف ۶.۱.۱ هر فضای نرمدار را که نسبت به متر تعریف شده توسط نرمش کامل باشد، فضای باناخ گوییم.

تعریف ۷.۱.۱ فرض کنیم Y, X دو فضای نرمدار باشند. مجموعه‌ی تمام نگاشتهای خطی از X به توی Y را با $L(X, Y)$ نشان می‌دهیم و قرار می‌دهیم: $L(X, X) = L(X)$.

تعریف ۸.۱.۱ فرض کنیم Y, X دو فضای نرمدار باشند. مجموعه‌ی نگاشتهای خطی کراندار از X به توی Y را با $BL(X, Y)$ نشان می‌دهیم. با اعمال جمع و ضرب اسکالر به صورت زیر، $BL(X, Y)$ به یک فضای خطی تبدیل می‌شود:

$$(T_1 + T_2)(x) = T_1(x) + T_2(x); \qquad (T_1, T_2 \in BL(X, Y), x \in X)$$

$$(\alpha T)(x) = \alpha T(x); \qquad (T \in BL(X, Y), x \in X, \alpha \in \mathbb{F})$$

در حالت خاص که $X = Y$ باشد $BL(X, Y)$ را به صورت $BL(X)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۹.۱.۱ گردایه‌ی m از زیر مجموعه های X را $\sigma-$ جبر گویند هرگاه:

۱) $X \in m$؛

۲) اگر $A \in m$، آنگاه $A^c \in m$؛

۳) به ازای هر $i \in N$ اگر $A_i \in m$، آنگاه $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in m$.

فضای (X, m) را فضای اندازه پذیر گوییم و اعضای m را مجموعه‌های اندازه پذیر می‌نامیم.

تعریف ۱۰.۱.۱ فرض کنیم X یک فضای اندازه پذیر و Y یک فضای توپولوژیکی باشد. در این صورت نگاشت $f : (X, m) \to Y$ را اندازه پذیر گوییم، هرگاه برای هر $V \subset Y$ باز، $f^{-1}(V)$ در X اندازه پذیر باشد، یعنی $f^{-1}(V) \in m$.

تعریف ۱۱.۱.۱ فرض کنیم X یک فضای توپولوژیکی باشد، کوچکترین $\sigma-$ جبر β را که شامل همه‌ی مجموعه‌های باز X می‌باشد را $\sigma-$ جبر بورل می‌نامیم و اعضای این $\sigma-$ جبر را مجموعه‌های بورل گوییم.

گزاره ۱۲.۱.۱ فرض کنیم $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ یک تابع اندازه‌پذیر لبگ باشد و برای هر $x, y \in \mathbb{R}$، $f(x+y) = f(x) + f(y)$. در این صورت f پیوسته است.

برهان : رجوع کنید به [۲۹]. ■

تعریف ۱۳.۱.۱ فضای دوگان فضای برداری توپولوژیکی X، فضای برداری X^* می‌باشد که اعضای آن تابعکهای خطی پیوسته روی X می باشد.

در تعاریف زیر فرض می‌کنیم X و Y دو فضای خطی باشند.

تعریف ۱۴.۱.۱ نگاشت $A : X \to Y$ را یک نگاشت جمعی گوییم، هرگاه برای هر $x, y \in X$ داشته باشیم:

$$A(x+y) = A(x) + A(y).$$

تعریف ۱۵.۱.۱ نگاشت $\phi : X \to \mathbb{R}$ را یک نگاشت زیرجمعی گوییم، هرگاه برای هر $x, y \in X$ داشته باشیم:

$$\phi(x+y) \leq \phi(x) + \phi(y).$$

تعریف ۱۶.۱.۱ نگاشت $B : X \times X \to Y$ را یک نگاشت دو جمعی گوییم، هرگاه برای هر $x, x_1, x_2 \in X$ و $y, y_1, y_2 \in Y$ داشته باشیم:

$$B(x_1 + x_2, y) = B(x_1, y) + B(x_2, y)$$

$$B(x, y_1 + y_2) = B(x, y_1) + B(x, y_2).$$

تعریف ۱۷.۱.۱ نگاشت دوجمعی B را متقارن گوییم، هرگاه برای هر $x, y \in X$ داشته باشیم:

$$B(x, y) = B(y, x).$$

تعریف ۱۸.۱.۱ فرض کنیم X یک فضای برداری حقیقی باشد. نگاشت $f : X \to \mathbb{R}$ را همگن می‌نامیم، هرگاه برای هر $x \in X$ و $\alpha \in \mathbb{R}$ داشته باشیم:

$$f(\alpha x) = \alpha f(x).$$

تعریف ۱۹.۱.۱ نیم گزوه آبلی عبارت است از گروه (G, o) به‌طوری‌که عمل o شرکت پذیر و جابه‌جایی باشد. به عبارت دیگر به ازای هر $x, y, z \in G$،

$$(xoy)oz = xo(yoz),$$

$$xoy = yox.$$

تعریف ۲۰.۱.۱ فرض کنیم p عدد اول باشد. گروه آبلی A را $p-$ بخشپذیر می‌نامیم هرگاه برای هر عدد صحیح مثبت n داشته باشیم $p^n A = A$. به علاوه آن را بخشپذیر نامند هرگاه برای هر عدد صحیح مثبت n داشته باشیم $nA = A$.

تعریف ۲۱.۱.۱ یک جبر عبارتست از یک فضای برداری A روی میدان اسکالر $\mathbb{F}$ همراه با ضرب $xy \to (x,y)$ به قسمی که به ازای هر $x,y,z \in A$ و هر اسکالر $\alpha \in \mathbb{F}$ داشته باشیم:

۱) $x(y+z) = xy + xz$؛

۲) $(x+y)z = xz + yz$؛

۳) $x(yz) = (xy)z$؛

۴) $\alpha(xy) = x(\alpha y) = (\alpha x)y$.

تعریف ۲۲.۱.۱ جبر A را تعویض پذیر گوییم، هرگاه به ازای هر $a,b \in A$ داشته باشیم $ab = ba$. همچنین جبر A را یکدار گوییم، هرگاه عضوی مانند $e \in A$ موجود باشد به‌طوری‌که برای هر $a \in A$، $ea = ae$.

هرگاه $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ فرض شود A را جبر حقیقی و هرگاه $\mathbb{F} = \mathbb{C}$، A را یک جبر مختلط می‌نامیم.

تعریف ۲۳.۱.۱ فرض کنیم X یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ و A یک جبر روی $\mathbb{F}$ باشد. یک نیم نرم روی X نگاشتی است مانند ρ از X به $\mathbb{R}$ به‌طوری‌که برای هر $x,y \in X$ و $\alpha \in \mathbb{F}$ خواص زیر را داشته باشیم:

۱) $\rho(x) \geq 0$؛

۲) $\rho(\alpha x) = |\alpha|\rho(x)$؛

۳) $\rho(x+y) \leq \rho(x) + \rho(y)$.

یک نرم روی X، نیم نرم ρ روی X است که خاصیت زیر را داشته باشد:

۴) $\rho(x) = 0 \Rightarrow x = 0$.

نرم (نیم نرم) ρ روی جبر A با خاصیت زیر را یک نرم جبری (نیم نرم جبری) می‌نامیم.

۵) $\rho(xy) \leq \rho(x)\rho(y)$.

تعریف ۲۴.۱.۱ یک جبر نرمدار، زوج (A, ρ) است که در آن A یک جبر و ρ یک نرم جبری روی A می‌باشد.

یک جبر نرمدار یک فضای متریک است که در آن d برای هر $x, y \in A$ به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

یک جبر نرمدار به عنوان یک فضای توپولوژیکی با توپولوژی حاصل از متر در نظر گرفته می‌شود.

تعریف ۲۵.۱.۱ جبر باناخ، جبری است مانند A روی میدان $\mathbb{F}$ همراه با نرم $\|.\|$ که با این نرم یک فضای باناخ می‌باشد و برای هر $a, b \in A$ داریم:

$$\|ab\| \leq \|a\|\|b\|.$$

تعریف ۲۶.۱.۱ فرض کنیم B, A جبرهایی روی میدان $\mathbb{F}$ باشند. یک همریختی از A به توی B نگاشتی ناصفر مانند $\phi \in L(A, B)$ است به‌طوری‌که برای هر $x, y \in A$،

$$\phi(xy) = \phi(x)\phi(y).$$

تعریف ۲۷.۱.۱ فرض کنیم A یک جبر و X یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ باشد ($\mathbb{F} = \mathbb{R}$ یا $\mathbb{F} = \mathbb{C}$) در این صورت :