بسم اللّه الرّحمن الرّحيم

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

گرایش محض

پیوستگی نگاشت تقریبی جردن (۲)

از

مینو خوش اقبال قرابایی

استاد راهنما

دکتراسماعیل انصاری پیری

شهریور ۱۳۸۹

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم

که گرانبهاترین سرمایه‌های زندگی‌ام هستند.

تقدیر و تشکر

سپاس بی کران خداوندی را که خرد را روشنی بخش راه زندگی و محک انتخاب قرار داد.

در ابتدا از زحمات استاد راهنمای عزیز و بزگوارم جناب آقای دکتر اسماعیل انصاری که صبورانه در تمامی مراحل، مرا از رهنمودهای خویش بهره‌مند ساختند، کمال تشکر و قدردانی را دارم.

همچنین از جناب آقای دکتر عباس سهله و جناب آقای دکتر حسین سهله به دلیل پذیرفتن داوری این پایان نامه علی رغم مشغله های فراوان، صمیمانه تشکر می کنم.

از مدیر گروه محترم ریاضی، جناب آقای دکتر احمد عباسی به خاطر تمامی همکاری های شان بی نهایت سپاسگزارم.

از خانواده‌ی عزیزم که مشوق من در امر تحصیل بوده و با کمال صبر و حوصله همواره التیام بخش نگرانی ها و مهیای امکاناتم بودند بسیار ممنون و سپاسگزارم.

در پایان از جناب آقای دکتر رضا اولیایی، به خاطر نقش تعیین کننده و تاثیر گذار در انتخاب این راه و همکاری ها و راهنمایی های جناب آقای عباس زیوری، جناب آقای احسان انجیدنی، جناب آقای گنج بخش، جناب آقای امین ا... خسروی، جناب آقای جواد جوهریان و سرکار خانم سولماز نوری و همچنین دوستان خوبم خانم المیرا شیرازی، خانم ماریه پور محمدی، خانم نساء قاسمی، خانم نساء پوراسماعیل، خانم مریم حدیدی، خانم میخک پلکویی، خانم فاطمه ایماندوست، خانم طاهره خدادادی، خانم بهاره نوری نژاد، خانم آمنه غلامعلی پور و تمام دوستان عزیزی که همیشه همراه و گره‌گشایم بودند، کمال تشکر را دارم.

.

فهرست مطالب

۱

مقدمه :

پایداری معادلات تابعی یکی از مشهورترین مسائلی است که برای اولین بار توسط Ulam [15] در سال ۱۹۴۰ ، مطرح شد. از آن پس تحقیقات بسیاری در این زمینه صورت گرفته است. برای نمونه؛ Hyers [7] در سال ۱۹۴۱ ، Rassias [13] در سال ۱۹۷۸ و Gajda [6] در سال ۱۹۹۱، نتایجی را در این زمینه منتشر کرده اند. آنها اغلب نگاشت‌های تقریبا خطی بین جبرهای باناخ را با یک نگاشت جمعی یا خطی تقریب زده‌اند و گاهی تحت شرایط مناسب پیوستگی این نگاشت ها را مورد بررسی قرار داده اند.

توابع ضربی نقش برجسته‌ای در ریاضیات دارا می باشند. باتوجه به خوش رفتاری توابع ضربی، سعی بر این است توابعی که در برخی شرایط، مشابه توابع ضربی رفتار می‌کنند را مورد بررسی قرار دهیم.

پیوستگی تابعک های خطی تقریبا ضربی بر روی جبر های باناخ نیز توسط Jarosz [8] در سال ۱۹۸۵ ، مورد مطالعه قرار گرفته است. در آنجا وی ثابت کرده است این مساله برای نگاشت های خطی تقریبا ضربی، از یک جبر باناخ به جبر باناخ شبه ساده نیز بر قرار است.

هر چند توابع جردن در بسیاری از موارد مشابه توابع ضربی رفتار می کنند ، توابع تقریبی جردن تنها در چند سال اخیر مورد مطالعه قرار گرفته اند. در حقیقت پیوستگی نگاشت های تقریبی جردن ، برای اولین بار در سال ۲۰۰۲ توسط Kim وLee [9]، مطرح شد. در آنجا آنها ثابت کرده اند هر تابع $\epsilon-$تقریب جردن از یک جبر باناخ با نرم ضربی به $C(S)$ که S در آن فضای فشرده و هاسدورف می باشد، پیوسته و $(1+\epsilon)$ ، کران بالایی برای نرم این قبیل توابع است.Lee [10] در سال ۲۰۰۵ ، با حذف شرط نرم ضربی و افزودن محدودیت $0<\epsilon<\frac{1}{2}$ همان خاصیت را به اثبات رساند.

هدف از ارائه این پایان نامه جمع بندی برخی نتایجی است که در ادامه این مباحث صورت گرفته است. همان طور که خواهیم دید، رویه استدلال در این زمینه بسیار مقدماتی است. اما کاربرد گسترده این قبیل مسائل در گرایش های مختلف ریاضیات باعث شده مطالعه این قبیل مسائل همیشه حائز اهمیت باشد.

این پایان نامه در ۳ فصل تنظیم گردیده است: فصل اول آن شامل تعاریف و قضایای از پیش خوانده ای است، که به خاطر کاربرد در استدلال های فصل های دوم و سوم، صرفا جهت یاد آوری، گردآوری شده‌است. بنابراین از بیان اثبات اغلب قضایا در

آن چشم پوشی می نماییم. فصل دوم این پایان نامه، اصلی ترین مبحث مورد مطالعه است که به نتایج بدست آمده در [1]، در مورد پیوستگی نگاشت های خطی جردن از یک جبر باناخ به جبر باناخ شبه ساده و تقریب این قبیل نگاشت ها توسط نگاشت های خطی جردن تحت شرایط خاص، اختصاص یافته است. نظر به اینکه این پایان نامه در ادامه کار دانشجویان قبلی قرار گرفته، برای پرهیز از تکرار، برخی از قضایای مورد نیاز فقط در حد یادآوری ذکر شده و اثبات آنها به مراجع مربوطه، ارجاع داده شده است. $n-$هomomorفیسم جردن بر روی جبر های باناخ، از سال ۲۰۰۸ [3]، مورد مطالعه قرار گرفته است. در فصل سوم به بررسی و بیان نتایجی که در [4]، در زمینه تقریب $n-$هomomorفیسم تقریبی جردن تحت شرایط خاص توسط $n-$هomomorفیسم حلقه ای و انطباق $n-$هomomorفیسم جردن بر $n-$هomomorفیسم حلقه ای در جبر های باناخ در برخی شرایط ویژه اخذ شده است، می‌پردازیم.

در این پایان نامه شماره قضایا، تعاریف و ... به ترتیب از سمت راست بر اساس شماره فصل، شماره بخش و شماره زیر بخش تنظیم گردیده است.

چکیده

پیوستگی نگاشت تقریبی جردن (۲)
مینو خوش اقبال قرابایی

در این پایان نامه، نگاشت های ϵ—تقریب جردن و n—همومورفیسم‌های تقریبی جردن را مورد مطالعه قرار می‌دهیم و نشان می‌دهیم که چگونه می توان این نگاشت ها و این n—همومورفیسم ها را به ترتیب با نگاشت های جردن و n—همومورفیسم‌های حلقه‌ای تقریب زد. همچنین به بررسی پیوستگی نگاشت های تقریبی جردن بر روی جبرهای باناخ می‌پردازیم.

.

کلید واژه: نگاشت ϵ—تقریب جردن، n—همومورفیسم تقریبی جردن، پیوستگی.

ABSTRACT:

CONTINUITY OF AN APPROXIMATE JORDAN MAPPING (2)
MINOO KHOSHEGHBAL GHORABAYI

In this dissertation, we study ϵ-approximate Jordan mappings and approximately n-Jordan homomorphisms and we show how to approximate these maps or n-homomorphisms with Jordan mappings or n-ring homomorphisms , respectively. Also we investigate the countinuity of ϵ-approximate Jordan mappings on Banach algebras.

Keywords: ϵ-approximate Jordan mapping, approximately n-Jordan homomorphism, continuity.

فصل ۱

مفاهیم و قضایای مقدماتی

مطالب این فصل جهت یادآوری برخی از قضایا و تعاریف مقدماتی مورد نیاز در فصل‌های دوم و سوم گردآوری شده است. استدلال قضایای (۵.۳.۱)، (۶.۳.۱)، (۸.۳.۱) و (۹.۳.۱) در [14] موجود است.

۱.۱ فضاهای برداری و مفهوم جبر

تعریف ۱.۱.۱ (گروه Group)
فرض کنید G یک مجموعه‌ی ناتهی باشد. عمل دوتایی $* : G \times G \longrightarrow G$ که به ازای هر (x, y) از $G \times G$، عنصر منحصر به فرد $x * y$ از G را اختصاص می دهد، در نظر بگیرید. دراین صورت زوج $(G, *)$ را گروه نامیم هر گاه:

۱) به ازای هر z, y, x متعلق به G:

$$x * (y * z) = (x * y) * z.$$

۲) عنصر منحصر به فردی چون e متعلق به G موجود باشد به قسمی که به ازای هر x متعلق به G:

$$x * e = e * x = x.$$

۳) به ازای هر x متعلق به G عنصری چون y متعلق به G موجود باشد به قسمی که:

$$x * y = y * x = e.$$

$(G, *)$ را گروه آبلی [1] گوییم، هرگاه علاوه بر سه شرط ذکر شده در شرط زیر نیز صدق کند:

[1] Abelian Group

۴) به ازای هر y, x متعلق به G:

$$x * y = y * x.$$

زوج $(G, *)$ که فقط در شرط اول صدق کند را یک شبه گروه[2] نامیم.

تعریف ۲.۱.۱ (حلقه Ring)
فرض کنید R یک مجموعه ناتهی باشد، $(R, +, .)$ را یک حلقه گوییم، هرگاه:

۱) $(R, +)$ گروه آبلی باشد،

۲) $(R, .)$ شبه گروه باشد،

۳) به ازای هر z, y, x متعلق به R:

$$x.(y + z) = (x.y) + (x.z) \qquad (x + y).z = (x.z) + (y.z).$$

تعریف ۳.۱.۱ (نگاشت جمعی Additive Mapping)
فرض کنید Y, X دو فضای برداری (یا گروه جمعی) باشد. نگاشت $f : X \longrightarrow Y$ را جمعی گوییم، هرگاه به ازای هر y, x متعلق به X:

$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$

تعریف ۴.۱.۱ (نگاشت خطی Linear Mapping)
فرض کنید Y, X دو فضای برداری بر میدان F باشد. نگاشت $f : X \longrightarrow Y$ را خطی گوییم، هرگاه:

---
[2] Semigroup

۱) به ازای هر x, y متعلق به X:

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

۲) به ازای هر x متعلق به X و α متعلق به F:

$$f(\alpha x) = \alpha f(x).$$

هرگاه Y مجموعه‌ی $\mathbb{R}$ (اعداد حقیقی) یا $\mathbb{C}$ (اعداد مختلط) باشد، f را تابعک خطی[3] گوییم.

تعریف ۵.۱.۱ (جبر Algebra)
فضای برداری X بر میدان F را جبر نامیم، هرگاه نگاشت ضرب $* : X \times X \longrightarrow X$ که به ازای هر (x, y) متعلق به $X \times X$ عضو منحصر به فرد xy متعلق به X را اختصاص می‌دهد، به گونه‌ای بر آن تعریف شود که در خواص زیر صدق کند: $(\forall x, y, z \in X, \forall \alpha \in F)$

۱) $x(yz) = (xy)z$،

۲) $(x+y)z = xz + yz \quad , \quad x(y+z) = xy + xz$،

۳) $(\alpha x)y = \alpha(xy) = x(\alpha y)$.

F را میدان اسکالر[4] می‌نامیم. اگر F میدان اعداد حقیقی باشد، X را جبر حقیقی[5] و اگر میدان اعداد مختلط باشد، X را جبر مختلط[6] گوییم.

تعریف ۶.۱.۱ (جبر جابه جایی Commutative Algebra)
جبر A را جابه‌جایی گوییم، هرگاه:

$$\forall x, y \in A \qquad xy = yx.$$

---

[3] Linear Functional
[4] Scalar Field
[5] Real Algebra
[6] Complex Algebra

تعریف ۷.۱.۱ (نگاشت ضربی Multiplicative Mapping)
فرض کنید Y, X دو جبر باشد، $f: X \longrightarrow Y$ رانگاشت ضربی گوییم ، هرگاه f نگاشتی باشد که در شرط زیر صدق کند:

$$\forall x, y \in X \qquad f(xy) = f(x)f(y).$$

تعریف ۸.۱.۱ (جبر شبه ساده Semisimple Algebra)
فرض کنید X یک جبر باشد. اگر مجموعه‌ی همه ی تابعک های خطی ضربی ناصفر بر روی X را با φ_X نشان دهیم ، در این صورت X را جبرشبه ساده گوییم، هرگاه:

$$\bigcap_{\phi \in \varphi_X} ker\phi = \{0\}.$$

۲.۱ فضاهای توپولوژیک و متریک

تعریف ۱.۲.۱ (فضای توپولوژیک Topological Space)
فرض کنید X یک مجموعه باشد. $\tau \subseteq p(X)$ را یک توپولوژی[7] بر X گوییم، هرگاه:

۱) X و تهی متعلق به τ باشد،

۲) τ نسبت به اجتماع دلخواه اعضایش بسته باشد،

۳) τ نسبت به اشتراک متناهی اعضایش بسته باشد.

در این صورت زوج (X, τ) را فضای توپولوژیک گوییم .

---
[7] Topology

تعریف ۲.۲.۱ (فضای فشرده Compact Space)
فضای توپولوژیک (X,τ) را فشرده گوییم، هرگاه به ازای هر $\tau \supseteq \{A_i\}_{i\in I}$ که $X = \bigcup_{i\in I} A_i$، مجموعه‌ی متناهی $F \subseteq I$ موجود باشد به طوریکه $X = \bigcup_{i\in F} A_i$.

تعریف ۳.۲.۱ (فضای هاسدورف Hausdorff Space)
فضای توپولوژیک (X,τ) را هاسدورف گوییم، هر گاه به ازای هر دو نقطه متمایز y,x متعلق به X، همسایگی های V,U به ترتیب شامل y,x موجود باشد، به قسمی که $U\cap V=\phi$.

تعریف ۴.۲.۱ (فضای موضعا فشرده Locally Compact Space)
فضای هاسدورف (X,τ) را موضعا فشرده گوییم هرگاه:

$$\forall x\in X\ \forall V\in\tau(x\in V)\ \exists U\in\tau(x\in U)\quad s.t\quad \overline{U}\subseteq V$$

که $\overline{U}$ فشرده است.

تعریف ۵.۲.۱ $C(X)$
فرض کنید X یک فضای توپولوژیک باشد. گردایه همه توابع پیوسته مختلط بر X را با $C(X)$ نشان می دهیم.

تعریف ۶.۲.۱ $C_0(X)$
فرض کنید X یک فضای توپولوژیک باشد. گوییم $f\in C_0(X)$ هرگاه $f\in C(X)$ و به ازای هر $\epsilon>0$ مجموعه $\{x :\mid f(x)\mid\geq\epsilon\}$ فشرده باشد.

تعریف ۷.۲.۱ (فضای T_1 T_1-Space)
فرض کنید (X,τ) یک فضای توپولوژیک باشد. گوییم X در اصل T_1 صدق می کند، هرگاه:

$$\forall x,y\in X(x\neq y)\exists U,V\in\tau(x\in U,y\in V)\ s.t\qquad x\notin V\ ,\ y\notin U.$$

فضای توپولوژیک X ، که در اصل T_1 صدق می کند را فضای T_1 گوییم.

تعریف ۸.۲.۱ (متر Metric)
فرض کنید X یک مجموعه ناتهی باشد. تابع $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ را یک متر بر مجموعه X گوییم، هرگاه $(\forall x, y, z \in X)$:

۱) $d(x,y) \geq 0$،

۲) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$،

۳) $d(x,y) = d(y,x)$،

۴) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z)$.

در این صورت زوج (X,d) را فضای متریک[8] می‌گوییم.
d را متر نسبت به انتقال پایا [9] و یا به طور خلاصه متر پایا گوییم، اگر در تعریف بالا X فضای برداری باشد و d علاوه بر چهار شرط ذکر شده، در خاصیت:

۵) $d(x+z, y+z) = d(x,y)$.

صدق کند.

تعریف ۹.۲.۱ (دنباله کشی Cauchy Sequence)
فرض کنید (X,d) یک فضای متریک باشد. دنباله $\{x_n\} \subseteq X$ را کشی گوییم، هرگاه:

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists n_0 \in N \ s.t \ \forall m, n \in N (m > n > n_0) \Longrightarrow d(x_n, x_m) < \epsilon.$$

تعریف ۱۰.۲.۱ (فضای متریک تام Complete Metric Space)
فضای متریک (X,d) را تام گوییم، هرگاه هر دنباله کشی در آن همگرا باشد. دراین صورت متر d را تام گوییم.

تعریف ۱۱.۲.۱ (اتمام یک فضای متری Completion Of Metric Space)
فرض کنید (M,d) فضای متری باشد که تام نیست. رابطه هم ارزی«$\sim$» بر روی

---

[8] Metric Space

[9] Translation Invariant

دنباله‌های کشی موجود بر M را به گونه‌ی زیر تعریف می کنیم:
فرض کنید $\{x_n\}, \{y_n\}$ دو دنباله ی کشی بر M باشند. در این صورت:

$$\{x_n\} \sim \{y_n\} \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0.$$

اگر M^* را مجموعه همه ی رده های هم ارزی موجود بر M قرار دهیم، تابع متر d^* بر روی M^* به صورت زیر تعریف می شود:

$$\begin{cases} d^* : M^* \times M^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ d^*(a^*, b^*) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n). \end{cases}$$

که در آن $\{x_n\}, \{y_n\}$، دنباله‌های کشی هستند که به ترتیب در رده ی a^*, b^* قرار می گیرند. در این صورت (M^*, d^*) فضای تامی است که M در آن چگال است و آنرا اتمام فضای متری (M, d) می‌نامیم. برای دیدن جزئیات بیشتر می توان به کتاب «فضاهای متری» [16] رجوع کرد.

۳.۱ فضاهای برداری توپولوژیکی

تعریف ۱.۳.۱ (فضای برداری توپولوژیکی Topological Vector Space)
فرض کنید X یک فضای برداری و τ یک توپولوژی بر X باشد.τ را توپولوژی برداری [10] گوییم، هرگاه:

۱) هر تک عضوی در (X, τ) بسته باشد و یا به طور معادل، (X, τ) فضای T_1 باشد،

۲) جمع فضا و ضرب اسکالر نسبت به τ پیوسته باشد.

در این صورت (X, τ) را فضای برداری توپولوژیکی یا به طور خلاصه t.v.s می نامیم.
فضای برداری توپولوژیکی X را متر پذیر[11] گوییم ، هر گاه توپولوژی آن توسط یک متر تولید شده باشد.

---

[10] Vector Topology
[11] Metrizable

قضیه ۱.۳.۲ فرض کنید Y, X فضاهای برداری توپولوژیکی و $T : X \longrightarrow Y$ نگاشت خطی باشد. T پیوسته است اگر و تنها اگر در صفر پیوسته باشد.

برهان: بدیهی است که اگر T بر X پیوسته باشد، آنگاه در صفر پیوسته است. حال فرض کنید نگاشت خطی T در صفر پیوسته باشد، ثابت می کنیم T بر X پیوسته یکنواخت است. فرض کنید $W \subseteq Y$ یک همسایگی صفر در Y باشد. از پیوستگی T در صفر نتیجه می شود:

$$\exists V \in \tau_X(0 \in V) \qquad s.t \qquad TV \subseteq W.$$

حال فرض کنید x, y در X به گونه ای باشد که $x - y \in V$. در این صورت با توجه به خطی بودن T نتیجه خواهد شد:

$$Tx - Ty = T(x - y) \in TV \subseteq W.$$

که معادل با پیوستگی یکنواخت نگاشت T است.

تعریف ۱.۳.۳ (مجموعه کراندار Bounded Set)
فرض کنید X یک t.v.s باشد. گوییم $E \subseteq X$ کراندار است، هر گاه به ازای هر همسایگی صفر V ، وجود داشته باشد $t > 0$ ، به طوریکه به ازای هر $s > t$، $E \subseteq sV$.

تعریف ۱.۳.۴ (نگاشت خطی کراندار Bounded Linear Mapping)
فرض کنید Y, X دو t.v.s باشند. نگاشت خطی $T : X \longrightarrow Y$ را کراندار گویند، هر گاه به ازای هر مجموعه کراندار $E \subseteq X$، $T(E) \subseteq Y$ کراندار باشد.

قضیه ۱.۳.۵ فرض کنید X یک t.v.s و $T : X \longrightarrow \mathbb{C}$، تابعک خطی ناصفر باشد. تعریف می کنیم:

$$N(T) = \{x : Tx = 0\}.$$

در این صورت شرایط زیر معادلند:

۱) T پیوسته است،

۲) $N(T)$ در X بسته است،

۳) $N(T)$ در X چگال است،

۴) T بر یک همسایگی صفر، کراندار است.

قضیه ۱.۳.۶ فرض کنید Y, X فضاهای برداری توپولوژیکی و $T : X \longrightarrow Y$ خطی باشد. اگر X مترپذیر باشد، آنگاه عبارات زیر معادلند:

۱) T پیوسته است،

۲) T کراندار است،

۳) هرگاه $x_n \to 0$ آنگاه $\{Tx_n : n \in N\}$ کراندار است،

۴) اگر $x_n \to 0$ آنگاه $Tx_n \to 0$.

تعریف ۱.۳.۷ (F—فضا F-Space)

فضای برداری توپولوژیکی X را F—فضا گوییم، هرگاه توپولوژی آن توسط یک متر تام پایا تولید شده باشد.

قضیه ۱.۳.۸ (قضیه گراف بسته Closed Graph Theorem)

فرض کنید:

۱) Y, X دو F—فضا باشند،

۲) $T : X \longrightarrow Y$ خطی باشد ،

۳) $G = \{(x, Tx) : x \in X\}$ در $X \times Y$ بسته باشد.