بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه خوارزمی

دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر

پایان نامه کارشناسی ارشد

ریاضی محض (جبر)

عنوان

محک‌هایی برای یکدست و انژکتیو بودن

تدوین

فهیمه قادرنظری

استاد راهنما

دکتر عبدالجواد طاهری زاده

مهر۱۳۹۱

سپاس‌گزاری...

نخست سپاس خداوندی را که عاشقانه آفرید، سخاوتمندانه بخشید و صادقانه هدایت کرد.

سپاس پدری را که در سایه‌سار حمایت بی‌دریغش خواستن را آزمودم، تلاش را آموختم و هدایت را یافتم.

با قدردانی از مادری که با تکیه بر مهر پاکش خواسته‌ها را خواستم، زندگی را زیستم و امیدها را یافتم.

با تشکر فراوان از زحمات بی‌دریغ استاد گرانقدر، جناب آقای دکتر عبدالجواد طاهری‌زاده که با راهنمایی‌های ارزنده خویش، راهگشای بنده در تمام مراحل این مجموعه بوده‌اند.

افتخاری بس ارجمند را ارج می‌نهم که سرکار خانم دکتر جهانگیری و جناب آقای دکتر طوسی، پایان‌نامه‌ام را به قضاوت و داوری نشستند و آموخته‌هایم را با محک دانششان سنجیدند.

فرصتی است تا ابراز تشکری داشته باشم از دوستان عزیزم خانم‌ها ناهید یوسفی و فهیمه تورانی که در نگارش این پایان‌نامه مرا یاری رسانده‌اند.

فهیمه قادرنظری

۱۳۹۱

چکیده

فرض کنیم R یک حلقه جابه‌جایی و نوتری باشد. در این پایان‌نامه محک‌هایی برای یکدست بودن R-مدول‌ها بر حسب ایده‌آل‌های اول وابسته و بدون تاب بودن بعضی از ضرب‌های تانسوری ارائه می‌شود. این امر منجر به بسط یک محک برای منظم بودن حلقه R با مشخصه p و یا به طور کلی‌تر، حلقه‌هایی که دارای یک درونریختی موضعاً انقباضی‌اند، می‌شود. هم‌چنین محک‌هایی برای انژکتیو بودن R-مدول‌ها، بر حسب ایده‌آل‌های اول هم وابسته و h-بخش‌پذیری مدول‌های هومورفیسمی خاص ارائه می‌شود. همراه با به دست آوردن این نتایج، که دوگان نتایج مربوط به یکدستی است، به توسعه ابزارهای مورد نیاز می‌پردازیم. این ابزارها به ویژه مشتمل است بر تجزیه و تحلیل مفهوم بخش‌پذیری و h-بخش‌پذیری (به انضمام یک نتیجه مربوط به موضعی سازی) و قضیه‌ای درباره ایده‌آل‌های اول هم وابسته در مورد تغییر حلقه برای یک مدول هومورفیسمی و یک محک موضعی برای انژکتیو بودن ارائه می‌شود.

واژه‌های کلیدی: *مدول انژکتیو، مدول یکدست، مدول بدون تاب، مدول بخش‌پذیر، مدول h- بخش‌پذیر، ایده‌آل اول وابسته، ایده‌آل اول هم وابسته.*

رده بندی موضوعی (۲۰۱۰): 13C05 ، 13C11 .

مقدمه

بررسی محک‌های یکدستی و انژکتیوی R-مدول‌ها از بررسی محک‌های تصویری بودن R-مدول‌ها، مشکل‌تر است. در این پایان‌نامه به ارائه و بررسی محک‌های یکدستی و انژکتیوی می‌پردازیم. به عنوان مثال چند مورد از محک‌های یکدستی روی حلقه نوتری و جابه‌جایی R عبارتست از:

(۱) R-مدول M یکدست است اگر و تنها اگر برای هر $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$، $\mathrm{Tor}_1^R(\frac{R}{\mathfrak{p}}, M) = 0$.

(۲) [8, 10.2.2] فرض کنیم $f : R \longrightarrow S$ همریختی حلقه‌های نوتری و I ایده‌آلی از R باشد، به طوری که $IS \subseteq \mathrm{Jac}(S)$ و M را یک S-مدول با تولید متناهی در نظر می‌گیریم. در این صورت M روی R یکدست است اگر و تنها اگر $\frac{M}{IM}$ روی $\frac{R}{I}$ یکدست باشد و $\mathrm{Tor}_1^R(\frac{R}{I}, M) = 0$.

(۳) [16, 3.57] R- مدول با تولید متناهی M یکدست است اگر و تنها اگر تصویری باشد.

برای انژکتیو بودن نیز محک‌هایی موجود است، از جمله این محک‌ها، محک بئر است که به ما می‌گوید روی حلقه نوتری R، مدول M انژکتیو است اگر و تنها اگر برای هر $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$، $\mathrm{Ext}_R^1(\frac{R}{\mathfrak{p}}, M) = 0$.

هم‌چنین روی حوزه صحیح R، مدول بدون تاب M انژکتیو است اگر و تنها اگر بخش‌پذیر باشد و در نتیجه ۲.۲.۱۳، با تغییر اندکی شرایط معادلی برای انژکتیوی و بخش‌پذیری ارائه می‌دهیم. ولی در حالت کلی مدول‌های انژکتیو لزوماً بدون تاب نیستند.

این پایان‌نامه مشتمل بر چهار فصل است و به ترتیب زیر تنظیم شده است.

در فصل اول تعاریف و قضایای مقدماتی در نظریه حلقه‌های جابه‌جایی و مقدماتی از همولوژی مطرح کرده‌ایم.

در فصل دوم ابتدا در قضیه ۱.۱.۲ ، یک نتیجه استاندارد راجع به ایده‌آل‌های اول وابسته و ضرب تانسوری است بیان می‌کنیم و در قضایای ۴.۱.۲ و ۱۰.۱.۲ چندین مشخص کننده یکدستی با استفاده از مفاهیم ایده‌آل‌های اول وابسته، بدون تابی و بعضی ضرب‌های تانسوری ارائه می‌دهیم. در این راستا به مثالی می‌پردازیم که نشان می‌دهد شرط گذاشته شده روی ایده‌آل‌های اول وابسته در قضیه ۴.۱.۲ تضمین کننده یکدستی روی حلقه‌های غیر تحویل‌یافته نیست. سپس دو مفهوم غیر معادل از بخش‌پذیری را مطرح می‌کنیم و بعضی از دوگان‌های مربوط به بدون تابی را ارائه می‌دهیم و نشان می‌دهیم در حلقه‌هایی که فاقد ایده‌آل‌های اول محاطی هستند دو مفهوم بخش‌پذیری مطرح شده، معادل یکدیگرند.

در فصل سوم کاربردی از قضیه ۱۰.۱.۲ ارائه می‌شود، در واقع بعد از عمومیت بخشیدن مفهوم درونریختی موضعاً انقباضی، در قضیه ۱۴.۱.۳ برای نظم حلقه‌های تحویل‌یافته‌ای که یک درونریختی موضعاً انقباضی دارند، گزاره‌های معادلی ارائه می‌شود.

در پایان، در فصل چهارم دوگان ایده‌آل‌های اول وابسته را تعریف می‌کنیم که ایده‌آل‌های اول هم وابسته نامیده می‌شوند، در قضیه ۱۳.۱.۴ دوگان مهمی از نتیجه استاندارد فصل دوم که روی ایده‌آل‌های اول وابسته و ضرب تانسوری است مطرح می‌کنیم که شامل ایده‌آل‌های اول هم وابسته و مدول‌های هومومورفیسمی است. سپس به ارائه و بررسی محک‌هایی برای انژکتیو بودن مدول می‌پردازیم، به‌طوری‌که قضیه ۱.۲.۴ دوگان معروف محک یکدستی موضعی است و قضیه ۲.۲.۴ با فرض h-بخش پذیری مدول‌های هومومورفیسمی، محک‌هایی برای انژکتیو بودن یک مدول ارائه می‌دهد. هم‌چنین در قضیه ۳.۲.۴ گزاره‌های معادل بسیاری برای انژکتیو بودن مدول در حلقه‌های تحویل‌یافته و گزاره‌های معادلی برای هم مولد انژکتیو بودن در همین حلقه‌ها مطرح می‌کنیم که در آن بسیاری از مفاهیم، مورد استفاده قرار گرفته شده است.

مطالب این پایان‌نامه بر اساس مقاله

N. Epstein,Y. Yao, Criteria for Flatness and Injectivity, *Math.Z* (2012)**271**: 1193-1210.

تدوین شده است.

فهرست مطالب

فصل ۱

مقدمات

در سراسر این پایان‌نامه کلیه حلقه‌ها جابه‌جایی و یکدار اند و R نماد چنین حلقه‌هایی است. از نمادهای $\mathrm{Spec}(R)$ و $\mathrm{Min}(R)$ و $\mathrm{Max}(R)$ به ترتیب برای مجموعه‌ی ایده‌آل‌های اول و مجموعه‌ی ایده‌آل‌های اول مینیمال و مجموعه‌ی ایده‌آل‌های ماکسیمال حلقه R استفاده می‌شود.

۱.۱ تعاریف و قضایای مقدماتی

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنیم $\mathfrak{a}$ یک ایده‌آل سره R باشد، در این صورت تعریف می‌کنیم

$$V(\mathfrak{a}) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) |\ \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}\}.$$

عناصر مینیمال $V(\mathfrak{a})$ ایده‌آل‌های اول مینیمال شامل $\mathfrak{a}$ نامیده می‌شود. اگر R ناصفر باشد ایده‌آل‌های اول مینیمال صفر را ایده‌آل‌های اول مینیمال R نامیم.

تعریف ۲.۱.۱. عنصر x از حلقه‌ی R را یک مقسوم علیه صفر نامیم، هرگاه عنصر ناصفر $y \in R$ موجود باشد به طوری که $yx = 0$. مجوعه‌ی مقسوم علیه‌های صفر حلقه R را با نماد $Z(R)$ نمایش می‌دهیم. برای R-مدول مفروض M، مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های صفر M روی R را با نماد $Z_R(M)$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$Z_R(M) = \{r \in R \mid \exists\, x \in M;\ x \neq 0 \text{ و } rx = 0\}.$$

و هرگاه $x \notin Z_R(M)$، x عنصری M-منظم نامیده می‌شود.

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنیم I یک ایده‌آل R باشد، رادیکال I را با نماد $\sqrt{I}$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\sqrt{I} = \{r \in R \mid r^n \in I \text{ که به طوری است موجود ای } n \in \mathbb{N}\}.$$

و واضح است که $\sqrt{I}$ ایده‌آلی از R است و $I \subseteq \sqrt{I}$. اگر $\mathfrak{q}$ ایده‌آل اول R باشد $\sqrt{\mathfrak{q}} = \mathfrak{q}$.

لم ۴.۱.۱. [18, 3.48, 3.53] *فرض کنیم I یک ایده‌آل R باشد، در این صورت* $\sqrt{I} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in V(I)} p = \bigcap_{\mathrm{Min}(I)} p$. *اگر* $I = 0$ ، $\sqrt{0}$ *رادیکال پوچ R نامیده می‌شود.*

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنیم I و J ایده‌آل‌های R باشند، خارج قسمت $(I :_R J)$ را به صورت زیر نمایش می‌دهیم

$$(I :_R J) = \{a \in R \mid aJ \subseteq I\}.$$

واضح است که $I \subseteq (I :_R J)$. در حالت خاص اگر $I = 0$ ، $(0 :_R J)$ را با $\mathrm{Ann}_R J$ نشان می‌دهیم.

لم ۶.۱.۱. [18, 2.33] *فرض کنیم J ، I و K ایده‌آلهای R باشند و $(I_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ خانواده‌ای از ایده‌آل‌های R باشد، در این صورت گزاره‌های زیر برقرارند.*

(۱) $((I :_R J) :_R K) = (I :_R JK) = ((I :_R K) :_R J)$؛

(۲) $(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda :_R K) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (I_\lambda :_R K)$؛

(۳) $(J :_R \sum_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (J :_R I_\lambda)$.

تعریف ۷.۱.۱. فرض کنیم $f : R \longrightarrow S$ همریختی حلقه‌ای باشد.

(۱) هرگاه J ایده‌آل S باشد، آن‌گاه $f^{-1}(J) := \{r \in R \mid f(r) \in J\}$ ایده‌آلی از R است و آن حاصل تحدید J نسبت به (یا تحت) همریختی حلقه‌ای f نامیده می‌شود. اگر احتمال این اشتباه نباشد که کدام همریختی حلقه‌ای مورد بحث است $f^{-1}(J)$ را با J^c نمایش می‌دهیم.

(۲) به ازای هر ایده‌آل I از R ایده‌آل $f(I)S$، یعنی ایده‌آل تولید شده توسط $f(I)$ در S را حاصل توسیع I نسبت به (یا تحت) همریختی حلقه‌ای f نامیم . اگر احتمال اشتباه نباشد $f(I)S$ را با I^e نمایش می‌دهیم.

لم ۸.۱.۱. [18, 2.44] *فرض کنیم $f : R \longrightarrow S$ همریختی حلقه‌ای و I ایده‌آل R و J ایده‌آل S باشد . در این صورت گزاره‌های زیر بر قرارند.*

(۱) $I \subseteq I^{ec}$؛

(۲) $J^{ce} \subseteq J$؛

(۳) $I^e = I^{ece}$؛

(۴) $J^{cec} = J^c$.

واضح است اگر $I \subseteq J$ ، $I^e \subseteq J^e$ *و هم‌چنین* $I^c \subseteq J^c$.

لم ۱.۱.۹. [18, 3.9] *فرض کنیم I و J ایده‌آل‌هایی از R باشند که $J \supseteq I$ ، در این صورت J ایده‌آل ماکسیمال R است اگر و تنها اگر $\frac{J}{I}$ ، ایده‌آل ماکسیمال $\frac{R}{I}$ باشد.*

قضیه ۱.۱.۱۰. *هر R-مدول با تولید متناهی حداقل یک زیر مدول ماکسیمال دارد.*

نتیجه ۱.۱.۱۱. [18, 3.4] *فرض کنیم R حلقه‌ای ناصفر باشد، در این صورت R حداقل یک ایده‌آل ماکسیمال دارد.*

نتیجه ۱.۱.۱۲. [18, 3.10] *فرض کنیم I ایده‌آلی سره از R باشد، در این صورت ایده‌آل ماکسیمالی مانند M از R موجود است به طوری که $I \subseteq M$.*

لم ۱.۱.۱۳. [18, 3.11] *فرض کنیم $a \in R$، در این صورت a عضو یکال R است اگر و تنها اگر به ازای هر ایده‌آل ماکسیمال M از R ، $a \notin M$ ، یعنی اگر و تنها اگر a خارج هر ایده‌آل ماکسیمال R واقع شود.*

تعریف ۱.۱.۱۴. حلقه‌ی R را که دقیقاً یک ایده‌آل ماکسیمال چون $\mathfrak{m}$ دارد موضعی نامیم و $k = \frac{R}{\mathfrak{m}}$ هیأت مانده‌ای R نامیده می‌شود در این صورت حلقه موضعی R را به صورت $(R, \mathfrak{m}, k)$ نشان می‌دهیم.

لم ۱.۱.۱۵. [18, 3.13] *فرض کنیم R حلقه‌ای دلخواه باشد، در این صورت R موضعی است، اگر و تنها اگر مجموعه‌ی عناصر غیر یکال R ایده‌آل R باشد.*

نتیجه ۱.۱.۱۶. [18, 3.14] *فرض کنیم R حلقه‌ای موضعی باشد، در این صورت از لم ۱. ۱. ۱۳ نتیجه می‌شود که ایده‌آل ماکسیمال منحصر بفرد R دقیقاً همان مجموعه‌ی عناصر غیر یکال R است.*

تعریف ۱.۱.۱۷. رادیکال جیکبسن R را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$Jac(R) = \bigcap_{\mathfrak{m} \in \operatorname{Max}(R)} \mathfrak{m}.$$

هرگاه R، حلقه صفر باشد $Jac(R) = R$.

لم ۱.۱.۱۸. [18, 3.19] *فرض کنیم حلقه R موضعی با ایده‌آل ماکسیمال M باشد، در این صورت حلقه $R[[x_1, ..., x_n]]$ متشکل از سری های توانی صوری از مجهول‌های x_1، ...، x_n با ضریب های متعلق به R ، حلقه‌ای موضعی است و ایده‌آل ماکسیمال آن توسط مجموعه‌ی $M \cup \{x_1, ..., x_n\}$ تولید می‌شود.*

تعریف ۱.۱.۱۹. فرض کنیم $f : R \longrightarrow S$ همریختی حلقه‌ای باشد، نگاشت $f^* : \operatorname{Spec}(S) \longrightarrow \operatorname{Spec}(R)$، نگاشت وابسته به مجموعه‌ی ایده‌آل‌های اول حلقه‌های R و S است که برای هر $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(S)$، $f^*(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}^c$.

ملاحظه ۱.۱.۲۰. [18, 3.27(3)] *فرض کنیم N یک ایده‌آل ماکسیمال S باشد، در این صورت $f^*(N) \in \operatorname{Spec}(S)$ ولی الزاماً $f^*(N) \notin \operatorname{Max}(R)$.*

لم ۲۱.۱.۱. [18, 3.55] *فرض کنیم $\mathfrak{p}$ ایده‌آل اول R باشد و $I_۱$، ...، I_n ایده‌آل‌هایی از R باشند ، در این صورت گزاره‌های زیر معادلند.*

(۱) $۱ \leq j \leq n$ ای موجود است که $I_j \subseteq \mathfrak{p}$.

(۲) $\bigcap\limits_{i=۱}^{n} I_i \subseteq \mathfrak{p}$.

(۳) $\prod\limits_{i=۱}^{n} I_i \subseteq \mathfrak{p}$.

نتیجه ۲۲.۱.۱. [18, 3.56] *فرض کنیم $I_۱$، ...، I_n ایده‌آل‌هایی از R باشند و هم‌چنین $\mathfrak{p}$ ایده‌آل اول R باشد به طوری که $\mathfrak{p} = \bigcap\limits_{i=۱}^{n} I_i$، در این صورت jای موجود است که $۱ \leq j \leq n$ و $\mathfrak{p} = I_j$.*

لم ۲۳.۱.۱. [18, 3.60] *فرض کنیم $I_۱$، ...، I_n که $n \geq ۲$ ، ایده‌آل‌هایی از R باشند، در این صورت گزاره‌های زیر برقرارند.*

(۱) $f : R \longrightarrow \frac{R}{I_۱} \times ... \times \frac{R}{I_n}$ با ضابطه $f(r) = (r + I_۱, \dots, r + I_n)$ ، همریختی حلقه‌ای است؛

(۲) f یک به یک است اگر و تنها اگر $\bigcap\limits_{i=۱}^{n} I_i = ۰$ ؛

(۳) f پوشاست اگر و تنها اگر $(I_i)_{i=۱}^{n}$ خانواده‌ای از ایده‌آل‌های دو به دو متباین باشد.

قضیه ۲۴.۱.۱. [18, 3.61] *(اجتناب از ایده‌آل های اول) فرض کنیم $n \geq ۲$ و $\mathfrak{p}_۱$، ...، $\mathfrak{p}_n$ ایده‌آل‌هایی از حلقه R باشند که حداقل $(n - ۲)$ تا از ایده‌آل‌ها اول هستند، فرض کنیم S زیر گروهی از گروه جمعی R باشد که نسبت به ضرب بسته است (مثلاً ممکن است ایده‌آل و یا زیرحلقه‌ای از R باشد) فرض کنیم $S \subseteq \bigcup\limits_{i=۱}^{n} \mathfrak{p}_i$ در این صورت به ازای jای که $۱ \leq j \leq n$ ، $S \subseteq \mathfrak{p}_j$.*

تعریف ۲۵.۱.۱. حلقه‌ی موضعی و نوتری R با ماکسیمال $\mathfrak{m}$، موضعی منظم است هرگاه $\dim(R) = V\dim_k(\frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}^۲})$ که $k = \frac{R}{\mathfrak{m}}$. به عبارت دیگر حلقه‌ی $(R, \mathfrak{m})$ موضعی منظم است اگر و تنها اگر $\mathfrak{m}$ توسط $\dim(R)$ عضو تولید شود.

تعریف ۲۶.۱.۱. R-مدول G ساده نامیده می‌شود، هرگاه $G \neq ۰$ و تنها زیرمدول‌های G ، ۰ و G باشند.

نتیجه ۲۷.۱.۱. [18, 7.32] *G ، R-مدولی ساده است اگر و تنها اگر G با R-مدول $\frac{R}{\mathfrak{m}}$ ، یکریخت باشد که در آن $\mathfrak{m}$ ایده‌آل ماکسیمال R است.*

ملاحظه ۲۸.۱.۱. *فرض کنیم M یک R-مدول و $\mathfrak{a}$ ایده‌آلی از R باشد که $\mathfrak{a} \subseteq \mathrm{Ann}_R(M)$ در این صورت M با عمل ضرب اسکالر $(\mathfrak{a} + r)x = rx$ که $r \in R$ و $x \in M$ یک $\frac{R}{\mathfrak{a}}$-مدول نیز خواهد بود. یعنی ساختار R-مدولی M با ساختار $\frac{R}{\mathfrak{a}}$-مدولی M یکسان است . تحت این شرایط هر R-زیر مدول M یک $\frac{R}{\mathfrak{a}}$-زیر مدول M است و برعکس.*

تعریف ۲۹.۱.۱. فرض کنیم A و B دو حلقه (نه لزوماً جابه‌جایی) باشند، در این صورت M را یک (A, B)-دو مدول نامیم ، هرگاه M یک A-مدول چپ و یک B-مدول راست باشد و هم‌چنین برای هر $x \in M$ و $a \in A$ و $b \in B$ ، $a(xb) = (ax)b$ در این صورت اگر N یک A-مدول راست باشد، $N \otimes_A M$ ساختار B-مدولی با ضرب اسکالر زیر دارد $\sum_{i=1}^{t} b' x_i \otimes y_i = \sum_{i=1}^{t} x_i \otimes y_i .b'$. هم‌چنین برای A-مدول چپ N ، $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ ، B-مدول است.

لم ۳۰.۱.۱. [18, 6.6] *فرض کنیم $f : R \longrightarrow S$ همریختی حلقه‌ای و M یک S-مدول باشد، در این صورت M با ضرب اسکالر*

$$R \times M \longrightarrow M$$

$$(r, m) \longmapsto f(r)m$$

R-مدول است. در این حالت گوییم M با تحدید اسکالرها تحت همریختی f ، به عنوان R-مدول در نظر گرفته می‌شود.

نتیجه ۳۱.۱.۱. *فرض کنیم $f : R \longrightarrow S$ همریختی حلقه‌ای و $g : M \longrightarrow N$ همریختی S-مدولی باشد در این صورت g تبدیل به همریختی R-مدولی می‌شود.*

برهان. M و N هر دو S-مدول هستند که تحت همریختی f تبدیل به R-مدول می‌شوند پس $rm := f(r)m$ و $rn := f(r)n$، لذا داریم

$$g(rm) = g(f(r)m) = f(r)g(m) = rg(m).$$

□

لم ۳۲.۱.۱. [18, 6.30] *فرض کنیم R' و R'' ، R-جبرهای جابه‌جایی باشند و $\psi : R' \longrightarrow R''$ را همریختی حلقه‌ای در نظر می‌گیریم، در این صورت ψ همریختی R-جبری است اگر و تنها اگر ψ همریختی R-مدولی باشد.*

قضیه ۳۳.۱.۱. [18, 6.57] *فرض کنیم M یک R-مدول باشد، در این صورت M تصویر همریخت R-مدول آزادی مانند F است و اگر M با تولید متناهی باشد و با n عضو تولید شود می‌توان F را R-مدولی آزاد با پایه‌ای n عضوی در نظر گرفت.*

لم ۳۴.۱.۱. [18, 7.18] *فرض کنیم M یک R-مدول باشد. در این صورت M نوتری است اگر و تنها اگر هر زیرمدول M با تولید متناهی باشد.*

نتیجه ۳۵.۱.۱. *حلقه R نوتری است اگر و تنها اگر هر ایده‌آل آن با تولید متناهی باشد.*

لم ۳۶.۱.۱. [18, 7.14] *فرض کنیم M یک R-مدول باشد، در این صورت اگر M نوتری باشد هر زیر مدول و هر مدول خارج قسمتی آن نیز نوتری است.*

لم ۳۷.۱.۱. [18, 7.22] *اگر R یک حلقه نوتری باشد، آن‌گاه هر R-مدول با تولید متناهی نوتری است.*

ملاحظه ۳۸.۱.۱. [18, 7.26] *فرض کنیم M یک R-مدول باشد در این صورت M به عنوان R-مدول نوتری است اگر و تنها اگر به عنوان $\frac{R}{I}$-مدول نوتری باشد که $I \subseteq \mathrm{Ann}(M)$.*

قضیه ۳۹.۱.۱. [16, 2.75] *برای حلقه‌های B و A و مدول‌های M_A و ${}_AN_B$ و ${}_BL$ داریم*

$$\mathrm{Hom}_B(M \otimes_A N, L) \cong \mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_B(N, L)).$$

قضیه ۴۰.۱.۱. [16, 2.30,2.31] *فرض کنیم $(N_i)_{i\in I}$ خانواده ای ناتهی از R-مدول‌ها باشد ، در این صورت برای هر R-مدول M داریم*

$$\mathrm{Hom}_R(M, \prod_{i\in I} N_i) \cong \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_R(M, N_i).$$
$$\mathrm{Hom}_R(\oplus_{i\in I} N_i, M) \cong \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_R(N_i, M).$$

اگر I متناهی باشد،

$$\mathrm{Hom}_R(M, \oplus_{i\in I} N_i) \cong \oplus_{i\in I} \mathrm{Hom}_R(M, N_i).$$

تعریف ۴۱.۱.۱. فرض کنیم A و B دو رسته دل‌خواه از R-مدول‌ها و R-همریختی‌ها باشد باشند و $F : A \longrightarrow B$ را فانکتور همورد (پادورد) در نظر می‌گیریم در این صورت

(۱) F دقیق چپ نامیده می‌شود، هرگاه برای هر دنباله دقیق $G \xrightarrow{g} N \xrightarrow{f} M \longrightarrow \circ$ ($\circ \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} G$) در A، دنباله‌ی

$$\circ \longrightarrow F(M) \xrightarrow{F(f)} F(N) \xrightarrow{F(g)} F(G)$$

در B دقیق باشد؛

(۲) F دقیق راست نامیده می‌شود هرگاه برای هر دنباله دقیق $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} G \longrightarrow \circ$ ($\circ \longrightarrow G \xrightarrow{g} N \xrightarrow{f} M$) در A، دنباله‌ی

$$F(M) \xrightarrow{F(f)} F(N) \xrightarrow{F(g)} F(G) \longrightarrow \circ$$

در B دقیق باشد؛

(۳) F را دقیق گوییم هرگاه هم دقیق راست و هم دقیق چپ باشد.

مثال ۴۲.۱.۱. فانکتور همورد $\mathrm{Hom}_R(M, -)$ ، دقیق چپ و فانکتور پادورد $\mathrm{Hom}_R(-, M)$ دقیق چپ است. هم‌چنین فانکتورهای همورد $- \otimes_R M, M \otimes_R -$ دقیق راست هستند.

قضیه ۴۳.۱.۱. *فرض کنیم R و S دو حلقه باشند و F فانکتوری باشد از رسته‌ی R-مدول‌ها به رسته‌ی S-مدول‌ها، در این صورت*

(۱) *اگر F همورد(پادورد) و دقیق راست باشد، آن‌گاه F هر R-همریختی پوشا(یک به یک) را به یک S-همریختی پوشا می‌نگارد؛*

(۲) *اگر F همورد(پادورد) و دقیق چپ باشد، آن‌گاه F هر R-همریختی یک به یک(پوشا) را به یک S-همریختی یک به یک می‌نگارد؛*

برهان. (۱) F همورد است و $f : A \longrightarrow B$ را یک R-همریختی پوشا در نظر می‌گیریم، دنباله دقیق $0 \longrightarrow \operatorname{Ker} f \xrightarrow{i} A \xrightarrow{f} B \longrightarrow 0$، از R-مدول‌ها و R-همریختی‌ها، دنباله دقیق زیر از S-مدول‌ها و S-همریختی‌ها را القا می‌کند.

$$F(\operatorname{Ker} f) \xrightarrow{F(i)} F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B) \longrightarrow 0$$

به ویژه $F(f)$ یک S-همریختی پوشاست.

حال فرض کنیم F پادورد باشد و $f : A \longrightarrow B$ یک R-همریختی یک به یک است. در این صورت دنباله دقیق $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{\pi} \frac{B}{Imf} \longrightarrow 0$ از R-مدول‌ها و R-همریختی‌ها، دنباله دقیق

$$F(\frac{B}{Imf}) \xrightarrow{F(\pi)} F(B) \xrightarrow{F(f)} F(A) \longrightarrow 0$$

از S-مدول‌ها و S-همریختی‌ها را القا می‌کند، به‌ویژه $F(f)$ پوشاست.

(۲) مشابه (۱) اثبات می‌شود. □

تعریف ۴۴.۱.۱. فرض کنیم R و S دو حلقه باشند و F فانکتوری باشد از رسته‌ی R-مدول‌ها به رسته‌ی S-مدول‌ها، در این صورت

(۱) F همورد (پادورد) و دقیق راست است هرگاه F هر دنباله دقیق و کوتاه

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0 (0 \longrightarrow C \xrightarrow{g} B \xrightarrow{f} A \longrightarrow 0)$$

از R-مدول‌ها و R-همریختی‌ها، دنباله دقیق $F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B) \xrightarrow{F(g)} F(C) \longrightarrow 0$ از S-مدول‌ها و S-همریختی‌ها را القا کند.

(۲) F همورد (پادورد) و دقیق چپ است، هرگاه F هر دنباله‌ی دقیق و کوتاه

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0 (0 \longrightarrow C \xrightarrow{g} B \xrightarrow{f} A \longrightarrow 0)$$

از R-مدول‌ها و R-همریختی‌ها دنباله‌ی دقیق $F(C) \overset{F(g)}{\longrightarrow} F(B) \overset{F(f)}{\longrightarrow} F(A) \longrightarrow 0$ از S-مدول‌ها و S-همریختی‌ها را القا کند.

(۳) F همورد (پادورد) و دقیق است، هرگاه F هر دنباله دقیق و کوتاه از R-مدول‌ها و R-همریختی‌ها مانند $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ ($0 \longrightarrow C \xrightarrow{g} B \xrightarrow{f} A \longrightarrow 0$) دنباله‌ی دقیق

$$0 \longrightarrow F(A) \overset{F(f)}{\longrightarrow} F(B) \overset{F(g)}{\longrightarrow} F(C) \longrightarrow 0$$

را از S-مدول‌ها و S-همریختی‌ها را القا کند.

قضیه ۴۵.۱.۱. [16, 2.65] *فرض کنیم A یک R-مدول و $(B_i)_{i\in I}$ خانواده ای از R-مدول‌ها باشد، در این صورت همریختی $\tau : A \otimes_R (\underset{i\in I}{\oplus} B_i) \longrightarrow \underset{i\in I}{\oplus} (A \otimes_R B_i)$ با ضابطه $\tau(a \otimes (b_i)) = (a \otimes b_i)$، یکریختی است.*

گزاره ۴۶.۱.۱. [16, 2.70] *فرض کنیم دیاگرام جابه جایی زیر با سطرهای دقیق داده شده است.*

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[r] \arrow[d, "f"] & A \arrow[r] \arrow[d, "g"] & A'' \arrow[r] \arrow[d, dotted, "h"] & 0 \\
B' \arrow[r] & B \arrow[r] & B'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

در این صورت همریختی یکتای $h : A'' \longrightarrow B''$ موجود است به طوری که دیاگرام فوق را کامل و جابه‌جایی می‌سازد. اگر f و g یکریختی باشند، آن‌گاه h یکریختی است.

گزاره ۴۷.۱.۱. [16, 2.71] *فرض کنیم دیاگرام جابه جایی زیر با سطرهای دقیق داده شده است.*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A' \arrow[r] \arrow[d, dotted, "g"] & A \arrow[r] \arrow[d, "f"] & A'' \arrow[d, "h"] \\
0 \arrow[r] & B' \arrow[r] & B \arrow[r] & B''
\end{tikzcd}$$

در این صورت همریختی یکتای $g : A' \longrightarrow B'$ موجود است به طوری که دیاگرام فوق را کامل و جابه‌جایی می سازد. اگر f و h یکریختی باشند، آن‌گاه g یکریختی است.

قضیه ۴۸.۱.۱. *فرض کنیم M یک R-مدول و I ایده‌آلی از R باشد، در این صورت*

(۱) $R \otimes_R M \cong M$.

(۲) $\mathrm{Hom}_R(R, M) \cong M$.

(۳) $\frac{R}{I} \otimes_R M \cong \frac{M}{IM}$.

تعریف ۴۹.۱.۱. فرض کنیم $(R, \mathfrak{m})$ و $(S, \mathfrak{n})$ دو حلقه‌ی موضعی باشند، همریختی $f : R \longrightarrow S$ موضعی نامیده می‌شود، هرگاه $f(\mathfrak{m}) \subseteq \mathfrak{n}$.

تعریف ۵۰.۱.۱. گوییم R-مدول M، با نمایش متناهی است، هرگاه دنباله زیر دقیق باشد که در آن F و G هر دو R-مدول آزادند و می‌توان $G = R^m$ و $F = R^n$ در نظر گرفت که $m, n \in \mathbb{N}$.

$$G \longrightarrow F \longrightarrow M \longrightarrow \circ$$

لم ۵۱.۱.۱. [16, 3.19] *در هر حلقه نوتری R، هرگاه M یک R-مدول با تولید متناهی باشد، آن‌گاه M، نمایش متناهی دارد.*

لم ۵۲.۱.۱. *برای هر ایده‌آل I از R و هر R-مدول M،* $\mathrm{Hom}_R(\frac{R}{I}, M) \cong (\circ :_M I)$.

۲.۱ حلقه و مدول کسرها

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنیم R یک حلقه و $S \subseteq R$ زیر مجموعه‌ی بسته ضربی از R باشد. در $R \times S$ نسبت $\sim$ را چنین تعریف می‌کنیم

$$(a_۱, s_۱) \sim (a_۲, s_۲) \Longleftrightarrow \exists t \in S \ : \ t(s_۲a_۱ - s_۱a_۲) = \circ.$$

$\sim$ یک رابطه هم ارزی در $R \times S$ است و هم‌چنین $S^{-۱}R$ را گردایه‌ی تمام کلاس های هم ارزی در $R \times S$ نسبت به $\sim$ تعریف می‌کنیم. $S^{-۱}R$ با دو عمل جمع و ضرب زیر یک حلقه جابه‌جایی و یکدار است.

$$\frac{a_۱}{s_۱} + \frac{a_۲}{s_۲} := \frac{s_۲a_۱ + s_۱a_۲}{s_۱s_۲}$$
$$\frac{a_۱}{s_۱} \cdot \frac{a_۲}{s_۲} := \frac{a_۱a_۲}{s_۱s_۲}$$

$S^{-۱}R$ را حلقه‌ی کسرهای R نسبت به S گوییم.

گزاره ۲.۲.۱. *فرض کنیم $S = R \setminus \mathfrak{p}$ که $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$، در این صورت $S^{-۱}R$ را با $R_\mathfrak{p}$ نشان می‌دهیم. $R_\mathfrak{p}$ یک حلقه موضعی است که ایده‌آل ماکسیمال آن به صورت زیر است*

$$\mathfrak{p}R_\mathfrak{p} := \{\lambda \in R_\mathfrak{p} \mid \text{که می‌توان } \lambda \text{ را به صورت } \lambda = \frac{a}{s} \text{ نوشت که در آن } a \in \mathfrak{p} \text{ و } s \in S\}.$$

تعریف ۳.۲.۱. فرض کنیم M یک R-مدول و $S \subseteq R$ بسته ضربی باشد. در مجموعه‌ی $M \times S$، رابطه‌ی $\sim$ را چنین تعریف می‌کنیم

$$(m, s) \sim (m', s') \Longleftrightarrow \exists t \in S \ \ : \ \ t(s'm - sm') = \circ.$$

$\sim$ یک رابطه هم ارزی در $M \times S$ است و $S^{-۱}M$ را گردایه‌ی تمام کلاس‌های هم ارزی $M \times S$ با رابطه‌ی $\sim$ تعریف می‌کنیم. با دو عمل زیر $S^{-۱}M$ یک $S^{-۱}R$-مدول است.

$$\frac{m_۱}{s_۱} + \frac{m_۲}{s_۲} := \frac{s_۲m_۱ + s_۱m_۲}{s_۱s_۲}$$

$$\frac{a}{s}\cdot\frac{m}{t}:=\frac{am}{st}\ (\frac{a}{s}\in S^{-1}R)$$

همچنین $S^{-1}M$ تحت همریختی طبیعی $\varphi: R\longrightarrow S^{-1}R$ یک R-مدول نیز است.

قضیه ۴.۲.۱. *فرض کنیم R یک حلقه و $S\subseteq R$ بسته ضربی و J ایده‌آلی از R باشد، در این صورت*

(۱) $S^{-1}J=J^e$؛

(۲) *فرض کنیم $\mathfrak{p}\in\operatorname{Spec}(R)$ و $\mathfrak{p}\cap S=\varnothing$ اگر $\lambda\in S^{-1}\mathfrak{p}$ آن‌گاه از هر عبارت به صورت $\lambda=\frac{a}{s}$ (به طوری که $a\in R$ و $s\in S$) نتیجه می‌شود که $a\in\mathfrak{p}$؛*

(۳) *اگر $\mathfrak{p}\in\operatorname{Spec}(R)$ و $\mathfrak{p}\cap S=\varnothing$ آن‌گاه $S^{-1}\mathfrak{p}\in\operatorname{Spec}(S^{-1}R)$ و به‌علاوه $\mathfrak{p}^{ec}=\mathfrak{p}$؛*

(۴) *برای هر ایده‌آل مانند τ از $S^{-1}R$، $\tau=\tau^{ce}$؛*

(۵) $J^e=S^{-1}R$ *اگر و تنها اگر* $J\cap S\neq\varnothing$؛

(۶) *تناظری دوسویی وحافظ جزئیت بین ایده‌آل‌های اول حلقه R که با S اشتراک ندارند و ایده‌آل‌های اول حلقه $S^{-1}R$ برقرار است.*

بنابراین اگر $\mathfrak{q}\in\operatorname{Spec}(S^{-1}R)$، آن‌گاه $\mathfrak{p}$ به طور یکتا عضو $\operatorname{Spec}(R)$ موجود است که $\mathfrak{p}\cap S=\varnothing$ و $\mathfrak{q}=S^{-1}\mathfrak{p}$.

نتیجه ۵.۲.۱. *فرض کنیم $\mathfrak{p}\in\operatorname{Spec}(R)$، در این صورت تناظری دوسویی و حافظ جزئیت بین دو مجموعه‌ی $\{\mathfrak{q}\in\operatorname{Spec}(R)\mid\mathfrak{q}\subseteq\mathfrak{p}\}$ و $\operatorname{Spec}(R_\mathfrak{p})$ وجود دارد.*

تعریف ۶.۲.۱. فرض کنیم $S=R\setminus Z(R)$ در این صورت $Q:=S^{-1}R$، حلقه خارج قسمتی کلی R نامیده می‌شود.

قضیه ۷.۲.۱. [18, 5.10] *فرض کنیم S زیرمجموعه‌ی بسته ضربی از R و همریختی $f:R\longrightarrow S^{-1}R$ همریختی حلقه‌ای طبیعی باشد. همچنین R' نیز حلقه‌ای جابه‌جایی و $g:R\longrightarrow R'$ یک همریختی حلقه‌ای باشد به طوری که برای هر $s\in S$، $g(s)$ عضوی یکال از R' است. در این صورت همریختی حلقه‌ای یکتایی چون $h:S^{-1}R\longrightarrow R'$ موجود است به طوری که $hof=g$. در واقع برای هر $a\in R$ و $s\in S$،*

$$h(\frac{a}{s})=g(a)(g(s))^{-1}.$$

قضیه ۸.۲.۱. *فرض کنیم $g:R\longrightarrow R'$ همریختی حلقه‌ای و S زیر مجموعه‌ی بسته ضربی از R باشد و به‌علاوه داشته باشیم*

(آ) *برای هر $s\in S$، $g(s)$ در R'، یکال باشد؛*

(ب) *برای هر a از R، اگر $g(a)=0$ آن‌گاه $t\in S$ ای موجود باشد به طوری که $ta=0$؛*

(پ) هر عضو R' نمایشی به صورت $g(a)(g(s))^{-1}$ داشته باشد که $a \in R$ و $s \in S$؛

در این صورت یکریختی یکتایی از $S^{-1}R$ به R' موجود است به طوری که دیاگرام زیر را جابه جایی می‌سازد.

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & S^{-1}R \arrow[dl, "h"] \\ R' & \end{tikzcd}$$

قضیه ۹.۲.۱. [18, 5.26] *فرض کنیم R حلقه نوتری باشد در این صورت $S^{-1}R$ نیز حلقه‌ای نوتری است.*

قضیه ۱۰.۲.۱. [16, 4.84] *فرض کنیم A و B دو R-مدول باشند، در این صورت همریختی طبیعی*

$$f : S^{-1}(B \otimes_R A) \longrightarrow S^{-1}B \otimes_{S^{-1}R} S^{-1}A$$

یکریختی است.

قضیه ۱۱.۲.۱. *فرض کنیم M یک R-مدول باشد و S زیر مجموعه بسته ضربی از R در این صورت*

$$S^{-1}M \cong S^{-1}R \otimes_R M.$$

تعریف ۱۲.۲.۱. فرض کنیم M یک R-مدول باشد در این صورت محمل M را با نماد $\mathrm{Supp}_R(M)$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\mathrm{Supp}_R(M) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \mid M_\mathfrak{p} \neq 0\}.$$

گزاره ۱۳.۲.۱. [18, 9.15] *فرض کنیم M یک R-مدول باشد در این صورت گزاره‌های زیر معادلند.*

(۱) $M = 0$.

(۲) *برای هر* $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$، $M_\mathfrak{p} = 0$، *یعنی* $\mathrm{Supp}_R(M) = \varnothing$.

(۳) *برای هر* $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R)$، $M_\mathfrak{m} = 0$.

نتیجه ۱۴.۲.۱. [18, 9.16,9.17] *فرض کنیم M و N دو R-مدول باشند در این صورت گزاره‌های زیر معادلند.*

(۱) *همریختی* $f : M \longrightarrow N$ *یک به یک (پوشا) است.*

(۲) *برای هر* $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$، *همریختی* $f_\mathfrak{p} : M_\mathfrak{p} \longrightarrow N_\mathfrak{p}$ *یک به یک (پوشا) است.*

(۳) *برای هر* $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R)$، *همریختی* $f_\mathfrak{m} : M_\mathfrak{m} \longrightarrow N_\mathfrak{m}$ *یک به یک (پوشا) است.*

لم ۱۵.۲.۱. [13, 4.5] *اگر $0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$ یک دنباله دقیق و کوتاه از R-مدول‌ها و R-همریختی‌ها و S زیرمجموعه‌ی بسته ضربی از R باشد، آن‌گاه $0 \longrightarrow S^{-1}L \longrightarrow S^{-1}M \longrightarrow S^{-1}N \longrightarrow 0$ دنباله دقیق از $S^{-1}R$-مدول‌هاست.*

لم ۱۶.۲.۱. [13, corollary 3,p.24] *اگر T و S دو زیرمجموعه‌ی بسته ضربی از R باشند، که $S \subseteq T$ و T'، تصویر T در $S^{-1}R$ باشد، در این صورت*

$$(T')^{-1}(S^{-1}R) \cong T^{-1}R$$

لم ۱۷.۲.۱. *اگر R حلقه موضعی باشد، آن‌گاه $R \cong R_{\mathfrak{m}}$.*

برهان. همریختی طبیعی $\psi : R \longrightarrow R_m$ را در نظر می‌گیریم نشان می‌دهیم ψ یکریختی است.

فرض کنیم $r \in R$ به طوری که $\psi(r) = 0$. لذا $\frac{r}{1} = 0$ بنابراین $t \in R \setminus \mathfrak{m}$ موجود است که $tr = 0$ حال بنابر لم ۱۳.۱.۱، t در R یکال است ، پس $r = 0$. یعنی ψ یک به یک است. حال فرض کنیم $\frac{r'}{s'} \in R_{\mathfrak{m}}$ لذا $s' \notin \mathfrak{m}$، پس $\frac{s'^{-1}r'}{1} = \frac{r'}{s'}$. لذا $\psi(s'^{-1}r') = \frac{r'}{s'}$، پس ψ پوشاست. □

تعریف ۱۸.۲.۱. *[9, p.118]* حلقه نوتری R، منظم است اگر و تنها اگر برای هر $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R)$ ، $R_{\mathfrak{m}}$، منظم باشد.

لم ۱۹.۲.۱. *فرض کنیم $S \subseteq R$ بسته ضربی باشد، در این صورت $S^{-1}R \otimes_R S^{-1}R \cong S^{-1}R$.*

برهان. همریختی $\varphi : S^{-1}R \otimes_R S^{-1}R \longrightarrow S^{-1}R$ با ضابطه $\varphi(\frac{r}{w} \otimes \frac{r'}{w'}) = \frac{rr'}{ww'}$ خوش‌تعریف است. به‌وضوح φ یک همریختی $S^{-1}R$- مدولی است. نشان می‌دهیم φ یک به یک و پوشاست.

فرض کنیم $\frac{r}{w} \in S^{-1}R$ لذا $\varphi(\frac{w}{w} \otimes \frac{r}{w}) = \frac{rw}{ww} = \frac{r}{w}$ بنابراین φ پوشاست.

$\sum\limits_{i=1}^{n}(\frac{r_i}{s_i} \otimes \frac{r'_i}{s'_i})$ را عضوی دلخواه از $S^{-1}R \otimes_R S^{-1}R$ در نظر می‌گیریم، با فرض $s = \prod\limits_{i=1}^{n} s_i$ ، $t_i = \prod\limits_{j=1, j\neq i}^{n} s_j$ داریم

$$\sum_{i=1}^{n}(\frac{r_i}{s_i} \otimes \frac{r'_i}{s'_i}) = \sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{s_i} \otimes \frac{r_ir'_i}{s'_i}) = \sum_{i=1}^{n}(\frac{t_i}{s} \otimes \frac{r_ir'_i}{s'_i}) = \sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{s} \otimes \frac{t_ir_ir'_i}{s'_i}) = \frac{1}{s} \otimes \sum_{i=1}^{n} \frac{t_ir_ir'_i}{s'_i}$$

قرار می‌دهیم $\frac{r}{u} = \sum \frac{t_ir_ir'_i}{s'_i}$ لذا هر عضو $S^{-1}R \otimes_R S^{-1}R$ را می‌توان به فرم زیر نوشت

$$\frac{1}{s} \otimes \frac{r}{u}.$$

حال نشان می‌دهیم φ یک به یک است.

فرض کنیم $\varphi(\frac{1}{s} \otimes \frac{r}{u}) = 0$ در این صورت $\frac{r}{su} = 0$. لذا $u_1 \in S$ موجود است که $u_1 r = 0$ لذا $\frac{r}{u} = 0$ درنتیجه $\frac{1}{s} \otimes \frac{r}{u} = 0$. □

۳.۱ تجزیه اولیه ایده‌آل ها و مدول‌ها

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنیم $\mathfrak{q}$ ایده‌آلی از حلقه R باشد، $\mathfrak{q}$ یک ایده‌آل اولیه نامیده می‌شود اگر