دانشگاه صنعتی شاهرود
دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی محض

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی

عنوان

قانون ترتیب عکس برای معکوس های تعمیم یافته مور-پنروز

نگارش

بهناز احمدی بنکدار

استاد راهنما

دکتر کامران شریفی

استاد مشاور

دکتر مهدی ایرانمنش

شهریور ۱۳۹۰

تقدیم به....

صفحهٔ تصویب نامه توسط هیأت داوران (فرم پیوست ۳ یا ۴ با امضای اصل هیأت داوران مورد قبول است)

قدردانی

نتلنتلئتلغنتذ

چکیده

در این پایان نامه به بیان تعاریف و قضایای مهم در رابطه با قانون ترتیب عکس برای معکوس مور-پنروز عملگرها بر فضاهای هیلبرت می پردازیم و شکل ماتریسی این عملگرها و معکوس مور-پنروز آن ها را بررسی می کنیم. هم چنین شرایط لازم و کافی برای اینکه قانون ترتیب عکس سه گانه برای ماتریس ها برقرار باشد ارائه می دهیم و تعدادی از حالت های خاص آن را بررسی می کنیم.

واژه‌های کلیدی: معکوس مور-پنروز، قانون ترتیب عکس و قانون ترتیب عکس سه گانه.

پیشگفتار

می دانیم که همه ی ماتریس های مربعی معکوس پذیر نیستند. در سال های اخیر محققان در زمینه های متنوعی از ریاضیات کاربردی به نوعی از معکوس جزئی یک ماتریس که معکوس ناپذیر یا حتی مستطیلی باشد نیاز پیدا کرده اند. برای این منظور نوعی معکوس به نام معکوس تعمیم یافته معرفی شده است که اگر A ماتریس دلخواه باشد ماتریس B که در شرط $ABA = A$ صدق می کند معکوس تعمیم یافته می گویند که در برخی موارد به معکوس معمولی شبیه است.

پنروز [۱] در سال ۱۹۵۵ نشان داد که برای هر ماتریس متناهی A با درایه های مختلط یک ماتریس B وجود دارد که در چهار معادله زیر صدق می کند:

۱) $ABA = A$ ۲) $BAB = B$ ۳) $(AB)^* = AB$ ۴) $(BA)^* = BA$

چنین ماتریسی، معکوس مور-پنروز A نامیده می شود و با $A^\dagger$ نمایش داده می شود.

اگر a و b عناصر معکوس پذیر یک نیم گروه باشند آن گاه قاعده $(ab)^{-۱} = b^{-۱}a^{-۱}$ قانون ترتیب عکس برای معکوس معمولی نامیده می شود.

در ابتدا گرویل [۲] در سال ۱۹۶۶ در [۱۳] شرایط لازم و کافی برای برقراری قانون ترتیب عکس دوگانه $(AC)^\dagger = C^\dagger A^\dagger$ که در آن A و C ماتریس های مختلط هستند، ارائه داد. این نتایج توسط بولدین [۳] [۴، ۵] و ایزومینو [۴] [۱۷] برای عملگرهای خطی کراندار روی فضاهای هیلبرت تعمیم داده شدند. بعدها ایزومینو در [۱۸] قانون ترتیب عکس را برای معکوس مور-پنروز در حلقه ها اثبات کرد.

تیان [۵] در [۲۳] نتایج جالبی در رابطه با مجموعه های معکوس های تعمیم یافته ماتریس های مستطیلی مختلط در فضای متناهی البعد بدست آورد. همچنین می توانید نتایج جالبی در رابطه با معکوس مور پنروز در [۲، ۸، ۱۰، ۲۲، ۲۴] مشاهده کنید.

---
[۱] Penrose
[۲] Greville
[۳] Bouldin
[۴] Izumino
[۵] Tian

در این پایان نامه، فصل اول به بیان تعاریف و قضایایی اختصاص داده شده است که در فصول بعدی مورد استفاده قرار می گیرند. در فصل دوم، شکل ماتریسی عملگر خطی کراندار با برد بسته و معکوس مور-پنروز آن را مورد بررسی قرار می دهیم. در فصل سوم، نتایج بدست آمده از قانون ترتیب عکس برای معکوس مور-پنروز را بیان می کنیم و در نهایت در فصل آخر شرایط لازم و کافی برای اینکه قانون ترتیب عکس سه گانه $(ABC)^\dagger = C^\dagger B^\dagger A^\dagger$ برای ماتریس ها برقرار باشد ارائه می دهیم و تعدادی از حالت های خاص آن را بررسی می کنیم.

فهرست مطالب

ر

فصل ۱

پیش نیازها و مفاهیم مقدماتی

۱.۱ نمادگذاری

در این پایان نامه از نمادهای زیر استفاده می شود:

A^*	عملگر الحاق
$A^\dagger$	معکوس مور-پنروز
A^-	معکوس درونی A
A^+	معکوس بازتابی A
$A^{(i,j,...,k)}$	$\{i, j, ..., k\}$ - معکوس A
$\|A\|$	نرم عملگر A
$[A, B]$	جابه جاگر A و B
$\langle x, y\rangle$	حاصل ضرب درونی x و y
$\mathbb{C}$	اعداد مختلط
$\mathbb{C}_r^{m\times n}$	ماتریس مختلط $m \times n$ با رتبه r
$D(A)$	دامنه عملگر A
$d(a, b)$	فاصله a تا b

I_n ماتریس همانی $n \times n$

$L(X,Y)$ فضای تمام عملگرهای خطی کراندار از X به Y

$L(X)$ فضای تمام عملگرهای خطی کراندار از X به X

$M^{\perp}$ زیرفضای متعامد بر M

$N(A)$ فضای پوچ عملگر A

$R(A)$ برد عملگر A

$RS(A)$ فضای سطری ماتریس A

$\rho(A)$ رتبه ماتریس A

$X \oplus Y$ حاصل جمع مستقیم دو زیر فضا

∞ بی نهایت

۲.۱ تعاریف و قضایای مقدماتی

تعریف ۱.۲.۱. (نیم گروه)

یک مجموعه ناتهی S به همراه یک عمل دوتایی شرکت پذیر نیم گروه نامیده می شود.

تعریف ۲.۲.۱. (قانون ترتیب عکس)

اگر a و b عناصر معکوس پذیر یک نیم گروه باشند آنگاه قاعده ی $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ قانون ترتیب عکس برای معکوس نامیده می شود.

تعریف ۳.۲.۱. (فضای هیلبرت) ([۱۱])

فرض کنیم X یک فضای برداری مختلط باشد. یک ضرب داخلی روی X نگاشتی مانند $\langle x,y\rangle \longrightarrow (x,y)$ از $X \times X \longrightarrow \mathbb{C}$ است به طوری که :

الف) به ازای هر x، y و z از X و هر a و b از $\mathbb{C}$، $\langle ax+by,z\rangle = a\langle x,z\rangle + b\langle y,z\rangle$

ب) به ازای هر x و y از X، $\langle y,x\rangle=\overline{\langle x,y\rangle}$

ج) به ازای هر عضو ناصفر مانند x از X، $\langle x,x\rangle\in(۰,\infty)$

هر فضای برداری مختلط مجهز به یک ضرب داخلی یک فضای پیش هیلبرت نامیده می شود. اگر X یک فضای پیش هیلبرت باشد، به ازای هر $x\in X$ تعریف می کنیم :

$$\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}.$$

فضای پیش هیلبرتی که نسبت به نرم $\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}$ کامل باشد یک فضای هیلبرت نامیده می شود.

تعریف ۴.۲.۱. (حاصل جمع مستقیم فضاهای هیلبرت) ([۷])

فرض کنیم X و Y فضاهای هیلبرت باشند. در این صورت $X\oplus Y=\{(x_۱,y_۱)|x_۱\in X,y_۱\in Y\}$ را حاصل جمع مستقیم فضاهای هیلبرت می گویند که خودش همچنین یک فضای هیلبرت با حاصل ضرب درونی تعریف شده به صورت زیر برای هر $x_۱,x_۲\in X$ و $y_۱,y_۲\in Y$ است :

$$\langle(x_۱,y_۱),(x_۲,y_۲)\rangle=\langle x_۱,x_۲\rangle+\langle y_۱,y_۲\rangle.$$

تعریف ۵.۲.۱. (عملگر خطی)

فرض کنیم X و Y فضاهای هیلبرت باشند. نگاشت $T:X\longrightarrow Y$ خطی نامیده می شود هرگاه برای هر x و z در X و برای هر α و β در میدان اسکالرها داشته باشیم:

$$T(\alpha x+\beta z)=\alpha TX+\beta Tz.$$

تعریف ۶.۲.۱. (عملگر کراندار)

فرض کنیم X و Y فضاهای هیلبرت باشند. عملگر خطی $A:X\longrightarrow Y$ کراندار نامیده می شود هرگاه یک ثابت $c\geqslant ۰$ وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر $x\in X$ داشته باشیم:

$$\|A(x)\|\leq c\|x\|.$$

تعریف ۷.۲.۱. (متمم پذیر)

زیرمجموعه M از X متمم پذیر است هرگاه زیرمجموعه N از X موجود باشد به طوری که:

$$M \oplus N = X$$

تعریف ۸.۲.۱. (عملگر پوشا)

فرض کنیم X و Y فضاهای هیلبرت باشند. عملگر $A : X \to Y$ پوشا نامیده می شود هرگاه برای هر $y \in Y$، $x \in X$ وجود داشته باشد به طوری که $A(x) = y$.

تعریف ۹.۲.۱. (برد عملگر)

فرض کنیم X و Y فضاهای هیلبرت باشند. برد عملگر $A \in L(X, Y)$، زیرفضای $AX = \{Ax; x \in X\}$ است و با $R(A)$ نشان می دهند.

تعریف ۱۰.۲.۱. (فضای پوچ عملگر)

فرض کنیم X و Y فضاهای هیلبرت باشند. فضای پوچ عملگر $A \in L(X, Y)$، زیرفضای بسته $\{x \in X; Ax = ۰\}$ است و با $N(A)$ نشان می دهند.

تعریف ۱۱.۲.۱. (عملگر خودتوان)

عملگر $A : X \longrightarrow X$ را خودتوان (تصویر) گوییم هرگاه در شرط $A^۲ = A$ صدق کند.

تعریف ۱۲.۲.۱. (عملگر الحاق)

هرگاه X و Y فضاهای هیلبرت باشند و $A \in L(X, Y)$ آنگاه عملگر منحصر به فرد $B \in L(Y, X)$ که در تساوی $\langle Ax, y\rangle = \langle x, By\rangle$ صدق می کند عملگر الحاق A می نامند و با $B = A^*$ نشان می دهند.

تعریف ۱۳.۲.۱. (عملگر تصویر متعامد)

عملگری که در شرط های $P^۲ = P$ و $P^* = P$ صدق کند عملگر تصویر متعامد می نامند.

تعریف ۱.۲.۱۴. (معکوس تعمیم یافته یک ماتریس)

یک معکوس تعمیم یافته برای ماتریس A، ماتریسی مانند B است که در شرایط زیر صدق کند:

۱) برای یک رده بزرگتری از رده ماتریس های معکوس پذیر موجود باشد.

۲)تعدادی از خاصیت های معکوس معمولی را داشته باشد.

۳) وقتی A معکوس پذیر باشد به معکوس معمولی تبدیل شود.

با توجه به این شرایط یک ماتریس تعمیم یافته A، هر ماتریسی مانند B است که در شرط $ABA = A$ صدق کند.

تعریف ۱.۲.۱۵. (ماتریس الحاق)

ترانهاده مزدوج ماتریس $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ ماتریس $A^* = [\overline{a_{ji}}]_{n\times m}$ می باشد، که به آن ماتریس الحاق گویند.

تعریف ۱.۲.۱۶. (ماتریس هرمیتی)

ماتریس مربعی که $A = A^*$ باشد را ماتریس هرمیتی (خودالحاق) گویند.

تعریف ۱.۲.۱۷. (معادلات پنروز [۱]) ([۲])

پنروز در سال ۱۹۵۵ نشان داد که برای هر ماتریس متناهی A با درایه های مختلط، ماتریسی مانند B موجود است که در چهار معادله زیر صدق می کند و معادله های پنروز می نامیم :

۱) $ABA = A$

۲) $BAB = B$

۳) $(AB)^* = AB$

۴) $(BA)^* = BA$

[۱] Penrose equation

تعریف ۱.۲.۱۸. $\{i, j, ..., k\}$ **- معکوس** A

فرض کنیم X و Y فضاهای هیلبرت باشند. برای هر $A \in L(X, Y)$، فرض کنیم $A\{i, j, ..., k\}$ مجموعه عملگرهای $B \in L(Y, X)$ را که در معادله های $i, j, ..., k$ (از تعریف ۱.۲.۱۷) صدق می کند نشان دهد. به طور مثال $A\{۱, ۲, ۳\}$ یعنی مجموعه عملگرهایی مانند B که در معادلات ۱، ۲ و ۳ از تعریف فوق صدق می کنند.

عملگر $B \in A\{i, j, ..., k\}$ یک $\{i, j, ..., k\}$ - معکوس A نامیده می شود و با $A^{(i,j,...,k)}$ نشان می دهند.

تعریف ۱.۲.۱۹. **(معکوس مور-پنروز [۲])**

فرض کنیم X و Y فضاهای هیلبرت باشند. معکوس مور-پنروز $A \in L(X, Y)$، عملگر $B \in L(Y, X)$ است که در معادلات پنروز صدق می کند و آن را با $A^\dagger$ نشان می دهیم. اگر A معکوس پذیر باشد واضح است که $A^\dagger = A^{-۱}$.

تعریف ۱.۲.۲۰. **(زیر فضاهای متعامد)**

زیر فضاهای M و N را متعامد می نامند، هرگاه به ازای هر $m \in M$ و $n \in N$ داشته باشیم $\langle m, n\rangle = ۰$ و آن را با $M \perp N$ نشان می دهیم.

تعریف ۱.۲.۲۱. **(ایزومتری)**

فرض کنیم H و K فضاهای متریک با متر d_H و d_K باشند. یک نگاشت $A : H \longrightarrow K$ ایزومتری نامیده می شود هرگاه برای هر $a, b \in H$ داشته باشیم:

$$d_K(A(a), A(b)) = d_H(a, b).$$

تعریف ۱.۲.۲۲. **(ایزومتری جزیی روی فضاهای هیلبرت)**

[۲] Moor-Penrose inverse

فرض کنیم X و Y فضاهای هیلبرت باشند. عملگر $A \in L(H, K)$ یک ایزومتری جزیی نامیده می شود هرگاه A یک ایزومتری روی $M = (N(A))^{\perp}$ باشد.

تعریف ۱.۲.۲۳. (معکوس درونی)

فرض کنیم X و Y فضاهای هیلبرت باشند و $A \in L(X, Y)$. $B \in L(Y, X)$ معکوس درونی A نامیده می شود هرگاه در شرط $ABA = A$ صدق کند و آن را با A^{-} نشان می دهند.

تعریف ۱.۲.۲۴. (معکوس بازتابی)

فرض کنیم X و Y فضاهای هیلبرت باشند و $A \in L(X, Y)$. $B \in L(Y, X)$ معکوس بازتابی A نامیده می شود هرگاه در شرط های $ABA = A$ و $BAB = B$ صدق کند و آن را با A^{+} نشان می دهیم.

تعریف ۱.۲.۲۵. (ماتریس EP)

هرگاه $R(A) = R(A^{*})$ باشد ماتریس A، ماتریس EP نامیده می شود.

تعریف ۱.۲.۲۶. (جا به جاگر دو عملگر)

فرض کنیم X فضای هیلبرت باشد و $A, B \in L(X)$. جابه جاگر A و B را به صورت $[A, B]$ نشان می دهند و مطابق زیر بدست می آید:

$$[A, B] = AB - BA.$$

تعریف ۱.۲.۲۷. (ماتریس معکوس پذیر)

ماتریس $n \times n$ معکوس پذیر نامیده می شود هرگاه ماتریسی $n \times n$ مانند B وجود داشته باشد، بطوریکه:

$$AB = BA = I_n.$$

تعریف ۱.۲.۲۸. (ماتریس یکانی)

هرگاه I_n یک ماتریس همانی $n \times n$ باشد، ماتریس $U \in \mathbb{C}^{m\times n}$ که در شرط $U^*U = I_n$ صدق کند ماتریس یکانی نامیده می شود.

تعریف ۲۹.۲.۱. (فضای سطری)

هرگاه $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ باشد، فضای برداری تولید شده توسط بردارهای سطری ماتریس A، فضای سطری ماتریس A نامیده می شود و با $RS(A)$ نشان می دهند.

تعریف ۳۰.۲.۱. رتبه ماتریس ([۳])

هرگاه $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ باشد، بعد برد A را رتبه ماتریس A می نامند و آن را با $\rho(A)$ نشان می دهند.

قضیه ۳۱.۲.۱. فرض کنیم X و Y فضاهای هیلبرت باشند. $A \in L(X,Y)$ و $M = N(A)^{\perp}$ باشد. بنابراین A ایزومتری جزئی است اگر و تنها اگر A^*A یک عملگر تصویر از X به M باشد.

اثبات . به مرجع ([۶]) مراجعه شود.

■

قضیه ۳۲.۲.۱. فرض کنیم X و Y فضاهای هیلبرت باشند در این صورت عملگر $A \in L(X,Y)$ دارای برد بسته است اگر و فقط اگر $c > ۰$ موجود باشد به طوری که به ازای هر $x \in X$

$$\|Ax\| \geq cd(x, N(A)).$$

اثبات . به مرجع [۱۲] مراجعه شود.

■

قضیه ۳۳.۲.۱. ([۱۲])

فرض کنیم X و Y فضاهای هیلبرت باشند و $A \in L(X,Y)$ باشد. اگر یک زیرفضای $.Y$ از Y موجود باشد به طوری که $R(A) \oplus Y.$ بسته باشد، آن گاه A دارای برد بسته است.