بسم الله الرحمن الرحيم

۱۳۸۲ /۵/ ۲۷

به نام خدا

مرکز اطلاعات و مدارک علمی ایران
تهیه مدارک

دانشکده ریاضی

رده بندی گروهها بر اساس مجموع درجات سرشتهای تحویل ناپذیر آنها

مهرک باقرنژاد

پایان نامه کارشناسی ارشد

در رشته

ریاضی محض

استاد راهنما : دکتر زهره مستقیم

آبانماه ۱۳۸۰

۴۸۰۳۹

چکیده

دراین پایان نامه ابتدا $\delta_o(G,H)$ را تعریف می کنیم و سپس براساس مقادیر کوچک $\delta_o(G,H)$ گروهها را رده بندی می کنیم . به همین منظور به بررسی دو قضیه برای $\delta_o(G,H)=1$ و $\delta_o(G,H)=2$ می پردازیم . همچنین در مثالهایی $\delta_o(G,H)$ را برای بعضی گروهها بدست می آوریم . در نهایت به معرفی $\delta^*(G,H)$ پرداخته و شرط لازم و کافی برای $\delta^*(G,H)=0$ را بدست می آوریم .

سپاسگزاری

با سپاس و قدر دانی فراوان از سرکار خانم دکتر زهره مستقیم استاد ارجمند که از راهنماییهای خالصانه ایشان در انجام این تحقیق بهره مند شدم و پیشنویس رساله را به دقت مورد بررسی قرار داده و نظرات ارزشمندی جهت تصحیح و بهبود آن ابراز داشتند . ونیز از جناب آقایان دکتر علاییان و دکتر تولایی که در نشست بررسی این پایان نامه شرکت نمودند مراتب سپاس را ابراز می نمایم .

بر خود لازم میدانم از سرکار خانم یوسفی و کلیه دوستان در دانشکده ریاضی دانشگاه علم وصنعت ایران که همواره و بخصوص در مراحل انجام این رساله از همکاریهای بیدریغشان بر خوردار بودم صمیمانه تشکر نمایم .

فهرست مطالب

مقدمه

نظریه نمایش گروهها و به موازات آن نظریه سرشتها نقش مهمی در مطالعه گروههای متناهی ایفا، می کنند . نظریه نمایش راههای مختلف نمایش یک گروه به عنوان گروهی از ماتریسها را مورد بررسی قرار می دهد .

نمایش مختلط و سرشتهای متناظر با آنها اولین بار در اواخر قرن نوردهم میلادی توسط فروبنیوس در ضمن بررسی گروههای جایگشتی و جبرهای ماتریسی مطرح گردید .

زیبایی این نظریه از یک جهت و نقش کلیدی آن در اثبات برخی از قضایای گروههای متناهی بر اهمیت آن می افزاید . یک مثال برجسته از نظریه نمایش در گروههای متناهی ، قضیه برنساید است این قضیه بیان می کند ، هر گروه از مرتبهٔ $p^a q^b$ ، برای اعداد اول و متمایز p,q حل پذیر است .

یکی از مباحث مورد مطالعه در نظریه نمایش مسائل مربوط به درجه سرشتها است . افراد زیادی از جمله برکویچ و من(mann)در این زمینه فعالیت دارند و مقالاتی را به چاپ رسانده اند . این رساله یکی از این مقالات را که در مورد مجموع درجات سرشتهای تحویل ناپذیر است بررسی می کند .

به همین منظور مجموع درجات سرشتهای تحویل ناپذیر یک گروه G را با $T(G)$ نشان می دهیم و برای $H < G$, $\delta(G,H)=T(G)-T(H)$ تعریف می کنیم .

فصل اول به مطالب و مفاهیمی که در سراسر رساله استفاده شده است اختصــاص دارد.

در فصل دوم برای $H < G$ ، $\delta_o(G,H)$ را تعریف کرده و زوجهای (H,G) بـرای $\delta_o(G,H)$ کوچک را بررسی مـی کنیـم و در فصـل سـوم بطـور خـاص p - گروهــها را مورد مطالعه قرار می دهیم .

فصل اول

مفاهیم اصلی

این فصل به مفاهیم و قضایایی که در فصول بعد نیاز داریم اختصاص دارد و به همین منظور در بخش اول این فصل به طور اجمالی بـه تعـاریف بعضـی گروهـها و سـپس قضایایی در مورد گروهها می پردازیم . بخش دوم نیز بــه بیـان مفـاهیم و قضایـای نظریه نمایش گروهها اختصاص دارد .

در این فصل کلیه قضایارا بدون برهان آورده ایم و خواننـده میتوانـد بـرای برهـان قضایا به [٤] و [۵] و [۷] و [۸] مراجعه کند .

بخش ۱-۱ مثالهایی از گروهها

تعریف ۱-۱-۱:گروه کواترنیون تعمیم یافته $Q(2^n)$ از مرتبه 2^n عبارت است از

$$Q(2^n)=\left\langle x,y \middle| x^{2^{n-1}}=1 \quad ,y^2=x^{2^{n-2}},y^{-1}xy=x^{-1}\right\rangle$$

همچنین گروه دو وجهی $D(2m)$ از مرتبه $2m$ عبارت است از

$$D(2m)=\left\langle x,y \middle| x^2=y^m=1 \quad ,x^{-1}yx=y^{-1}\right\rangle$$

و گروه نیم دو وجهی $SD(2n)$ از مرتبه 2^n عبارت است از

$$SD(2^n)=\left\langle x,y \middle| x^2=y^{2^{n-1}}=1 \quad ,x^{-1}yx=y^{2^{n-2}-1}\right\rangle$$

و نیز $C(m)$ گروه دوری از مرتبه m و $E(p^n)$ گروه آبلی مقدماتی از مرتبه p^n است .

تعریف ۲-۱-۱: فرض کنیم $H \subseteq G$ و $1<H<G$. اگر به ازای هر $g \in G-H$ داشته باشیم $H \cap H^{g} = 1$ آنگاه H را مکمل فرو بنیوس در G می گویند . اگر گروهی شامل یک مکمل فروبنیوس باشد گروه فروبنیوس نامیده میشود .

قضیه ۳-۱-۱: اگر G یک گروه فروبنیوس با مکمل H باشد آنگاه زیر گروهی از G مانند L وجود دارد که $H \cap L = 1, HL = G, L \lhd G$.

L را هسته گروه فروبنیوس G می گویند . گروه فروبنیوس G با هسته L و مکمل H را بصورت $G=(H,L)$ نمایش میدهند .

قضیه ٤-۱-۱: اگر $|G| = p^{\alpha}m$, $(p,m)=1$ (p عددی اول) در این صورت

الف) G یک زیر گروه از مرتبه p^{α} دارد که آنرا زیر گروه p سیلوی G می نامیم.

ب) هر دو p سیلو زیر گروههای G مزدوجند .

ج) تعداد p سیلو زیر گروههای G ، $1+kp$ است که $1+kp \mid |G|$.

مجموعه زیر گروههای p سیلوی G را با $Syl_p(G)$ نشان می دهند .

تعریف ۵-۱-۱: میگوییم G ، L را به عنوان p - مکمل نرمال خود دارد اگر $L \lhd G$, $(|L|,p)=1$, $G=LT$ و T یک زیر گروه p سیلوی G باشد .

قضیه ۶-۱-۱: گروه G را حل پذیر گوییم هرگاه عدد صحیح نا منفی n وجود داشته باشد بطوریکه $D_n(G)=\{1\}$ که در آن

$$D_o(G)=G \quad , \quad D_1(G)=[G,G] \ , \ D_i(G)=[D_{i-1}(G),D_{i-1}(G)] \qquad i>1$$

قضیه ۷-۱-۱: هر p گروه متناهی حل پذیر است .

قضیه ۸-۱-۱: اگر G یک گروه از مرتبه $p^{\alpha}q^{\beta}$ (p,q اعداد اول) باشد در اینصورت

G حل پذیر است .

قضیه ۹-۱-۱: فرض کنیم G یک گروه باشد . در این صورت G حل پذیر است اگر و تنها اگر دارای سری زیر نرمالی باشد که در آن هر سازه نرمال گروهی آبلی است . یعنی

$$G_o = \{1\} \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq G_2 \trianglelefteq \dots \trianglelefteq G_n = G$$

که $G_i \lhd G_{i+1}$ و $\frac{G_{i+1}}{G_i}$ ، $(0 \le i \le n-1)$ آبلی باشد .

تعریف ۱۰-۱-۱: یک سری مرکزی برای گروه G عبارت است از سری نرمال

$$G_o = \{1\} \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq G_2 \trianglelefteq \dots \trianglelefteq G_n = G$$

که در آن $G_i \lhd G$ برای $0 \le i \le n$ و $\frac{G_{i+1}}{G_i} \le Z\left(\frac{G}{G_i}\right)$ ، $(0 \le i \le n-1)$. اگر گروه G دارای سری مرکزی باشد G را یک گروه پوچتوان گوییم .

قضیه۱۱-۱-۱: هر p گروه متناهی G ،گروهی پوچتوان است.

لم ۱۲-۱-۱ :اگر G گروهی پوچتوان باشد انگاه هر زیر گروه ماکزیمال G زیر گروهی نرمال در G است .

تعریف ۱۳-۱-۱: یک گروه G از مرتبه p^n یک گروه از کلاس ماکزیمال گفته می شود اکر کلاس پوچتوانی اش $n-1$ باشد . به عبارت دیگر اگر n کوچکترین عدد صحیح باشد بطوریکه $L_n(G) = 1$ که در آن

$$L_1(G) = G \quad , L_i(G) = [L_{i-1}(G), G] \qquad 1 < i \le n$$

در این حالت می نویسیم

$$CL(G) = n-1$$

قضیه ۱-۱-۱۴: فرض کنیم G یک p گروه متناهی باشد . اگر G شامل عضوی مانند x باشد بطوریکه $|C_G(x)| = p^۲$ آنگاه G یک گروه از کلاس ماکزیمال است .

قضیه ۱-۱-۱۵: فرض کنیم P یک ۲- گروه آبلی از مرتبه ۲^n باشد بطوریکه یا $CL(P) = n-۱$ یا $\left|\frac{P}{P'}\right| = ۴$ آنگاه

$P \cong SD(۲^m)$ یا $P \cong D(۲^m)$ یا $P \cong Q(۲^m)$

قضیه ۱-۱-۱۶: تنها ۲- گروه از کلاس ماکزیمال که یک خود ریختی غیر همانی از مرتبه فرد دارد $Q(۸)$ است .

تعریف ۱-۱-۱۷: فرض کنیم α یک خود ریختی گروه H باشد و از $\alpha(h) = h$ نتیجه شود $h = ۱$ در این صورت گوییم α یک خود ریختی بدون نقطه ثابت است .

لم ۱-۱-۱۸: اگر α یک خود ریختی بدون نقطه ثابت G از مرتبه ۲ باشد آنگاه G آبلی است و

$$\alpha(x) = x^{-۱} \qquad \forall x \in G$$

تعریف ۱-۱-۱۹: فرض کنیم H و K دو گروه دلخواه باشند فرض کنیم

$$\varphi : H \to AUT(K)$$

یک همریختی باشد. در مجموعه $H \times K$ عمل دوتایی را به صورت زیر تعریف میکنیم :

$$(h_۱, k_۱)(h_۲, k_۲) = (h_۱h_۲, (k_۱\varphi_{h_۲})k_۲)$$

می توان نشان داد که $H \times K$ با عمل فوق تشکیل یک گروه می دهد .

گروه فوق را حاصل ضرب نیم مستقیم H و K با عمل φ می نامند و با $K \times_\varphi H$

نشان می دهند.

قضیه ۲۰-۱-۱: فرض کنیم گروه G زیر گروه نرمال مانند N و زیر گروهی مـانند M داشته باشد بطوریکه

$$G = MN, M \cap N = \{1\}$$

در این صورت همریختی مانند $\varphi : M \to AUT(N)$ وجود دارد که

$$G = n \times_{\varphi} m$$

N را هسته حاصل ضرب نیم مستقیم گویند .

تعریف ۲۱-۱-۱: گروه G را ابر حل پذیر گوییم هرگاه دارای سری نرمال باشد کـه در آن هر سازه نرمال ، گروهی دوری است .

بخش ۲-۱ نظریه نمایش گروهها

تعریف ۱-۲-۱: یک نمایش ماتریسی گروه G عبارت است از همریختی

$$\varphi : G \to GL(n,R)$$

در این صورت $Ker\varphi$ را هسته نمایش می گوییم

$$Ker\varphi = \{g \in G | \varphi(g) = I\}$$

در حالت خاص که $Ker\varphi = \{1\}$ نمایش را وفادار یا با ایمان میگوییم .

تعریف ۲-۲-۱: فرض کنیم R حلقه جابجایی باشد . A را یک جـبر (R-جـبر) گوییـم هرگاه

(۱) A حلقه باشد .

(۲) R,A مدول باشد .

$$\forall r\in R \;\; \forall a,b\in A \quad r(ab)=(ra)b=a(rb) \text{(۳)}$$

تعریف ۳-۲-۱: فرض کنیم G گروه و R حلقه جابجایی در این صورت گروه حلقه RG را به صورت زیر تعریف میکنیم

$$RG=\left\{\sum_{i=1}^{n} r_i g_i \quad r_i\in R\,, \quad g_i\in G\right\}$$

نکته : اگر $|G|=n$ در این صورت RG یک R مدول آزاد n بعدی با پایه $\{g_1,g_2,\dots,g_n\}$ است بطوریکه $(g_i\in G)$ می باشد .

تعریف ٤-۲-۱:فرض کنیم A یک حلقه و V و W دو A مدول باشند . در این صورت همریختی A مدولها را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$Hom_A(V,W)=\{F|F:V\to W\; F(v+w)=F(v)+F(w), F(av)=aF(v), \forall v\in V, w\in W, a\in A\}$$

اگر $V=W$ در این صورت

$$Hom_A(V,V)=End(V)$$

تمام درون ریختی های یک به یک و پوشا را با $GL(V)$ نشان می دهیم . در حالت خاص که V یک R مدول آزاد n بعدی باشد

$$GL(V)\cong GL(n,R)$$

تعریف ۵-۲-۱: فرض کنیم G یک گروه و R حلقه جابجایی و V یک $R-$ مدول آزاد متناهی البعد باشد یک نمایش G در V همریختی $\varphi:G\to GL(V)$ است و درجه نمایش برابر $\dim V$است . φ را نمایش تأمین شده توسط V می گوییم .

لم ۶-۲-۱: مطالعه نمایش های گروه G روی R هم ارز است با مطالعه RG مدولهای

آزاد با بعد متناهی .

تعریف ۷-۲-۱: فرض کنیم $T:G\to GL(V)$ ، $T':G\to GL(W)$ نمایش های G باشند گوییم نمایش های T و T' هم ارزند اگر یک همریختی R - مدول $S:V\to W$ موجود باشد بطوریکه $ST(g)=T'(g)S$.

تعریف ۸-۲-۱: اگر خود RG را به عنوان RG مدول در نظر بگیریم نمایش حاصل نمایش منظم G است .

$\dim_R RG = n \qquad G=\{1=x_1,x_2,\dots\dots,x_n\} \qquad |G|=n$

$\Psi : G\to GL(n,R)$

$$a_{ij}=\begin{cases}1 & gx_1=x_j\\ 0 & gx_i=x_j\end{cases}\Psi(g)=(a_{ij})$$

تعریف ۹-۲-۱:فرض کنیم V یک R مدول باشد V را تحویل ناپذیر گوییم هرگاه تنها زیر مدولهای V ، $\{0\}$ و خود V باشد . اگر $T:G\to GL(V)$ یک نمایش G باشد ، T را تحویل ناپذیر گوییم هرگاه V به عنوان RG مدولهای تحویل ناپذیر باشد .

تعریف ۱۰-۲-۱:فرض کنیم G یک گروه و K یک میدان باشد تابع $f:G\to K$ را یک تابع کلاسی گوییم هرگاه f روی هر کلاس تزویج G دارای مقدار ثابت باشد . یعنی

$f(x)=f(y^{-1}xy) \qquad \forall x,y\in G$

نکته : اگر G دارای h کلاس تزویج باشد در این صورت کلیه توابع کلاسی روی G یک فضای برداری از بعد h روی میدان K تشکیل میدهند .

تعریف ۱۱-۲-۱:فرض کنیم G یک گروه و V یک فضای برداری با بعد متناهی روی

میدان K باشد و $T : G \rightarrow GL(V,K)$ یک نمایش ماتریسی G باشـد . در ایـن صـورت سرشت تامین شده توسط T عبارت است از تابع

$$\chi : G \rightarrow K$$
$$\chi(g) = tr(T(g)).$$

$\chi(1)$ را درجه سرشت χ گوییم و $\ker\chi = \{g \in G | \chi(g) = \chi(1)\}$.

لم ۱۲-۲-۱: KG مدولهای یکریخت ویا نمایشـهای هـم ارز دارای سرشـتهای یکسـان میباشند .

تعریف ۱۳-۲-۱: سرشت χ را تحویل ناپذیر گوییم هرگاه نمایش T متنـاظر بـا آن تحویل ناپذیر باشد .

قضیه ۱٤-۲-۱: فرض کنیم χ و θ سرشـتهای G باشـند کـه توسـط KG مدولـهای تحویل ناپذیر V و W تامین شوند در این صورت

الف) برای هر میدان K اگر $W \not\cong V$ آنگاه

$$\sum_{\chi \in G} \chi(x)\theta(x^{-1}) = o$$

ب) اگر K بطور جبری بسته و $chark \nmid |G|$ آنگاه

$$\sum_{\chi \in G} \chi(x)\theta(x^{-1}) = |G|$$

ج) اگر K میدان بطور جبری بسته و $chark \nmid |G|$ و G دارای h کلاس تزویج $C_h, \dots, C_1$ و $|C_i| = h_i$ و $x_i \in C_i$ وفرض کنیم $\chi_h, \dots, \chi_1$ تمام سرشتهای تحویل ناپذیر G باشـند در این صورت

$$\sum_{m=1}^{h} \chi_m(x_i)\chi_m(x_j^{-1}) = \frac{\delta_{ij}|G|}{h_j} = \delta_{ij}|C_G(x_j)|$$

تعریف ۱۵-۲-۱: فرض کنیم $\chi_h, \dots, \chi_1$ سرشتهای تحویل ناپذیر G باشند . در این