بسم الله الرحمن الرحیم

۱

دانشکده علوم

گروه فیزیک

عنوان

فضای فاز ناجابجایی و کاربردهای آن در کیهان شناسی

پایان‌نامه یا رساله برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته گرایش گرانش وکیهانشناسی

استاد راهنما:

دکتر شهرام جلال زاده

استاد مشاور:

دکتر حمید رضا سپنجی

نام دانشجو

طاهره رستمی

شهریور ماه ۱۳۸۹

دانشگاه شهید بهشتی

تهران ۱۹۸۳۹۶۳۱۱۳ اوین
تلفن: ۲۹۹۰۱

بسمه تعالی

« صورتجلسه دفاع پایان نامه دانشجویان دوره کارشناسی ارشد»

بازگشت به مجوز دفاع شماره / ۲۰۰/ د مورخ / /۸۹ جلسه هیأت داوران ارزیابی پایان نامه خانم طاهره رستمی به شماره شناسنامه ۱۴۹۳۲ صادره از تهران متولد ۱۳۶۲ دانشجوی دوره کارشناسی ارشد ناپیوسته رشته فیزیک – فیزیک نجومی

با عنوان :

فضای فاز نا جابجایی و کاربردهای آن در کیهان شناسی

به راهنمائی:

آقای دکترشهرام جلال زاده

طبق دعوت قبلی در تاریخ ۱۵ /۶/ ۸۹ تشکیل گردید و براساس رأی هیأت داوری و با عنایت به ماده ۲۰ آئین نامه کارشناسی ارشد مورخ ۷۵/۱۰/۲۵ پایان نامه مزبور با نمره ۱۸٫۷ درجه عالی مورد تصویب قرار گرفت.

۱ -استاد راهنما : آقای دکترشهرام جلال زاده

۲- استاد مشاور : آقای دکتر حمیدرضا سپنجی

۳- استاد داور : آقای دکترمحمد نوری زنوز

۴-استاد داور و نماینده تحصیلات تکمیلی: آقای دکترمهرداد فرهودی

تقدیم به

مادر مهربان و پدر عزیزم

سرافرازترین کوه در برابر طوفان رنج‌ها

وتابنده‌ترین ستاره امید من در زندگی

تشکر و قدردانی

از زحمات و راهنمائی‌های بی‌دریغ استاد راهنمای عزیز و بزرگوار خود جناب آقای دکتر شهرام جلال‌زاده کمال سپاسگزاری را دارم که بدون راهنمایی‌های ایشان این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

همچنین از استاد مشاورم جناب آقای دکتر حمید رضا سپنجی کمال تشکر و امتنان را دارم.

جناب آقای دکتر نیما خسروی به خاطر مشاوره‌های خوبشان در انجام این پژوهش بسیار سپاسگزارم.

از جناب آقای دکتر مهرداد فرهودی و جناب آقای دکتر محمد نوری زنوز که زحمت داوری و مطالعه را تقبل نمودند کمال تشکر را دارم.

از دوستان خوبم که در دوران کارشناسی ارشد هر یک به نحوی مرا یاری کردند تشکر و قدردانی می‌کنم.

شهریور ۱۳۸۹

چکیده

در این پایان نامه، در ابتدا مقدمه‌ای از ناجابجایی را در فیزیک ارائه می‌دهیم. سپس به توصیف مدل مورد بررسی در این پایان نامه که نظریه اسکالر-تانسوری می‌باشد، می‌پردازیم. در ادامه معادلات مسیر حرکت کلاسیک را در قالب کیهان‌شناسی کلاسیک بدست آورده و به حل کوانتومی مدل می‌پردازیم و در آن تابع موج جهان را با توجه به معادله ویلر-دویت بدست می‌آوریم. سازگاری خوبی را بین حل‌های کلاسیک و کوانتومی نشان می دهیم. آنگاه مشاهده پذیرهای دیراک را بررسی کرده و نشان می‌دهیم که ثابت کیهان‌شناسی در این مدل کوانتیزه است. سرانجام مبادرت به بررسی فضای فاز ناجابجایی شده است، اثرات ناجایجایی را بر روی کیهانشناسی بررسی کرده و از آنجا که معادله ویلر-دویت تحول زمانی ندارد نشان می‌دهیم حل ناجابجایی کوانتومی مدل می تواند توصیفی برای این تحول تابع موج ارائه دهد

واژه‌های کلیدی: کیهان‌شناسی، هندسه ناجابجایی، مشاهده پذیرهای دیراک

فهرست مطالب

فهرست اشکال

فصل ۱:

مقدمه ای بر ناجابجایی در فیزیک

۱-۱- مقدمه

تولد مکانیک کوانتومی در اوایل قرن بیستم، نظر فیزیکدانان را راجع به این نکته که آیا می‌توان جهان فیزیکی را با یک قانون واحد بیان کرد، در هم کوبید. اگر جهان را در مقیاس بزرگ در نظر بگیریم همچون حرکت اشیای زمینی ، حرکت سیارات، ستاره‌ها، کهکشان‌ها و... همگی بوسیله مکانیک نیوتنی توصیف می‌شوند. ولی هنگامی که به سمت مقیاس‌های کوچکتر حرکت می‌کنیم، که رفتار اشیایی با جرم خیلی کوچک مانند الکترون ، پروتون و... را مورد بررسی قرار می‌دهد، باید یک تئوری فیزیکی متفاوتی مانند مکانیک کوانتومی را در نظر بگیریم. بنابراین دو نوع قوانین فیزیکی داریم که در دو سطح مختلف از جهان فیزیکی مجاز هستند. اگرچه تفکری معروف در بین فیزیکدانان وجود دارد که بیان کننده این واقعیت است که اگر ما واقعا قادر به درک مکانیک کوانتومی شویم، این احتمال وجود دارد که بتوان آن را در توصیف پدیده‌های بزرگ مقیاس (چیزی که ما بعنوان جهان کلاسیکی می شناسیم) بکار بندیم. اکنون نگاهی به مقیاس‌هایی که در جهان فیزیکی با آنها سرو کار داریم، می‌اندازیم. مقیاس طول و زمان در حد پایین را به عنوان طول پلانک و زمان پلانک می‌شناسیم. زمان پلانک ($۱۰^{-۴۳}$ ثانیه) که کوتاه‌ترین زمان در جهان فیزیکی می‌باشد، طول پلانک در حدود $۱۰^{-۳۳}$ سانتیمتر در نظر گرفته می‌شود و بعنوان کوتاه ترین طول (واحد بنیادی طول) فرض می‌شود. حال به منظور ترکیب زمان پلانک و طول پلانک، باید هم تئوری کوانتوم و هم تئوری نسبیت عام را بکار بگیریم. تئوری کوانتوم برای مقیاس‌های طول کوچک مجاز می باشد و تئوری نسبیت عام برای مقیاس‌های طول بزرگ و زمان بکار گرفته می‌شود. بعنوان مثال اگر نیازمند توصیف فیزیک سیاه‌چاله و یا جهان در انفجار بزرگ[1] باشیم، لازم است که هر دو، نسبیت عام و تئوری کوانتوم را بکار گیریم. اما تلاش برای متحد کردن کوانتوم و

[1] Big Bang

نسبیت عام به جای اینکه یک هماهنگی ایجاد کند به یک فاجعه منجر می‌شود[۱].

قبل از ترکیب کردن تئوری کوانتوم و تئوری نسبیت عام باید توجه داشت، هنگامی که به مقیاس-های طول کوچک و کوچکتر می رویم نیاز به در نظر گرفتن طبیعت میکروسکوپیک فضا-زمان می‌باشد، و طبیعت فضا-زمان باید با توجه به اصل عدم قطعیت مورد مطالعه قرار گیرد. از نقطه نظر مکانیک کلاسیک، فضا در طول های کوچک دلخواه تخت باقی می‌ماند. مکانیک کوانتومی این نتیجه را تغییر می‌دهد. بطوری‌که همه چیز در این جهان حتی میدان گرانشی در معرض افت و خیز کوانتومی قرار دارند، که این بعلت اصل عدم قطعیت می باشد. عدم قطعیت بیان می کند که میزان افت و خیز میدان گرانشی هنگامی که توجه خود را به ناحیه کوچکتری از فضا معطوف می‌کنیم، بزرگتر می‌شود. در این مقیاس ما به یک ناسازگاری اساسی بین نسبیت عام و نظریه کوانتوم می‌رسیم. از آنجا که هندسه یکنواخت و پیوسته پیش شرط لازمه نسبیت عام می‌باشد، در مقیاس‌های کوچک بعلت افت و خیزهای دنیای کوانتومی این مفهوم مجاز نمی‌باشد. اگر مقیاس-هایی که روزمره با آنها سروکار داریم را در نظر بگیریم افت و خیزهای کاتوره ای همدیگر را از بین می‌برند و مفهوم هندسه پیوسته مجاز می‌باشد. برای درک این موضوع مثالی را ذکر می کنیم. یک عکس را در نظر بگیریم که شامل تعدادی نقاط می‌باشد. هنگامی که ما از فاصله دوری به این عکس نگاه می کنیم، یک تصویر پیوسته از آن را می بینیم ولی هنگامیکه از فواصل خیلی کوچک و مقیاس‌های ریزتر نگاه کنیم، چیزی جز یک سری از نقاط نمی‌بینیم، که هر یک از دیگری جدا می‌باشند. این بیانگر ساختار گسسته است که در مقیاس‌های کوچک ظاهر می‌شوند. کالبد فضا-زمان نیز مشابه با مثال بالا بنظر می‌رسد، گسسته در مقیاس کوچک (مقیاس پلانک) و پیوسته در مقیاس بزرگ. هندسه ناجابجایی[1] ریشه در این دارد که بررسی ساختار فضا-زمان برای طولهای کوچک، رفتاری کوانتومی از خود نشان خواهد داد[۲].

در فیزیک نظری اعتبار برخی از مدل‌ها و یا نظریه ها بر مبنای مقیاس طول مورد بحث قرار می-

[1] Noncommutative geometry

گیرد. در فیزیک نظری مدرن، پدیده های فیزیکی در مقیاس بنیادی از حد پائین، در طول پلانک،

$$l_p = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}} \simeq 1.6\times 10^{-33} cm. \quad (۱-۱)$$

و در حد بالای آن تا شعاع جهان قابل مشاهده، رخ می‌دهند،

$$l_{universe} \simeq 4.4\times 10^{24} cm \simeq (2.7\times 10^{61}) l_p. \quad (۲-۱)$$

همانطور که می‌دانیم نظریه میدان کوانتومی در توصیف فیزیک مرتبط با این نظریه، حداقل تا مقیاس LHC، خوب کار می‌کند،

$$l_{LHC} \simeq 2\times 10^{-18} cm. \quad (۳-۱)$$

اینکه پائین‌تر از این مقیاس (و نیز هنوز بالاتر از مقیاس پلانک) چه اتفاقی می‌افتد سؤالی است که اگر بخواهیم از طریق آزمایش به آن پاسخ دهیم، ممکن است سال‌ها طول بکشد.

اما در این بین فیزیکدانان آنچه را که از این محدوده ناشناخته حاصل می‌شود را جمع آوری می‌کنند و با توجه به اینکه در این مقیاس طول باید تصحیحاتی بر روی نظریه میدان کوانتومی ایجاد شود، پایه‌های ریاضی آن را بنا می‌کنند.

یکی از این مبانی هنوز ناشناخته، کوانتش فضا زمان می‌باشد. در این سناریو مختصات محلی x^μ ، بعنوان عملگرهای هرمیتی در نظر گرفته می‌شوند که رابطه ناجابجایی فضا زمان زیر بین آنهابرقرار می‌باشد.

$$[x^\mu, x^\nu] = i\theta^{\mu\nu}, \quad (٤-۱)$$

که $\theta^{\mu\nu}$ ماتریس پادمتقارن حقیقی است که ابعاد آن مجذور طول می‌باشد. اگر این ماتریس ثابت باشد، رابطه بالا جبر هایزنبرگ را تولید می کند و رابطهٔ عدم قطعیت فضازمان را بصورت زیر در می‌آورد.

$$\Delta x^{\mu}\Delta x^{\nu} \geq \frac{1}{2}\left|\theta^{\mu\nu}\right|, \tag{۵-۱}$$

که این رابطه همانند روش استانداردی بدست می‌آید که از عدم قطعیت در روابط جابجایی کانونیکی بین محورهای مختصات x^{μ} و تکانه p_{ν} در مکانیک کوانتوم حاصل شد. در این مورد پارامتر ناجابجایی $\theta^{\mu\nu}$، مانند ثابت پلانک $\hbar$ در رابطه کوانتش فضای فاز می‌باشد. در فضای فاز کوانتوم، نقاط، دیگر وجود ندارند. آنها با سلول‌های پلانک از اندازه $\hbar$ جایگزین شده‌اند. به همین علت ون نیومن[1] [۳] مطالعه خواص هندسی مکانیک کوانتومی را بعنوان هندسه بی‌نقطه معرفی کرد. در شاخه ای از ریاضیات نیز فضا زمان کوانتیزه بعنوان "هندسه ناجابجایی" شناخته می‌شود. از دیدگاه ریاضیات محض هندسه ناجابجایی به برنامه‌ای برای متحد کردن ریاضیات با استفاده از ابزارهای کوانتومی می‌پردازد. در این حالت نقاط در فضا زمان کوانتیزه نامعین می‌شوند و بوسیله سلولهایی جایگزین می‌شوند که اندازه آنها با مقیاس طول ناجابجایی $l=\theta^{\frac{1}{2}}$ معین می‌شود. تانسور $\theta^{\mu\nu}$ بطور عام می‌تواند به محورهای فضازمان و یا حتی تکانه نیز بستگی داشته باشد.

کوانتش فضازمان برای حل دو مسئله مهم از فیزیک انرژی بالا پیشنهاد می‌گردد. اولین مسئله، بازبهنجارپذیری[2] می‌باشد. درست همانطور که اصل عدم قطعیت هایزنبرگ در مکانیک کوانتومی از فاجعه فرا بنفش جلوگیری می‌کند،در نظریه میدان کوانتومی نیز برای اجتناب از واگرایی فرابنفش می توان نقاط را به وسیله سلولهای فضازمان جایگزین کرد. دومین مسئله مشکل گرانش کوانتومی می باشد. مدت زمان طولانی است که گمان می‌شود نسبیت عام کلاسیکی در مقیاس طول پلانک با شکست مواجه شده، جائی که اثرات کوانتومی گرانش مهم می‌باشد. بویژه اینکه هندسه کلاسیکی ریمانی فضا زمان باید بوسیله چارچوب ریاضی دیگری جایگزین شود. از آنجا که بر طبق نظریه اینشتین، گرانش بر هندسه فضا زمان تأثیر می‌گذارد، گرانش کوانتومی باید فضا-

---

[1] Von Neumann

[2] Renormalization

زمان را کوانتیزه کند. روش دقیقی برای این کوانتش در حقیقت بطور کامل شناخته نشده است و یکی از بزرگترین چالش‌هایی است که فیزیک نظری جدید با آن روبرو است. هندسه ناجابجایی ممکن است حداقل بتواند راهی را فراهم آورد که ساختار فضا زمان را در این فواصل کوچک بهبود بخشد.

این دو مسئله مهم در حقیقت در قالب یک چارچوب واحد و سیستماتیک از نظریه میدان بر روی فضا زمان کوانتیزه به هم مرتبط می‌باشند. این چارچوب، نظریه میدان ناجابجا نامیده می‌شود و ممکن است که مدل فیزیکی مناسبی در محدوده مقیاسهای بین l_p و l_{LHC} باشد. در حقیقت یکی از مهمترین عرصه‌های تحقیق در این زمینه، مربوط به مطالعه اشعه‌های کیهانی پر انرژی می‌باشد. این نظریه‌های میدان به دلایل متعددی مورد بررسی قرار می‌گیرند. اول اینکه بعضی از نظریه‌های کوانتوم، در فضا زمان ناجابجا بهتر از فضا زمان معمولی رفتار می‌کنند. در حقیقت بعضی از آنها کاملا متناهی و غیر اختلالی هستند. در این روش ناجابجایی فضا زمان می‌تواند بعنوان جایگزینی به نظریه ریسمان و ابر تقارن باشد. دوم اینکه زمینه‌ای مفید برای مطالعه فیزیک ورای مدل استاندارد و نیز همچنین فیزیک استاندارد در میدان خارجی قوی، را فراهم می‌آورد. سوم اینکه برای بررسی برخی از موضوعات اساسی در نظریه میدان مانند بازبهنجارپذیری راه چاره‌هایی پیش روی ما قرار می‌دهد. سرانجام می‌توان گفت که نظریه میدان را به گرانش مرتبط می‌سازد.

۱-۲- کوانتش فضا زمان – فضا زمان اشنایدر

ایده اینکه فضا زمان ناجابجاست در حقیقت بسیار قدیمی است و معمولا به هایزنبرگ نسبت داده می‌شود که آنرا در سال ۱۹۳۰ بعنوان وسیله‌ای برای تنظیم واگرایی فرابنفش که به نظریه میدان کوانتومی آسیب می‌رساند، پیشنهاد داد. هایزنبرگ این نظر را در نامه‌ای به پیرلز[1]، که آنرا در زمینه

[1] Pierls

سیستم‌های الکترونیکی غیر نسبیتی در میدان مغناطیسی خارجی اعمال کرده بود، بیان داشت. پیرلز در مورد آن با پائولی صحبت کرد که بعد نیز او، آنرا به اپنهایمر[1] گفت، اپنهایمر این مسئله را به دانشجوی فارغ التحصیل خود اشنایدر[2] بیان داشت،که امروز بعنوان کسی که اولین مقاله را در فضا زمان ناجابجا ارائه کرد معروف است[٥,٤]. در پایه‌های مناسب، جبری که برای فضا زمان اشنایدر برقرار است بعنوان تصحیحی بر روی روابط کانونیکی فضای فاز می‌باشد که به صورت زیر معرفی می شود.

$$\begin{cases}[x^\mu, x^\nu] = il\hbar^{-1}(x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu), \\ [x^\mu, p_\nu] = i\hbar\delta^\mu_\nu + il\hbar^{-1} p^\mu p_\nu, \\ [p_\mu, p_\nu] = 0, \end{cases} \qquad (\text{٦-١})$$

این جبر شامل طول کمینه بنیادی l، مقیاس ناجابجایی (همانطور که در بخش (١) معرفی شد) می‌باشد، طوری که در حد $l = 0$ فضای فاز کلاسیکی مکانیک کوانتوم حاصل می‌شود. انگیزه اصلی در این روابط این بود که معرفی مقیاس طول l معادل با در نظر گرفتن هادرونها[3] در نظریه میدان کوانتومی بعنوان اشیای گسترده می‌باشد. روابط ناجابجایی، بالا فضای گسسته ای را توصیف می‌کند که در تناقض با ناوردایی لورنتز است.

شواهد محکم بیشتری برای ناجابجایی فضا زمان از تئوری ریسمان بدست آمده که در حال حاضر این تئوری بصورت بحث بر انگیزی، محتمل‌ترین کاندیدا برای نظریه کوانتومی گرانش است. ریسمان‌ها شامل مقیاس طول بنیادی هستند که فواصل کوچک‌تر از آن قابل مشاهده و اندازه‌گیری نیست [٦].

موضوع اصلی این پایان نامه بررسی برخی جنبه های مکانیک کوانتومی ناجابجایی و همچنین آثار

---

[1] Oppenheimer
[2] H. Snyder
[3] Hadrons

آن در کیهانشناسی و گرانش می‌باشد. ما در اینجا نشان می‌دهیم که چگونه ساختارهای فیزیکی ناجابجا می‌شوند و نتایج این اثرات را در مدل خود، بررسی و مطالعه می‌کنیم.

در این پایان نامه، ما مدل اسکالر-تانسوری D-بعدی خلأ را مورد بررسی قرار می‌دهیم. حل‌های دقیق کلاسیک و کوانتوم را به دست می‌آوریم و سازگاری خوب بین این حل‌ها را نشان دادیم. نیز با بدست آوردن مشاهده پذیرهای دیراک نشان دادیم که ثابت کیهان‌شناسی در این مدل کوانتیده است.

مروری بر آنچه در این پایان نامه انجام داده‌ایم بصورت زیر است.

در فصل اول مقدمه‌ای بر ناجابجایی و دلایل مطالعه آن ارائه شده است. در فصل دوم مدل خود را معرفی می‌کنیم و با استفاده از تبدیلات مناسب آن را به فرم ساده‌تر می‌نویسیم. از روی لاگرانژی سیستم مورد نظر، هامیلتونی را می‌سازیم. در فصل سوم حل‌های کلاسیکی را بدست می‌آوریم. در فصل چهارم با توضیحی در خصوص کیهان‌شناسی کوانتومی، تابع موج مدل را از طریق معادله ویلر-دویت در ریزابرفضا بدست می‌آوریم و نیز مشاهده پذیرهای دیراک را بررسی می‌کنیم و نشان می دهیم که ثابت کیهان‌شناسی کوانتیده است. در فصل پنجم مدل را در فضای فاز ناجابجایی حل می‌کنیم و اثرات تغییر ساختار فضای فاز را بررسی می‌کنیم و تابع موج را در این حالت بررسی کرده و توصیف تحولی برای تابع موج ارائه می‌دهیم.

فصل ۲:

به دست آوردن چگالی لاگرانژی و هامیلتونی کنش

۲-۱- معرفی مدل

در ابتدا از کنش D-بعدی خلأ در نظریه اسکالر-تانسوری[1] شروع می‌کنیم، که در آن میدان نرده-ای بطور غیر کمینه[2] به تانسور ریچی جفت شده است.قبل از هر چیز کمی در باره نظریه اسکالر-تانسور گرانش توضیح می‌دهیم.

با وجود موفقیتهای بسیار نسبیت عام، که امروزه نظریه استاندارد گرانش نامیده می‌شود، این نظریه به دلایلی موجب ظهور نظریه های جایگزین بسیاری شده است. از بین آنها ما به نظریه اسکالر-تانسور می پردازیم. بنظر می رسد که نظریه قدیمی گرانش اسکالر بر پایه نسبیت عام از نو احیا شده است. و در آن میدان نرده ای، به صورت غیر کمینه با انحنای فضا زمان جفت شده است[۷]. نظریه اسکالر-تانسوری ابتدا بوسیله جردن[3] با غوطه‌ور ساختن منیفلد[4] انحنا دار چهار بعدی در فضا زمان پنج بعدی تخت مورد بررسی قرار گرفت [۸]. او نشان داد که قیدی در فرمولبندی کردن هندسه تصویر، وجود دارد و آن می‌تواند میدان اسکالر چهار بعدی باشد، که منجر به توصیف ثابت گرانشی وابسته به فضا زمان می‌شود. او همچنین احتمال ارتباط نظریه خودش را با نظریه پنج بعدی دیگری که بوسیله کالوزا[5] و کلین[6] پیشنهاد شده بود را مورد بررسی قرار داد[۹].

$$S=\int d^{D}x\sqrt{-g}e^{-\varphi}(R-\omega(\nabla\varphi)^{2}-2\Lambda), \qquad (۱-۲)$$

[1] Scalar-tensor theory
[2] Nonminimally
[3] Jordan
[4] Manifold
[5] Kaluza
[6] Klein

که R در اینجا اسکالر ریچی، φ میدان دیلاتون[1]، g دترمینان متریک فضا زمان، ω ثابت فضا زمان و Λ ثابت کیهانشناسی مؤثر می‌باشد[۱۰].

برای بررسی مدل چگالی لاگرانژی را با توجه به کنش بدست می‌آوریم. اگر متریکی را که برای جهان تخت، همگن و همسانگرد را در نظر بگیریم که به‌صورت زیر پایه گذاری شده است:

$$ds^2 = -N(t)^2 dt^2 + e^{2\alpha(t)} dx_i^2 \quad i = 1,2,\dots,(D-1), \tag{۲-۲}$$

که در اینجا $e^{\alpha(t)}$ عامل مقیاس[2] جهان می‌باشد، $N(t)$ تابع گذر[3] است. اگر با توجه به متریک تانسور ریچی را محاسبه کنیم خواهیم داشت،

$$R = 2(D-1)\frac{\ddot{\alpha}(t)}{N(t)^2} - 2(D-1)\frac{\dot{\alpha}(t)\dot{N}(t)}{N(t)^3} + (D-1)(D-2)\frac{\dot{\alpha}(t)^2}{\alpha(t)^2 N(t)^2}. \tag{۳-۲}$$

که برای محاسبه اسکالر ریچی بعنوان نمونه قسمتی از محاسبات را در اینجا می‌آوریم.

$$R_{\mu\nu} = \partial_k \Gamma^k_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^k_{\mu k} - \Gamma^\eta_{\mu k}\Gamma^k_{\eta k} - \Gamma^k_{\eta\nu}\Gamma^\eta_{\mu k}. \tag{۴-۲}$$

که نمادهای کریستوفر نیز بصورت زیر می‌باشند،

$$\Gamma^k_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{k\lambda}(\partial_\mu g_{\lambda\nu} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}). \tag{۵-۲}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^0_{00} &= \frac{1}{2} g^{00}(\partial_0 g_{00} + \partial_0 g_{00} - \partial_0 g_{00}) = \frac{\dot{N}(t)}{N(t)}, \\
\Gamma^0_{11} &= \frac{1}{2} g^{00}(\partial_1 g_{01} + \partial_1 g_{10} - \partial_0 g_{11}) = \frac{-\dot{\alpha}(t)\alpha(t)}{N(t)^2} e^{2\alpha(t)}, \\
\Gamma^0_{22} &= \Gamma^0_{33} = \frac{-\dot{\alpha}(t)\alpha(t)}{N(t)^2} e^{2\alpha(t)},
\end{aligned} \tag{۶-۲}$$

[1] Dilaton field
[2] Scale factor
[3] Lapse function

$$\Gamma^0_{(D-1)(D-1)} = \frac{-\dot{\alpha}(t)\alpha(t)}{N(t)^2} e^{2\alpha(t)},$$
$$\Gamma^1_{01} = \frac{1}{2} g^{11}\partial_0 g_{11} = \dot{\alpha}(t),$$
$$\Gamma^2_{02} = \frac{1}{2} g^{22}\partial_0 g_{22} = \dot{\alpha}(t),$$
$$\Gamma^1_{22} = \Gamma^1_{33} = \dots = \Gamma^1_{(D-1)(D-1)} = 0,$$
$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^n_{1n} = 0,$$
$$R_{00} = -(D-1)\ddot{\alpha}(t)e^{2\alpha(t)} + (D-1)\frac{\dot{\alpha}(t)\dot{N}(t)}{N(t)} e^{2\alpha(t)},$$
$$R_{11} = \frac{\ddot{\alpha}(t)\alpha(t)}{N(t)^2} e^{2\alpha(t)} + (D-2)\frac{\dot{\alpha}(t)^2}{N(t)^2} e^{2\alpha(t)} - \frac{\dot{\alpha}(t)\alpha(t)\dot{N}(t)}{N(t)^3} e^{2\alpha(t)},$$

$$R_{(D-1)(D-1)} = \frac{\ddot{\alpha}(t)\alpha(t)}{N(t)^2} e^{2\alpha(t)} + (D-2)\frac{\dot{\alpha}(t)^2}{N(t)^2} e^{2\alpha(t)} - \frac{\dot{\alpha}(t)\alpha(t)\dot{N}(t)}{N(t)^3} e^{2\alpha(t)}, \qquad (۷-۲)$$

$$\sqrt{-g} = N(t)e^{(D-1)\alpha(t)}, \qquad (۸-۲)$$

با جای‌گذاری در کنش داریم:

$$S = \int d^D x N(t) e^{(D-1)\alpha(t)-\varphi(t)} [2(D-2)\frac{\ddot{\alpha}(t)}{N(t)^2} + (D-2)\frac{\dot{\alpha}(t)\dot{N}(t)}{N(t)^3} + (D-1)(D-2)\frac{\dot{\alpha}(t)^2}{N(t)^2} - \omega(\nabla\varphi)^2 - 2\Lambda]. \qquad (۹-۲)$$

با انتگرال گیری روی قسمت فضایی کنش و نیز با توجه به این نکته که جملات دیفرانسیل کامل بر طبق قضیه دیورژانس به انتگرال روی سطح تبدیل می‌شوند که در زمانیکه سطح در بینهایت باشد، این جمله در چگالی لاگرانژی نقش مؤثری بازی نمی‌کند، بنابراین کنش مؤثر بصورت زیر خواهد شد.

$$S = \int dt \frac{d}{dt}(2(D-2)\frac{\dot{\alpha}(t)}{N(t)} e^{(D-1)\alpha(t)-\varphi(t)}) e^{(D-1)\alpha(t)-\varphi(t)} [-2(D-2)\frac{\dot{\alpha}(t)^2}{N(t)} + 2(D-1)\frac{\dot{\alpha}(t)\dot{\varphi}(t)}{N(t)} + (D-1)(D-2)\frac{\dot{\alpha}(t)^2}{N(t)} + \frac{\omega}{N(t)}\dot{\varphi}(t)^2 - 2\Lambda N(t)].$$