بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه شهید بهشتی

دانشکده علوم

گروه فیزیک

پایان‌نامه دوره دکتری فیزیک

عنوان :

بسته های موج در کیهانشناسی کوانتومی

نگارش :

پوریا پدرام

استاد راهنما:

دکتر سیامک سادات گوشه

استاد مشاور:

دکتر حمید رضا سپنجی

فروردین ۱۳۸۷

تاریخ ....

شماره ....

پیوست..................

بسمه تعالی

دانشگاه شهید بهشتی

« صورتجلسه دفاع از رساله دکترا »

****

جلسه ارزیابی رساله آقای پوریا پدرام فرزند علی اکبر دارای شناسنامه شماره ۱۹۸۹صادره از شمیران متولد ۱۳۶۰دانشجوی دوره دکترای رشته فیزیک باعنوان:

تهران ۱۹۸۳۹۶۳۱۱۳ اوین
تلفن: ۲۹۹۰۱

بسته های موج در کیهان شناسی کوانتومی

****

به راهنمایی آقای دکترسیامک سادات گوشه طبق دعوت قبلی درتاریخ ۱۳۸۷/۰۱/۱۹ تشکیل گردید وبراساس رای هیات داوران وباعنایت به ماده ۲۱،۲۳،۲۲ ، تبصره های مربوطه مندرج درآزین نامه دوره دکترای مورخ ۱۳۷۲/۱۲/۸، رساله مزبور با نمره ......۱۹٫۴۳...... ودرجه ......عالی......مورد تصویب قرارگرفت .

اعضای هیات داوران :

	نام ونام خانوادگی	درجه دانشگاهی	امضاء
۱-استاد راهنما :	آقای دکتر سیامک سادات گوشه	دانشیار	
۲-استاد مشاور:	آقای دکترحمید رضا سپنجی	استاد	
۳-داورداخل دانشگاه:	آقای دکتر مهرداد فرهودی	دانشیار	
۴-داورخارج از دانشگاه:	آقای دکتررضا منصوری	استاد	
۵-داورخارج ازدانشگاه:	آقای دکترمحمد نوری زنوز	دانشیار	
۶-داورخارج ازدانشگاه:	آقای دکترامیر حسین عباسی	دانشیار	
۷-نماینده شورای تحصیلات تکمیلی:	آقای دکتر مهرداد فرهودی	دانشیار	

ناظر تحصیلات تکمیلی

تقدیم به :

پدر و مادر مهربانم

مراتب سپاس و قدردانی خود را نسبت به جناب آقای دکتر گوشه و جناب آقای دکتر سپنجی به واسطه راهنمایی ها و کمکهای بسیار شان در طول دوره دکتری و خصوصاً در طول انجام پایان‌نامه ابراز مینمایم و کمال تشکر را دارم.

همچنین از آقای دکتر جلال زاده، آقای دکتر جعفری و آقای میرزایی که در انجام بسیاری از مقالات از همکاری ایشان برخوردار بودم و همچنین از تمام دوستانی که به نوعی از مشورت و هم فکریشان در جوی خاطره انگیز استفاده بردم، تشکر و قدردانی می نمایم.

از برادران عزیزم علی و پرهام که در طول سالها یاورمن بوده اند، کمال تشکر و امتنان را دارم.

چکیده

هدف ما در این پایان نامه ساخت بسته موجها به وسیله حل معادله ویلر-دوویت در مدل کیهانشناسی رابرتسون-واکر با انحنای دلخواه و همینطور در ساز و کار شوتز است. ما نشان خواهیم داد که همیشه یک شیب اولیه کانونیک به ازای تابع موج اولیه وجود دارد که خواص مورد نظر را، که مهمترین آن تطابق کلاسیک و کوانتوم میباشد، بهینه می کند. به همین دلیل ما آن را بسته موج کانونیک خواهیم نامید. در آخر روشی کلی برای به دست آوردن این شیب های کانونیک اولیه معرفی خواهیم کرد که به شکل عام کارهای قبلی ما است. به علاوه چون زمان در کیهانشناخت کوانتومی غایب است ما می توانیم با استفاده از روش شوتز آن را به ماده که به صورت شاره کامل است نسبت دهیم. برای این کار معادله ویلر-دوویت را همراه با ثابت کیهانشناسی منفی در حضور شاره کامل به دست می آوریم. با نسبت دادن زمان به ماده میتوان معادله شرودینگر وابسته به زمان را به دست آورد. به وسیله جدا سازی متغیرها معادله شرودینگر مستقل از زمان را به دست می آوریم و با استفاده از شرط مرزی مناسب بسته موجهای مناسب را می سازیم. با بررسی رفتار مقدار چشمداشتی سنجه مقیاس در طول زمان نشان خواهیم داد که این کمیت هیچگاه به صفر میل نمی کند.

کلید واژه ها: کیهانشناخت کوانتومی، معادله ویلر-دوویت، بسته موج، روش طیفی

فهرست مطالب

مقدمه

اتحاد نظریه کوانتومی با نظریه نسبیت عام اینشتین را می توان بزرگترین مسئله برای فیزیکدانان نظری دانست. وجود این نظریه نه تنها می تواند به دلایل مفهومی جالب باشد، بلکه درک مباحث بنیادی نظیر منشا جهان، تبخیر سیاه چاله ها و ساختار فضا زمان نیازمند به دست آوردن این نظریه است. به طور تاریخی کوانتش مستقیم نظریه نسبیت عام اینشتین را می توان نام برد که اکنون نیز به طور جدی دنبال میشود. این نگاه شامل روشهای هموردا مانند روش انتگرال های مسیر، روشهای کانونیک مانند معادلات ویلر-دوویت و جدیداً روش کوانتش حلقه ای است. اگر چه این نظریه اختلالی و بهنجار ناپذیر میباشد، ولی نسبیت عام کوانتومی میتواند نتایج فیزیکی جالبی در حوزه های اختلالی و غیر اختلالی به دست دهد و طبیعت بنیادی فضا زمان را بیشتر مشخص کند.

نظریه کوانتومی را میتوان نظریه جهانی طبیعت نامید. به طور دقیق تر این نظریه چارچوبی عام برای بررسی برهم کنش ها میباشد. نظریه کوانتومی را تجربیات بسیاری تایید کرده اند، هرچند هنوز بحث هایی درباره تفسیر اصول آن باقی مانده است. در حقیقت تنها برهم کنشی که تا کنون به طور کامل به وسیله این نظریه بیان نشده است گرانش است که قدیمی ترین نیروی شناخته شده طبیعی است. این نیرو به صورت کاملا موفقیت آمیز به وسیله نظریه کلاسیکی نسبیت عام اینشتین بیان شده است که به آن دینامیک هندسی نیز میگویند.

قوانین فیزیکی که بر جهان حکمفرما هستند، تحول زمانی حالت اولیه جهان را برای ما روشن می سازند. در فیزیک کلاسیک، با مشخص کردن حالت اولیه سیستم، میتوان به طور کاملا دقیق حرکت ثانویه آنرا پیش بینی کرد. در فیزیک کوانتومی، مشخص کردن حالت اولیه، احتمال یافتن سیستم را در حالت های دیگر برحسب زمان مشخص میکند. کیهانشناخت کوانتومی تلاش میکند تا رفتار جهان را با استفاده از قوانین فیزیکی بیان کند. با اعمال کردن این قوانین بلافاصله با این مسئله مواجه میشویم که باید کدامیک از شرایط

اولیه را در نظر بگیریم. در عمل، کیهانشناسان در تلاش اند تا با بررسی مشخصات کنونی جهان به درک درستی از شرایط اولیه آن دست یابند. این نگاه ثابت شده است که بسیار موفقیت آمیز بوده است، هرچند که کیهانشناسان را بیشتر متوجه مسئله شرایط اولیه میکند.

کیهانشناخت کوانتومی را میتوان کاندیدای خوبی برای تشریح مسئله شرایط اولیه دانست. در این روش نظریه کوانتومی به تمام جهان اعمال میشود. البته در نگاه اول این روش بیهوده به نظر میرسد، زیرا که سیستمهای بزرگ مانند جهان از قوانین کلاسیکی پیروی میکنند نه قوانین کوانتومی. در حقیقت نظریه نسبیت عام اینشتین یک نظریه کلاسیک است که به خوبی تحول جهان را از ثانیه های اول به وجود آمدن آن تا حال حاضر توصیف میکند. البته نشان داده شده است که نسبیت عام با اصول نظریه کوانتومی همخوانی ندارد و در نتیجه نمی تواند توصیف مناسبی از برهم کنش های فیزیکی در مقیاس ها یا زمان های کوچک به دست دهد. در نتیجه برای نشان داد این فرایند ها به نظریه کوانتومی گرانش نیازمند هستیم.

ما در فصل اول به مطالعه مبانی کیهانشناخت کوانتومی می پردازیم. برای این کار ابتدا به بررسی فرمولبندی هامیلتونی در نسبیت عام می پردازیم و با معرفی مدلهای ابر فضای کوچک کنش حاصله را به طور کانونیک کوانتیده می کنیم. در انتهای این فصل به تعبیر احتمالاتی تابع موج خواهیم پرداخت.

در فصل دوم به دنبال ساخت بسته موجها در مدل کیهانشناسی رابرتسون-واکر همراه با میدان نرده ای جفت شده خواهیم بود. برای این منظور مسئله را ابتدا در حوزه کلاسیکی حل میکنیم. سپس به حل کوانتومی این مسئله خواهیم پرداخت و بسته موجها کانونیک را خواهیم ساخت به طوری که خصوصیات این بسته موجها کاملا مطابق با حل های کلاسیک باشد. ما این کار را با انتخاب صحیح ضرایب بسط موج انجام می دهیم. ما نشان خواهیم داد که این روش کاملا عام است و قابل اعمال برای تمامی حالت ها است.

در فصل سوم به بررسی فرمولبندی شوتز در کیهانشناخت کوانتومی می پردازیم. برای این کار مدل شاره کامل همراه با ثابت کیهانشناسی و متریک رابرتسون-واکر را مطالعه می کنیم. ما این روش را برای نواحی تابش، غبار، ریسمان کیهانی و دیواره حوزه اعمال خواهیم کرد. این فرمولبندی این امکان را به ما می دهد

که زمان را دوباره در مدل کوانتومی پیدا کنیم. با حل کردن معادله ویلر-دوویت با انحناهـای مختلـف نـشان خواهیم داد که مقدار چشمداشتی سنجه مقیاس هیچگاه به صفر میل نخواهد کرد.

فصل ۱

۱. مبانی کیهانشناخت کوانتومی

۱,۱. مقدمه

در این فصل، قصد ما توصیف کیهانشناخت کوانتومی می باشد. لذا با بررسی مدلهای خاص رفتار عالم را بر اساس شرایط اولیه شرح می دهیم.

سوال اساسی این است که انگیزه ما برای مطالعه کیهانشناخت کوانتومی چیست؟ جواب این سوال را می توان به کوانتوم گرانشی مرتبط کرد. مدلهای کیهانشناسی، مثال های ساده ای هستند که امکان مطالعهٔ ایده های کوانتوم گرانشی را میسر می سازد. به علاوه، عالم اولیه احتمالا تنها آزمایشگاهی است که کوانتوم گرانشی را می توان آزمود. دومین انگیزه و مهمتر از همه مطالعه شرایط اولیه در کیهانشناسی می باشد. اگرچه مدل مهبانگ داغ بعضی از خصوصیات عالم را شرح می دهد ولیکن تعداد دیگری از مشخصات مانند تختی، افق و منشا افت و خیز چگالی مورد نیاز برای ساخت کهکشان ها را نمیتواند توجیه کند. سناریوی عالم تورمی، که میدان های کوانتیده مادی را بر روی زمینه گرانشی کلاسیک قرار می دهد، توانست مسائل افق و تختی را حل کند. به علاوه با فرض اینکه میدان مادی از یک حالت خاصی آغاز می کند، میتوان چگالی افت و خیز مورد نظر را به دست آورد. البته در مدل تورمی عالم، مبحث شرایط اولیه به طور کلی نادیده گرفته شده است. در ضمن باید به این نکته نیز توجه داشت که در نتیجه تورم، عالم مشاهده شده میتواند ناشی از دسته بزرگتری از شرایط اولیه نسبت به مدل مهبانگ داغ باشد و این بدان معنی نیست که عالم میتواند ناشی از هر حالت اولیه ای باشد. در حقیقت می توان حالت اولیه کوانتومی را برای ماده طوری انتخاب کرد که به مقدار صحیح طیف چگالی افت و خیز منجر نشود. در نتیجه برای داشتن توصیفی کامل از حالت مشاهده شده کنونی عالم لازم است که ابتدا به مقوله شرایط اولیه بپردازیم.

وقتی که تحول عالم را در خلاف جهت زمان در نظر می گیریم، انحنا و چگالی به مقیاس پلانک نزدیک می شوند و می توان انتظار داشت که تاثیرات گرانشی کوانتومی، مهم جلوه کنند. کیهان شناسی کوانتومی که در

آن هم ماده و هم میدان گرانشی کوانتیده شده باشند در این صورت چارچوب مناسبی برای بررسی مسئله شرایط اولیه می باشد.

در یک جمله کیهانشناخت کوانتومی را میتوان کاربرد مکانیک کوانتومی در سیستمهای کوانتومی که با کیهانشناسی بسته توصیف می شوند، بیان کرد. به طور تاریخی اولین تحقیقات در زمینه کیهانشناخت کوانتومی به وسیله دوویت [۱] ، میسنر [۲و۳و۴و۵و۶و۷] و ویلر [۸و۹] انجام شده است. این تحقیقات را به عنوان کیهانشناخت کوانتومی قدیم می شناسند.

بعد از تلاشهای اولیه ای که به وسیله این دانشمندان صورت گرفت، تحقیقات در کیهانشناخت کوانتومی در دهۀ ۷۰ کمی راکد میشود. ولیکن در دهۀ ۱۹۸۰ این مبحث به وسیله هارتل و هاوکینگ [۱۰و۱۱و۱۲]، ویلنکین [۱۳و۱۴و۱۵]و لینده [۱۶و۱۷و۱۸] بار دیگر احیا میشود. دانشمندان فوق دو چیز به دیدگاه قدیم اضافه کردند. اولا هارتل و هاوکینگ انتگرال های تابعی اقلیدوسی را معرفی کردند و از ترکیبی از روشهای کانونیک و انتگرال های مسیر استفاده کردند. ثانیا تمامی این دانشمندان به طور جدی با مسئله شرایط مرزی و شرایط اولیه بر روی تابع موج مواجه شده اند.

در کیهانشناخت کوانتومی میتوان از تابع موج عالم بسته به عنوان نقطه اصلی توجه نام برد.

$$\Psi[h_{ij}(x), \Phi(x), B] \qquad (۱,۱)$$

این کمیت دامنه احتمالی را نشان می دهد که عالم شامل ۳سطح B بر ۳ متریک $h_{ij}(x)$ و میدان مادی $\Phi(x)$ باشد. از این دامنه احتمال می توان کمیت های دیگر را که نتیجه مشاهدات در مقیاس بالا است، محاسبه کرد. برای معین کردن دامنه احتمال (۱,۱) در ابتدا به یک نظریه دینامیکی مانند نسبیت عام نیاز داریم. سپس می توانیم معادله ای شبیه معادله شرودینگر که معادله ویلر-دوویت نام دارد را به دست آوریم. معادله ویلر-دوویت دارای جواب های بسیاری است، اما برای پیش بینی کردن نیاز به مشخص کردن شرایط

اولیه یا شرایط مرزی برای به دست آوردن تنها یک جواب داریم. در آخر به روشی برای تعبیر تابع موج نیاز داریم. در نتیجه کیهانشناخت کوانتومی دارای سه مرحله می باشد: دینامیک، شرایط اولیه، و تعبیر.

یکی از حقایق درباره عالمی که ما اکنون آن را مشاهده می کنیم این است که عالم به دقت بالایی به وسیله قوانین کلاسیکی توصیف می شود. از طرفی چون در کیهانشناخت کوانتومی عالم به طور کلی طبیعتی کوانتومی دارد، یکی از اصول اولیه این است که در مقیاس بزرگ عالم به طور کلاسیکی توصیف می شود. در واقع آن چیزی که ما پیدا می کنیم این است که چه ناحیه های از فضا زمان کلاسیکی است و چه نواحی کلاسیکی نیست. در نواحی که فضا زمان کلاسیکی است ما در خواهیم یافت که تابع موج حول مجموعه جواب های کلاسیک معادله اینشتین متمرکز شده و با توجه به شرایط مرزی بر روی تابع موج، این جواب های زیر مجموعه ای از جواب کلی می باشند. در حقیقت شرایط مرزی بر روی تابع موج، شرایط اولیه بر روی حل های کلاسیک را مشخص می کند. ما اکنون می توانیم این سوال را بپرسیم که آیا جزییات ظریفتر عالم مانند وجود دوره تورمی، حاصل نظریه شرایط اولیه می باشند یا نه؟ به علاوه ما میتوانیم در ناحیه تقریبی کلاسیکی فرم آشنای نظریه میدان کوانتومی را برای میدان مادی بر روی زمینه کلاسیکی خمیده از روی معادله ویلر-دوویت به دست آوریم. همینطور می توانیم با استفاده از شرایط مرزی بر روی تابع موج عالم یک انتخاب خاصی را از حالت خلا میدان های مادی استخراج کنیم. سپس می توانیم این سوال را مطرح کنیم که آیا این انتخاب حالت خلا برای باز تولید ساختار های بزرگ مناسب می باشد.

۱,۲. یک مدل ساده

قبل از این که به سراغ فرمولبندی کلی کیهانشناخت کوانتومی برویم بهتر است به مطالعه یک مدل ساده عالم تورمی بپردازیم. به این وسیله می توانیم بهتر مفاهیم گفته شده در بالا را روشن بسازیم.

اجازه دهید در ابتدا عالمی همگن، همسانگرد با متریک رابرتسون-واکر را در نظر بگیریم.

$$ds^2 = \sigma^2[-N^2(t)dt^2 + e^{2\alpha(t)}d\Omega_3^2(k)] \qquad (۱,۲)$$

بــه طوریکــه $\sigma^2 = 2\,/\,(3\pi m_p^2)$ و $d\Omega_3^2(k)$ متریــک بــر روی قــسمت فــضایی بــا ثابــت انحنــای $k = -1, 0, +1$ می باشد. در کیهانشناخت کوانتومی معمولا عالم بسته مورد مطالعه قرار مــی گیــرد ولــی فعلا تمامی مقادیر k را در نظر می گیریم. در اینجا متریک با یک سنجه مقیاس مشخص مــی شــود $e^{\alpha(t)}$. همچنین میتوان از یک میدان نرده ای جفت شده بــه عنــوان منبــع مــادی $\sqrt{2}\pi\sigma\phi(t)$ بــا یــک پتانــسیل $2\pi^2\sigma^2V(\phi)$ استفاده کرد. در این صورت کنش اینشتین برای ایــن سیــستم را مــی تــوان بــه صــورت زیــر نوشت.

$$S = \frac{1}{2}\int dtNe^{3\alpha}[-\frac{\dot{\alpha}^2}{N^2} + \frac{\dot{\phi}^2}{N^2} - V(\phi) + ke^{-2\alpha}] \qquad (۱,۳)$$

معادلات میدان و قید را می توان با وردش نسبت به متغییر های α، ϕ، و N به دست آورد.

$$\ddot{\phi} = -3\dot{\alpha}\dot{\phi} - \frac{1}{2}V'(\phi) \qquad (۱,۴)$$

$$\ddot{\alpha} = -2\dot{\phi}^2 - \dot{\alpha}^2 + V(\phi) \qquad (۱,۵)$$

$$-\dot{\alpha}^2 + \dot{\phi}^2 + V(\phi) = ke^{-2\alpha} \qquad (۱,۶)$$

با انتخاب پیمانه $N = 1$. در اینجا ما شکل خاصی از پتانسیل را فرض نمی کنــیم بــه جــز اینکــه پتانــسیل تورمی باشد یعنی برای مقادیر خاصی از ϕ، $V(\phi)$ بزرگ باشد و $|\, V'(\phi)\,/\,V(\phi) \ll 1\,|$. این شــرط بــه طور مثال برای ϕ های بزرگ در مدلهای تورم آشوبی با $V(\phi) = m^2\phi^2$ یا $\lambda\phi^4$ و برای مقــادیر کوچــک ϕ در مدلهایی با پتانسیل کلمن-واینبرگ برقرار می باشد. البته باید توجه داشت که جواب عام برای سیستم معادلات بالا شامل سه پارامتر دلخواه میباشد.

برای مدلهایی که پتانسیل شرط بالا را برآورده می سازد، به سادگی دیده می شود که جوابی وجــود دارد کــه $\dot{\phi} \approx 0$ و پتانسیل مانند ثابت کیهانشناسی رفتار کند. در نتیجه مدل دچار تورم خواهد شــد، $e^{\alpha} \approx e^{V^{\frac{1}{2}}t}$. هرچند یافتن همچنین جوابی بستگی به شرایط اولیه دارد. به این دلیل ما نیــاز داریــم کــه مقــدار اولیــه $\dot{\phi}$

کوچک انتخاب شود و مقدار اولیه ϕ در ناحیه ای انتخاب شود کـه $|\, V'(\phi) \,/\, V(\phi) \ll 1 \,|$. اکنـون ایـن سوال پیش می آید که در مدلی از این نوع تا چه مقدار میتوان انتظار تورم داشت.

برای جواب دادن به این سوال ما به تصویری کامل از جواب کلاسیکی نیاز داریم. آشکار است که حـل دقیـق معادلات میدان حتی برای انتخاب های ساده پتانسیل کار ساده ای نیست. البته همواره می تـوان بـه وسـیله نظریـه کیفـی سیـستمهای دینـامیکی اطلاعـات مفیـدی را بـه دسـت آورد. معـادلات دیفرانـسیلی کـه در کیهانشناسی ظاهر می شود را به صورت زیر نوشت

$$\dot{x} = f(x, y, z, \ldots), \qquad \dot{y} = g(x, y, z, \ldots), \qquad \dot{z} = \ \ldots \tag{۱,۷}$$

معادله (۱,۷) جهت جواب ها را در هر نقطه مشخص می کند. بـا رسـم بردارهـای جهتـی در نقـاط انتخـابی میتوان تصویر کاملی از دسته کامل مسیرها که حل معادله (۱,۷) هستند را بدون انتگـرال گیـری بـه دسـت آورد.

این روش را میتوان به معادلات میـدان (۱,۴) و (۱,۵) بـه وسـیله قـرار دادن $x = \dot{\phi}$، $y = \dot{\alpha}$ و $z = \phi$ اعمال کرد. چون معمولا قید (۱,۶) مورد اسـتفاده قـرار نمیگیـرد میتـوان سـه حالـت $k = 0, -1, +1$ را همزمان بررسی کرد. البته ساخت فضای فازی سه بعدی در این حالت کار مشکلی خواهد بود. به همین دلیل اجازه دهید با مطالعه ناحیه ای که در آن تابعیت ϕ پتانسیل کوچک باشد، مسئله را کمی ساده کنـیم. ایـن معادل میدان اسکالر بدون جرم و ثابت کیهانشناسی می باشد. پس با یک سیستم دو بعـدی موجـه خـواهیم شد.

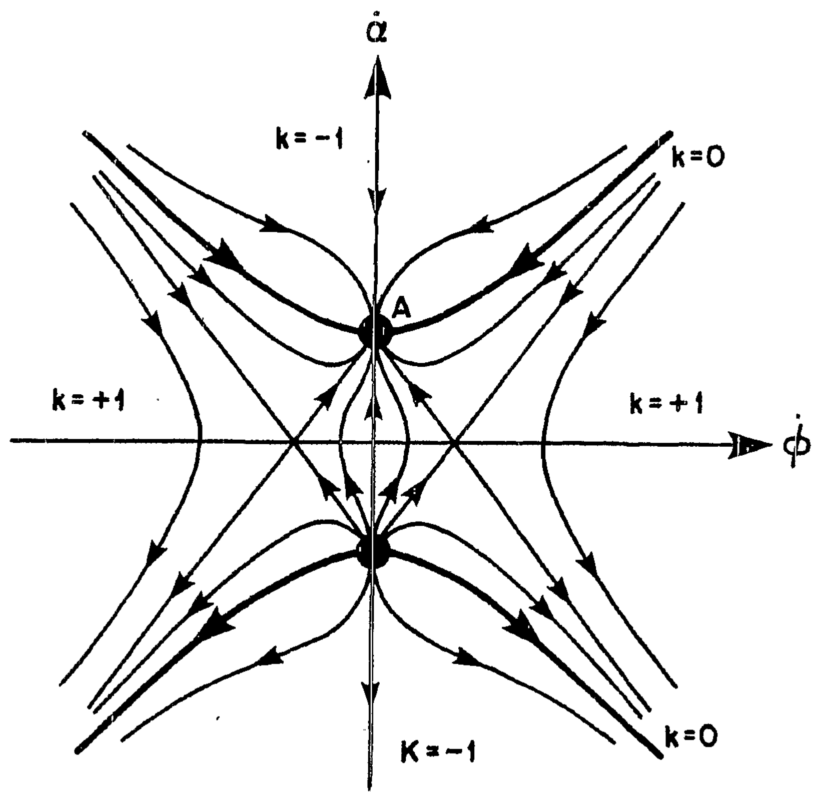
$$\dot{x} = -3xy \qquad \dot{y} = -2x^2 - y^2 + V \tag{۱,۸}$$

همراه با معادله قیدی

$$x^2 - y^2 + V = ke^{-2\alpha} \tag{۱,۹}$$

این معادله به سادگی بیان می دارد که برای حالت $k=0$ جواب ها دو دسته منحنی هستند $y=\pm\sqrt{x^2+V}$ و برای حالت $k=+1$ جواب ها بین این دو منحنی و برای $k=-1$ جواب ها خارج آن قرار می گیرد.

تصویر فازی این سیستم دو بعدی در شکل ۱ نشان داده شده است. نقطه جالب توجه، نقطه $\dot{\alpha}=V^{\frac{1}{2}}$، $\dot{\phi}=0$ روی منحنی $k=0$ می باشد. در این نقطه سیستم دچار تورم می شود. این نقطه یک نقطه جاذب برای حالت های گسترش یابنده $k=0$ و $k=-1$ می باشد.



شکل ۱: نمودار فضای فاز معادله (۱,۸)

برای حالت $k=+1$ که مورد توجه در کیهانشناخت کوانتومی میباشد، جواب ها لزوما بروی نقطـه جـاذب ختم نمیشوند. این جواب ها اگر خارج از منحنی $k=0$ با $|\dot{\phi}|$ بزرگ حرکت خودشان را آغاز کنند، بدون نزدیک شدن به نقطه جاذب، خاتمه می یابند. در نتیجه تورم برای آن دسته از جواب هـای $k=1$ رخ مـی دهد که دارای $\dot{\phi}$ اولیه کوچک باشند. به علاوه وقتی پتانسیل اجازه می یابد که با ϕ تغییر کند، بـه مـسئله تورم کافی بر می خوریم. برای مدل میدان اسکالر جرم دار حتی برای حالت اولیـه $\dot{\phi}\approx 0$ عـالم بـا فـاکتور e^{65} با مقدار اولیه بزرگتر از ۴ (در مقیاس پلانک) متورم می شود.

این مدل ساده نشان می دهد که چگونه تورم به انتخاب مقادیر اولیـه ϕ و $\dot{\phi}$ حـساس مـی باشـد. اکنـون اجازه دهید به کوانتش این مدل بپردازیم تا ببینیم چگونه کیهانشناخت کوانتومی این مـسئله را روشـن مـی کند.

ما میخواهیم که سیستم دینامیکی که به وسیله کنش (۱,۳) توصیف میشود را برای حالت $k=1$ کوانتیده کنیم. این کار را با یافتن هامیلتونین سیستم آغاز می کنیم. اندازه حرکت همیوغ بـه متغییـر هـای α و ϕ طبق معمول به وسیله روابط زیر مشخص می شوند

$$\pi_\alpha = -e^{3\alpha}\frac{\dot{\alpha}}{N}, \qquad \pi_\phi = e^{3\alpha}\frac{\dot{\phi}}{N} \tag{۱,۱۰}$$

هامیلتونین کانونیک نیز به صورت زیر تعریف میشود

$$H_c = \frac{1}{2}Ne^{-3\alpha}[-\pi_\alpha^2+\pi_\phi^2+e^{6\alpha}V(\phi)-e^{4\alpha}] \equiv NH \tag{۱,۱۱}$$

فرم هامیلتونی کنش نیز معادل است با

$$S=\int dt[\dot{\alpha}\pi_\alpha+\dot{\phi}\pi_\phi-NH] \tag{۱,۱۲}$$

این فرم از نمایش کنش این حقیقت را مشخص می سازد که تابع گذر N، ضریب لاگرانژ می باشد که قید

$$H=0 \tag{۱,۱۳}$$

را برقرار می سازد. این معدله نمایش فضای فاز قید (۱,۶) می باشد. این قید وجود یک تقارن را مشخص می کند. اکنون میتوانیم با معرفی تابع موج $\Psi(\alpha,\phi,t)$ و برقراری معادله وابسته به زمان شرودینگر به فرم کانونیک هامیلتونی برسیم

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t}=H_c\Psi \qquad (۱,۱۴)$$

برای اینکه از اعمال قید (۱,۱۳) در حوزه کوانتومی اطمینان حاصل کنیم تابع موج باید توسط فرم عملگری (۱,۱۳) نابود شود:

$$H\Psi=\frac{1}{2}e^{-3\alpha}[\frac{\partial^2\Psi}{\partial\alpha^2}-\frac{\partial^2\Psi}{\partial\phi^2}+e^{6\alpha}V(\phi)-e^{4\alpha}]\Psi=0 \qquad (۱,۱۵)$$

در اینجا از فرم عملگری اندازه حرکت ها استفاده شده است. البته چون $H_c=NH$ ، ازمعادلات (۱,۱۴) و (۱,۱۵) نتیجه می گیریم که تابع موج مستقل از زمان است. لذا دینامیک تابع موج با رابطه $\Psi=\Psi(\alpha,\phi)$ داده میشود. این که تابع موج به زمان به طور صریح بستگی ندارد به طور کلی مختصه کلی نظریه های پارامتری مانند نسبیت عام میباشد. معادله (۱,۱۵) معادله ویلر-دوویت نام دارد که معادله اصلی در کیهانشناخت کوانتومی میباشد.

اکنون اجازه دهید به بررسی بعضی از این جواب ها بپردازیم. برای اینکار به ناحیه ای میرویم که $|V'(\phi)\,/\,V(\phi)\ll 1|$ و به دنبال جواب هایی هستیم که وابستگی زیادی به ϕ نداشته باشند. درنتیجه میتوانیم از مشتقات ϕ در معادله (۱,۱۵) صرفنظر کنیم. در این صورت مسئله به مسئله استاندارد یک بعدی WKB بر حسب α با پتانسیل $U=e^{6\alpha}V(\phi)-e^{4\alpha}$ تبدیل می شود. در ناحیه ای که $U\ll 0$ بطوریکه سنجه مقیاس کوچک باشد، جواب های WKB به صورت زیر میباشند.

$$\Psi(\alpha,\phi)\approx\exp(\pm\frac{1}{3V(\phi)}(1-e^{2\alpha}V(\phi))^{3/2}) \qquad (۱,۱۶)$$