بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه یزد

دانشکده ریاضی

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

ریاضی کاربردی

یک روش تکراری جدید برای حل سیستم‌های خطی

استاد راهنما: دکتر سیدابوالفضل شاهزاده فاضلی

استاد مشاور: دکتر محمدرضا هوشمنداصل

پژوهش و نگارش: سیدحسین میرحسینی

۱۳۸۷/۹/۲۴

شهریور ماه ۱۳۸۷

۱۰۴۴۴۴

بسمه تعالی

مدیریت تحصیلات تکمیلی	صورتجلسه دفاعیه پایان نامه دانشجوی دوره کارشناسی ارشد	شناسه: ب/ک/۳

جلسه دفاعیه پایان نامـه تحصیلی آقای سیدحسین میرحسینی دانشجوی کارشناسی ارشد

رشتــه/گرایش: ریاضی کاربردی

تحت عنوان: یک روش تکراری جدید برای حل سیستم‌های خطی

و تعداد واحد: ۶ درتاریخ ۸۷/۶/۲۰ باحضور اعضای هیأت داوران (به شرح ذیل) تشکیل گردید.

پس از ارزیابی توسط هیأت داوران، پایان‌نامه با نمره: به عدد ۱۸/۷۵ به حروف هیجده و هفتاد و پنج صدم و درجه عالی مورد تصویب قرارگرفت.

عنوان	نام و نام خانوادگی	امضاء
استاد/ استادان راهنما:	سیدابوالفضل شاهزاده فاضلی	
استاد/ استادان مشاور:	محمدرضا هوشمند اصل	
متخصص وصاحبنظرداخلی:	سیدمهدی کرباسی	
متخصص و صاحبنظر خارجی:	سهرابعلی یوسفی	

نماینده تحصیلات تکمیلی دانشگاه (ناظر)

نام ونام خانوادگی: شایسته دادفرنیا

امضاء:

چکیده

یوجویک یک روش تکراری جدید برای حل سیستم‌های خطی بدست آورد. می‌توان ملاحظه کرد که روش یوجویک در حقیقت بهبود یافته روش گاوس-سایدل است.در این پایان نامه نشان داده خواهد شد که این روش یکی از حالت‌های خاص روش‌های تصویری است و رویکرد متفاوتی به نام یوجویک بهبود یافته را پایه گذاری می‌کند که ثابت می‌شود از لحاظ نظری و عددی بهتر از روش یوجویک بوده و با ارائه مثال‌هایی نشان داده می‌شود که در اکثر موارد سرعت همگرایی آن یک و نیم برابر سرعت همگرایی روش یوجویک می‌باشد.

فهرست مندرجات

فصل ۱

مقدمه

بسیاری از پدیده‌ها و مدل‌های واقعی و پیچیده علوم پایه و مهندسی بویژه مسائل فیزیکی منجربه حل دستگاه‌های خطی به فرم $Ax = b$ می‌گردد که هدف بدست آوردن بردار مجهول x تا حد امکان دقیق می‌باشد. به‌خصوص وقتی که ماتریس ضرائب A ماتریس بزرگی باشد بدست آوردن جواب دقیق و همچنین سرعت رسیدن به جواب از اهمیت خاصی برخوردار خواهد بود [۴, ۳]. اغلب گسترش یک الگوریتم توسط یک اثبات ساختنی در ریاضیات، برانگیخته می‌شود. در آنالیز کلاسیک، روش‌های ناساختنی مکرر استفاده می‌شوند، ولی به طور کلی آنها به الگوریتمی منجر نمی‌شوند. به عنوان مثال، قضایای وجود و یکتایی با فرض اینکه درست نیستند و سپس دنبال کردن یک روند منطقی تا رسیدن به یک تناقض ثابت می‌شوند. با وجود این، هر اثبات ساختنی منجر به یک الگوریتم موفق نخواهد شد. مشکلی که ممکن است پیش بیاید، آن است که یک جواب تحلیلی یک مساله مفروض ممکن است چندین گام از جواب عددی دورتر باشد یا ممکن است به علت همگرایی کند یا نیاز به محاسبات طولانی، غیر مفید باشد. به عنوان مثالی از شکاف بین یک قضیه وجود و یک جواب عددی یک مساله، دستگاه $Ax = b$ را در نظر بگیرید. می‌دانیم وقتی A نامنفرد باشد این دستگاه یک جواب منحصر به فرد دارد. اما این حقیقت ممکن است تسلی کمی باشد وقتی با یک دستگاه خیلی بزرگ رو به رو باشیم و مایل باشیم یک جواب عددی تقریبی را محاسبه نماییم. الگوریتم‌های مختلفی برای حل دستگاه فوق طراحی شده اند که در حال اصلاح وکامل شدن می‌باشند و سرعت همگرایی آنها نیز افزایش یافته است [۱,۲]. درحقیقت هدف بدست آوردن روشی است که بتواند سیستم‌های خطی مذکور را درکوتاه‌ترین زمان با دقت بالا و دلخواه حل کند. ازجمله روش‌های خوب موجود روش گاوس– سایدل است. دراین پایان نامه روش جدیدی مطرح می شود که در واقع بهبود یافته روش گاوس– سایدل است و یوجویک نام دارد [۷].

همچنین در این پایان نامه نشان داده خواهد شد که روش یوجویک بهبود یافته یک حالت خاص از روش‌های تصویری است و روش متفاوتی را پایه گذاری می کند که ثابت می‌شود هم از نظر نظری و هم از نظر عددی بهتر از روش یوجویک می‌باشد و سرعت همگرایی آن نیز بیشتر می‌باشد [۵,۷,۸].

تاریخچه

دستگاه‌های معادلات خطی در علوم مختلف کاربردهای زیادی دارند. تا کنون روش‌های مختلفی برای حل این دستگاه‌ها مطرح شده است. وقتی دستگاه معادلات بزرگ باشد اهمیت هر کدام از این روش‌ها بیشتر نمایان می‌گردد. الگوریتم حذفی گاوس و انواع آن روش‌های مستقیم برای حل دستگاه $Ax = b$ نامیده می‌شوند. آن‌ها بعد از انجام تعداد متناهی گام یک جواب را تولید می‌کنند که این جواب باید کاملا دقیق باشد، اما به خاطر خطای گرد کردن چنین نمی‌باشد. روش‌های تکراری یک دنباله از بردارها را تولید می‌کنند که به طور ایده‌آل به جواب همگرا می‌گردند. در این گونه روش‌ها اگر یک جواب تقریبی دارای دقتی مشخص باشد و یا تعداد تکرارها از یک تعداد معین تجاوز نماید، محاسبات متوقف می‌گردند. برای حل دستگاه‌های بزرگ شامل هزاران معادله روش‌های تکراری اکثر اوقات از نظر سرعت و حافظه مورد نیاز بر روی کامپیوتر نسبت به روش‌های مستقیم مزیت‌های زیادی دارند. تا کنون روش‌های زیادی برای حل دستگاه‌های خطی مطرح شده‌اند از جمله روش‌های تجزیه بالا مثلثی و پایین مثلثی، تجزیه دولیتل، تجزیه کروت، تجزیه چولسکی، روش حذفی گاوس و غیره. الگوریتم‌هایی نظیر تجزیه‌های بالا مثلثی و پایین مثلثی و چولسکی به طور وسیعی تغییر کرده‌اند تا ترجمه‌هایی از آن‌ها بدست آید که برای استفاده بر روی کامپیوترهای سطح بالا با معماری پیشرفته مناسب باشند. یکی از روش‌های تکراری مطرح در این زمینه روش تکرار ژاکوبی و مشابه آن روش گاوس-سایدل است. سپس روش تکرار فوق تخفیف جهت تسریع سرعت همگرایی روش گاوس-سایدل مطرح شد. امروزه اصلاحاتی بر روی روش گاوس-سایدل انجام گرفته است که باعث تسریع سرعت همگرایی این روش شده است. روشی که در این پایان‌نامه مورد بررسی قرار می‌گیرد بهبود یافته روش مذکور است و از روش‌های تصویری استفاده می‌کند.

فصل دوم

تعاریف و مفاهیم پایه

مقدمه

در این فصل، به بیان و یادآوری بعضی از تعاریف و مفاهیمی که در فصول بعد مورد استفاده قرار گرفته‌اند، پرداخته می‌شود.

۲-۱ انواع ماتریسها

تعریف ۲-۱-۱ ترانهاده ماتریس $A_{n\times m}$ را با $A^T_{m\times n}$ نشان می‌دهند. به‌عبارت دیگر، هرگاه ماتریس A به صورت $A=(a_{ij})$، $1\le i\le n$، $1\le j\le m$ باشد، آن‌گاه $A^T=(a_{ji})$.

تعریف ۲-۱-۲ اگر A یک ماتریس مختلط با ابعاد $n\times n$ باشد، آن‌گاه A^H ماتریس مزدوج ترانهاده مختلط A است، یعنی $A^H=(\overline{A})^T$، که درآن $\overline{A}$ ماتریس مزدوج مختلط A می‌باشد.

تعریف ۲-۱-۳ ماتریس A را ماتریس هرمیتی گویند، هرگاه $A=A^H$.

تعریف ۲-۱-۴ ماتریس A را ماتریس متقارن گویند، هرگاه $A=A^T$.

تعریف ۲-۱-۵ ماتریس $A=(a_{ij})$ را ماتریس قطری گویند، هرگاه برای هر $i\neq j$ داشته باشیم: $a_{ij}=0$، و آن را به فرم $A=(a_{11},a_{22},\dots,a_{nn})$ نمایش می‌دهند.

تعریف ۲-۱-۶ ماتریس $A=(a_{ij})$ را یک ماتریس سه قطری گویند، هرگاه برای هر زوج (i,j) که $|j-i|>1$ داشته باشیم: $a_{ij}=0$، ماتریس سه قطری را به صورت زیر نمایش می‌دهند.

$$A=tridiag(a_{i,i-1},a_{i,i},a_{i,i+1})$$

تعریف ۲-۱-۷ ماتریس $A_{n\times n}$ را یک ماتریس متعامد گویند، هرگاه $A^TA=AA^T=I_{n\times n}$.

تعریف ۲-۱-۸ ماتریس مربعی $A=(a_{ij})$ را ماتریس بالا مثلثی است ، اگر برای هر $i>j$ داشته باشیم $a_{ij}=0$ وپایین مثلثی است ، اگر برای هر $i<j$ داشته باشیم $a_{ij}=0$.

تعریف ۲-۱-۹ ماتریس متقارن $A_{n\times n}$ را یک ماتریس مثبت معین گویند، هرگاه برای هر بردار غیر صفر X داشته باشیم $X^T AX>0$.

تعریف ۲-۱-۱۰ ماتریس مربعی A نرمال است، هرگاه $A^H A=AA^H$.

خواص ماتریسهای متعامد: تعدادی از خواص ماتریسهای متعامد عبارتند از:

الف- معکوس یک ماتریس متعامد برابر ترانهاده آن می باشد، یعنی: $A^T=A^{-1}$.

ب- حاصل ضرب دو ماتریس متعامد نیز یک ماتریس متعامد می‌باشد.

تعریف ۲-۱-۱۱ ماتریس A به فرم زیر را یک ماتریس هاوس هولدر گویند،

$$A=I-\frac{2uu^T}{u^Tu}$$

که در آن I ماتریس همانی $m\times m$ و u یک بردار غیرصفر است.

تعریف ۲-۱-۱۲ ماتریس $A=(a_{ij})$ را ماتریس بالا هسنبرگی گویند، هرگاه به ازاء هر $i>j+1$

$$a_{ij}=0$$

تعریف ۲-۱-۱۳ ماتریس $A=(a_{ij})$ را ماتریس پایین هسنبرگی گویند، هرگاه به ازاء هر $j>i+1$

$$a_{ij}=0$$

$$\begin{bmatrix} * & * & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ * & * & \dots & * \\ * & * & \dots & * \end{bmatrix}$$

پائین هسنبرگ

$$\begin{bmatrix} * & \dots & * & * \\ * & \dots & * & * \\ & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & * & * \end{bmatrix}$$

بالا هسنبرگ

تعریف ۲-۱-۱۴ ماتریس $A_{n\times n}$ را یک ماتریس تنک گویند، هرگاه دارای تعداد زیادی عنصر صفر باشد و بتوان از اعداد و محل درایه های ناصفر آن استفاده کرد. در غیر این صورت ماتریس را چگال می‌نامند. بیشتر ماتریسهایی که در مسائل کاربردی با آن‌ها مواجه هستیم ماتریسهای تنک هستند، لذا هنگام کار با این ماتریسها لازم است که فقط عناصر غیر صفر را در نظر گرفته و الگوریتم‌ها طوری طراحی شوند که حافظه کمتری اشغال گردد و عملیات کمتری انجام پذیرد.

تعریف ۲-۱-۱۵ به دسته خاصی از ماتریسهای تنک که در آن‌ها درایه‌های خارج از یک نوار نسبتا باریک حول قطر صفر باشد را یک ماتریس نواری گویند.

تعریف ۲-۱-۱۶ فرض کنید $A=(a_{ij})$ یک ماتریس دلخواه باشد، در این صورت A یک ماتریس بلوکی نامیده می‌شود هرگاه، هر یک از درایه‌هایش یک ماتریس باشد. با فرض اینکه B نیز یک ماتریس بلوکی باشد و $C=AB$، جمع و ضرب آن‌ها به شکل

$$C=(C_{ij})=(\sum_{k=1}^{n}A_{ik}B_{kj})\ \ ,\ \ A+B=(A_{ij}+B_{ij})$$

تعریف می‌شود. یک ماتریس قطری بلوکی $A_{n\times n}$ یک ماتریس بلوکی است که هر یک از بلوک‌های قطری آن یک ماتریس مربعی بوده و دیگر عناصرش صفر باشند.

تعریف ۲-۱-۱۷ اگر A و B ماتریسهای $n\times n$ باشند، آن‌گاه ماتریس B را متشابه با ماتریس A گویند، هرگاه ماتریس معکوس‌پذیر V وجود داشته باشد، به طوری که

$$B=V^{-1}AV$$

قضیه ۲-۱-۱ ماتریسهای متشابه دارای مقادیر ویژه برابر می‌باشند.

قضیه فوق یکی از ابزارهای سودمند در مسائل مقدار ویژه است، با استفاده از این قضیه با روش‌های مختلف، ماتریسهای بزرگ را با ماتریسهای خاص، نظیر ماتریسهای قطری، سه قطری و هسنبرگ متشابه می‌سازیم و جهت تعیین مقادیر ویژه از این ماتریسهای خاص استفاده می‌کنیم.

۲-۲ مقدار ویژه و بردار ویژه

تعریف ۲-۲-۱ فرض کنید A ماتریس مربعی باشد، در این صورت عدد حقیقی $\lambda \in C$ را یک مقدار ویژه A گویند هرگاه بردار ناصفر $u \in R^n$ موجود باشد، به طوری که $Au = \lambda u$، بردار u بردار ویژه A متناظر با λ نامیده می‌شود. همچنین چندجمله‌ای $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ را چندجمله‌ای مشخصه ماتریس A می‌نامند، صفرهای این چندجمله‌ای همان مقادیر ویژه ماتریس A می‌باشند.

تعریف ۲-۲-۲ (بردارهای ویژه چپ و راست) اگر λ یک مقدار ویژه ماتریس A باشد، در این صورت یک مقدار ویژه ماتریس A^T نیز خواهد بود. بردار غیر صفر u را یک بردار ویژه راست متناظر با مقدار ویژه λ گویند هرگاه $Au = \lambda u$، همچنین بردار غیر صفر v^T را یک بردار ویژه چپ متناظر با مقدار ویژه λ گویند هرگاه $A^T v = \lambda v \to v^T A = \lambda v^T$.

تعریف ۲-۲-۳ بزرگ‌ترین مقدار ویژه ماتریس $A_{n\times n}$ از لحاظ قدر مطلق را شعاع طیفی ماتریس A گویند و با $\rho(A)$ به صورت زیر نشان می‌دهند، که در آن λ_i یک مقدار ویژه ماتریس A است.

$$\rho(A) = \max_{1 \le i \le n} (|\lambda_i|)$$

تعریف ۲-۲-۴ یک نقطه درصفحهٔ مختلط، به طوری که مقادیر ویژهٔ داخلی مورد نظر نزدیک به آن باشند را نقطه انتقال نامیده و آن را با نماد σ نمایش می‌دهند.

تعریف ۲-۲-۵ فرض‌کنید A و B دو ماتریس $n \times n$ باشند، عدد $\lambda \in C$ را یک مقدار ویژه تعمیم یافته زوج (A,B) گویند هرگاه بردار $u \neq 0$ یافت شود به طوری که $Au = \lambda Bu$، بردار u، بردار ویژه تعمیم یافته زوج (A,B) نامیده می‌شود.

۲-۳ فضاهای ضرب داخلی

تعریف ۲-۳-۱ یک ضرب داخلی روی زیر فضای برداری V عبارت است از یک تابع حقیقی که به هر زوج از بردارهای u و v عدد حقیقی (u,v) را اختصاص می‌دهد به طوری که برای بردارهای u, v و w و اسکالر $\alpha \in C$، چهار اصل زیر برقرار باشد:

الف- به ازای هر $u \in V$، $(u,u) \geq 0$،

ب- $(u,u)=0$ اگر و فقط اگر $u=0$،

پ- به ازای هر $u,v,w \in V$ داشته باشیم: $(u,v+w)=(u,v)+(u,w)$،

ت- به ازای هر $\alpha \in C$ و $u,v \in V$ داشته باشیم: $(\alpha u,v)=\overline{\alpha}(u,v)$.

یک فضای برداری همراه با یک ضرب داخلی را یک فضای ضرب داخلی می‌نامند.

تعریف ۲-۳-۲ دو بردار ناصفر u و v از یک فضای ضرب داخلی V متعامد نامیده می‌شوند، هرگاه:

$$(u,v)=0$$

تعریف ۲-۳-۳ یک مجموعه از بردارهای ناصفر مانند $U=(u_1,u_2,...,u_n)$ را متعامد گویند، هرگاه:

$$(u_i,u_j)=0 \quad \forall i \neq j \quad i,j=1,2,...,n$$

تعریف ۲-۳-۴ مجموعه U را متعامد یکه گویند، هرگاه U متعامد باشد و نرم هر بردار متعلق به U برابر یک باشد، یعنی $\|u_i\|=1 \;,\; \forall u_i \in U$.

تعریف ۲-۳-۵ مجموعه همه ترکیبات خطی یک مجموعه بردار $U=(u_1,u_2,...u_n)$ یک زیر فضای برداری است که $span$ خطی U نامیده می‌شود و به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$spanU = span\{u_1,u_2,...,u_n\} = \{z \in C^n : z=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i u_i \;,\; \alpha_i \in C\}$$

تعریف ۲-۳-۶ فرض کنید $A \in C^{m\times n}$، در این صورت فضای برد و پوچ ماتریس A به ترتیب به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Ran(A) = \{Au \ : \ u \in C^{m\times n}\}$$
$$Ker(A) = \{u \in C^{m\times n} \ : Au = 0\}$$

بنا به تعریف هرگاه ماتریس A نامنفرد باشد، آن‌گاه $Ker(A) = 0$. اما اگر A منفرد باشد، در این صورت $Au = 0$، لذا صفر یک مقدار ویژه ماتریس A می باشد، حال اگر بردارهای ویژه نظیر صفر را به دست آوریم اعضای $Ker(A)$ خواهند بود.

۲-۴ نرم برداری

تعریف ۲-۴-۱ اگر V یک فضای ضرب داخلی باشد، آن‌گاه نرم[1] بردار u که با $\|u\|$ نشان داده می‌شود، به صورت $\|u\| = (u,u)^{\frac{1}{2}}$ تعریف می‌شود.

تعریف ۲-۴-۲ تابع $\|.\| : R^n \to R$ با خواص زیر را یک نرم برداری روی R^n گویند.

$$\text{۱)}\ \|X\| \geq 0 \quad ,\forall X \in R^n$$
$$\text{۲)}\ \|X\| = 0 \ \Leftrightarrow \ X = 0$$
$$\text{۳)}\ \|\alpha X\| = |\alpha|\|X\| \ \ , \ \forall X \in R^n \ \ ,\forall \alpha \in C$$
$$\text{۴)}\ \|X+Y\| \leq \|X\| + \|Y\| \quad , \quad \forall X,Y \in R^n$$

در ادامه چند نرم متداول را برای بردار $X = (x_1, x_2, \dots x_n)$ تعریف می‌کنیم.

۱- نرم خطی (نرم یک) : $\|X\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

۲- نرم اقلیدسی (نرم دو): $\|X\|_2 = (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)^{1/2}$

۳- نرم ماکسیمم (نرم بینهایت) : $\|X\|_\infty = \max\{|x_i|\} \quad , \quad 1 \leq i \leq n$

[1] Norm

۲-۵ نرم ماتریسی

تعریف ۲-۵-۱ ماتریس A و نرم بردار $\|.\|$ مفروض است، مشابه تعریف نرم بردار نرم ماتریس را به صورت تابع $\|.\|: R^{n\times m} \to R$ تعریف می‌کنیم. نرم ماتریس A به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\|A\| = Sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

این نرم نیز خواص گفته شده برای نرم بردارها را دارد.

چند نرم متداول برای ماتریسها عبارتند از:

۱- نرم خطی (نرم یک) : $\|A\|_1 = \max(\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|) \quad , \quad j = 1,2,\dots,m$

۲- نرم اقلیدسی (نرم دو) : $\|A\|_2 = \{\rho(AA^H)\}^{1/2} = \{\rho(A^H A)\}^{1/2}$

۳- نرم ماکسیمم (نرم بینهایت) : $\|A\|_\infty = \max(\sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|) \quad , \quad i = 1,2,\dots,n$

۴- نرم فروبینیوس[2] : $\|A\|_F = \{\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|^2\}^{1/2} = \{tr(AA^H)\}^{1/2}$

بعضی از ماتریسها را می‌توان به صورت حاصل ضرب چند ماتریس دیگر نوشت. تجزیه ماتریس A به حاصل ضرب دو ماتریس می‌تواند در حل دستگاه $Ax = b$ مفید باشد.

۲-۶ تجزیه QR و LU

الف- فرض کنید A یک ماتریس $n\times n$ باشد، آن‌گاه یک ماتریس متعامد Q و یک ماتریس بالا مثلثی R وجود دارد به طوری که $A = QR$، که در آن ماتریس Q به فرم $Q = H_1 H_2 \dots H_{n-1}$ می‌باشد، که H_iها هر یک ماتریس هاوس‌هولدر می‌باشند.

[2] Frobenius

ب- فرض کنید A یک ماتریس $n\times n$ باشد، تجزیه LU عبارت است از تبدیل ماتریس ضـرایب A به حاصل ضرب دو ماتریس L و U، که در آن L یک ماتریس پایین مثلثی و U یک مـاتریس بالا مثلثی واحد است (یک ماتریس بالا مثلثی که همه عناصر روی قطر اصلی آن یک هستند).

۲-۷ الگوریتم متعامد سازی گرام اشمیت[۳]

مجموعه $G=\{x_۱,x_۲,\ldots,x_r\}$ از بردارهای مستقل خطی را در نظر بگیرید، با استفاده از الگوریتم متعامدسازی گرام اشمیت می‌توان این مجموعه را به مجموعه‌ای متعامد یکه تبدیل کرد.

الگوریتم گرام اشمیت

۱- قرار دهید: $r_{۱۱}=\|x_۱\|_۲$؛ اگر $r_{۱۱}=۰$ پایان روند، در غیر این صورت $q_۱=\dfrac{x_۱}{r_{۱۱}}$.

۲- به ازاء $j=۲,۳,\ldots,r$ و $i=۱,۲,\ldots,j-۱$ مقادیر زیر را بدست آورید.

$$r_{ij}=(x_j,q_i)$$
$$\hat{q}=x_j-\sum_{i=۱}^{j-۱} r_{ij}\, q_i$$
$$r_{jj}=\|\hat{q}\|_۲$$

هرگاه $r_{jj}=۰$؛ پایان روند، در غیر این صورت $q_j=\dfrac{\hat{q}}{r_{jj}}$.

الگوریتم فوق روند گرام اشمیت استاندارد نامیده می‌شود، الگوریتم مشابهی وجود دارد که از لحاظ ریاضی معادل با روند گرام اشمیت استاندارد است ولی خـصوصیات عـددی بهتـری دارد کـه آن را روند گرام اشمیت اصلاح شده می‌نامند.

[3] Gram schmidt

مثال ۲-۷-۱ بردارهای پایه‌ای $x_۱ = (۱,۱,۱)$ ، $x_۲ = (۰,۱,۱)$ ، $x_۳ = (۰,۰,۱)$ از فضای بـرداری $R^۳$ بـا ضرب داخلی اقلیدسی را در نظر بگیرید. روند گـرام اشـمیت را بـرای بـه دسـت آوردن بردارهـای متعامد یکه $(q_۱, q_۲, q_۳)$ به کار می‌بریم.

$$r_{۱۱} = \|x_۱\| = \sqrt{۳}$$

$$q_۱ = \frac{x_۱}{r_{۱۱}} = \frac{۱}{\sqrt{۳}}(۱,۱,۱)$$

$$\hat{q} = x_۲ - (q_۱, x_۲)q_۱ = (۰,۱,۱) - \frac{۲}{۳}(۱,۱,۱) = (-\frac{۲}{۳}, \frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۳})$$

$$r_{۲۲} = \|\hat{q}\|_۲$$

$$q_۲ = \frac{\hat{q}}{r_{۲۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۶}}(-۲,۱,۱)$$

$$\hat{q} = x_۳ - (q_۱, x_۳)q_۱ - (q_۲, x_۳)q_۲$$

$$= (۰,۱,۱) - \frac{۱}{۳}(۱,۱,۱) - \frac{۱/۳}{۲/۳}(\frac{-۲}{۳}, \frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۳}) = (۰, \frac{-۱}{۲}, \frac{۱}{۲})$$

$$r_{۳۳} = \|\hat{q}\|_۲$$

$$q_۳ = \frac{\hat{q}}{r_{۳۳}} = \frac{۱}{\sqrt{۲}}(۰,-۱,۱)$$

به سادگی دیده می‌شود که بردارهای $(q_۱, q_۲, q_۳)$ مجموعه‌ای متعامد یکه است.

۲-۸ تصویر روی یک زیر فضا

تعریف ۲-۸-۱ یک بردار که بر تمام بردارهای یک زیرفضا مثل W عمود باشد گوییم بر زیرفضای W عمود است. مجموعه همه بردارهایی که عمود بر زیر فضای W هستند یک زیرفضای برداری است و متمم قائم W نامیده می‌شود و با $W^{\perp}$ نشان داده می‌شود.

قضیه ۲-۸-۱ هرگاه W زیر فضایی از فضای حاصل ضرب داخلی متناهی البعد V باشـد، آن‌گـاه هر بردار u متعلق به V به صورت زیر بسط داده می‌شود:

$$u = w_1 + w_2$$

که در آن $w_1 \in W$ و $w_2 \in W^{\perp}$ است.

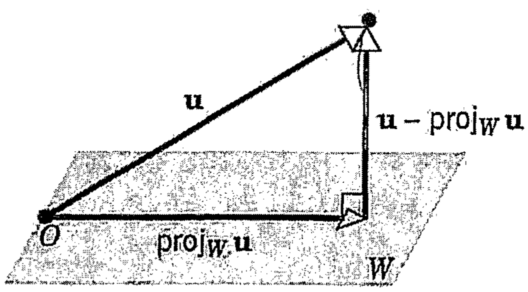
تعریف ۲-۸-۲ بردار w_1 در قضیه قبل تصویر متعامد u روی زیر فضای W نامیده می‌شود، و با $proj_W u$ نشان داده می‌شود و بردار w_2 مولفه u، متعامد با زیر فـضای W نامیـده مـی‌شـود و بـا $proj_{W^{\perp}} u$ نشان داده می‌شود. بنابراین، بردار u در قضیه ۱-۸-۱ به صورت زیر بسط داده می‌شود:

$$u = proj_W u + proj_{W^{\perp}} u$$

چون $w_2 = u - w_1$، لذا داریم:

$$proj_{W^{\perp}} u = u - proj_W u$$

این حالت در شکل (۱-۱) نشان داده شده است.



شکل(۲-۱)