دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی

گروه آمار

پایاننامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته‌ی

آمار ، گرایش آمار ریاضی

عنوان

گراف های اشتراك تصادفی و رده بندی

استاد راهنما

دکتر رامین ایمانی

استاد مشاور

دکتر هژیر حومه ای

پژوهشگر

نازیلا جلیلی خسرقی

بهمن ۱۳۸۹

بسم الله الرّحمن الرّحیم

بارخدایا، از تو راه خیر را میطلبم، که تو به آن آگاهی. پس درود بفرست بر محمد و خاندان او و هرچه خیر است برای من مقدر فرمای. و به ما الهام کن شناخت راهی را که باید اختیار کنیم و آن را وسیله ای ساز که به آنچه برای ما مقرر کرده ای راضی باشیم و در برابر حکم تو تسلیم شویم. پس غبار تردید از دل ما بزدای و ما را به یقینی چون یقین مخلصان یاری فرمای.

بارخدایا، برای ما مخواه که در شناخت آنچه برای ما گزیده ای عاجز آییم، آنگاه تقدیر تو را حقیر شماریم و آنچه را خشنودی تو در آن است مکروه داریم و به راهی رویم که ما را از سرانجام نیک دور دارد و به غیر عافیت نزدیک گرداند.

خداوندا، ناخشنودی ما را از قضای خود به خشنودی بدل فرمای و هر حکم تو را که دشوار می شماریم بر ما آسان گردان. در دل ما انداز که مطیع اراده و منقاد مشیت تو باشیم، تا در گزاردن هر کار که فرمان داده ای در آن شتاب ورزیم درنگ نکنیم و در هر کار که خواسته ای درنگ کنیم شتاب نورزیم و آنچه را که تو دوست میداری ناخوش ننگاریم و آنچه را تو ناخوش میداری اختیار نکنیم.

بارخدایا، کار ما به راهی انداز که فرجامش پسندیده تر بود و سرانجامش بهتر، که هر فایدت که از تو رسد گرانبهاست و هر بخشش که کنی عظیم است و هر چه خواهی کنی، و انت علی کل شیء قدیر.

فرازی از دعای سی و یکم صحیفهٔ سجادیه

تقدیم به:

پدر و مادرم

بنام خدا

و لَمْ يَشْكُر الْمَخلوق لَمْ يَشْكُر الْخالِقْ.

سپاس و ستایش پروردگار متعال را که به اینجانب توفیق تلاش در راه کسب علم و دانش را عطا فرمود. امیدوارم بتوانم آموخته‌هایم را در راه پیشرفت علمی وطن خویش مورد استفاده قرار دهم.

در آغاز وظیفه‌ی خود می‌دانم از زحمات بی دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر **رامین ایمانی** ، صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم که قطعاً بدون راهنمایی های ارزنده‌ی ایشان این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

از جناب آقای دکتر**هژیر حومه ای** که زحمات مطالعه و مشاوره‌ی این رساله را تقبل فرمودند ، کمال امتنان را دارم.

ازکلیه دبیران دوران تحصیلم، اساتید گرامی مخصوصاً از جناب آقایان دکتر حسین جباری خامنه ، دکتر حسین بیورانی ، و نیز کارکنان محترم دانشکدهٔ علوم ریاضی و تحصیلات تکمیلی دانشگاه تبریز که در مدت تحصیلات دانشگاهی اینجانب زحمات فراوانی را متحمل شده‌اند، تشکر می‌نمایم.

از جناب آقای دکتر مرتضی فغفوری که در جهت استفاده از نرم افزار زی پرشین راهنمایی های ارزنده ای فرموده اند، کمال تشکر را دارم.

در پایان از کلیه اعضای خانواده‌ام که در تمامی مراحل همواره یار و مشوق من بوده‌اند، سپاسگزاری می‌کنم.

نازیلا جلیلی خسرقی
بهمن ۱۳۸۹

نام خانوادگی دانشجو: جلیلی خسرقی نام: نازیلا

عنوان: گراف های اشتراک تصادفی و رده بندی

استاد راهنما : دکتر رامین ایمانی

استاد مشاور : دکتر هژیر حومه ای

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: آمار گرایش: آمار ریاضی دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی تاریخ فارغ التحصیلی: بهمن ۱۳۸۹ تعداد صفحات: ۶۸

کلید واژه‌ها: گراف دو بخشی تصادفی، گراف اشتراک تصادفی، خوشه بندی

چکیده

ما خاصیت های گراف های اشتراک تصادفی تولید شده به وسیلهٔ گراف دو بخشی تصادفی را مطالعه می کنیم. توزیع تعداد رئوس منفرد، توزیع درجهٔ رئوس و همبندی گراف های اشتراک تصادفی، را مورد مطالعه قرار می دهیم. این نتایج در مطالعهٔ خاصیت های مجانبی گراف های اشتراک تصادفی، به کار می رود. بالاخره به صورت مختصر به کاربرد گراف های اشتراک تصادفی در رده بندی داده ها، می پردازیم.

فهرست مطالب

مقدمه

گراف های دو بخشی که یک نوع خاص ازگراف ها هستند، همان طورکه از نامشان پیداست از دو بخش مثلاً V و W ساخته می شود. اغلب رابطهٔ بین اشیاء و خصوصیاتشان به وسیلهٔ گراف های دو بخشی، توصیف می شود به این صورت که V زیر مجموعهٔ n -عضوی اشیاء را نمایش می دهد و W زیر مجموعهٔ m -عضوی خاصیت ها را نمایش می دهد. دو شیء از V مشابه نامیده می شوند، اگر آن ها حداقل يك خاصیت مشابه داشته باشند. (یا در حالت کلی s خاصیت مشترک که s يك عدد طبیعی است را) داشته باشند وبه طور مشابه برای خاصیت ها نیز می توان بیان کرد. اعضای مشابه در يك رده قرار می گیرند. مطالعه در مورد رده ها برای ما اهمیت دارد. گراف های اشتراک تصادفی که ازگراف های دو بخشی تصادفی بوجود می آیند، گراف های تصادفی هستند که براساس اشتراک همسایه های اعضای دو بخش V و W تولید می شوند.

ما در این پایان نامه دو مدل خاص ازگراف های اشتراک تصادفی یعنی مدل های گراف اشتراک تصادفی فعال و منفعل را بررسی می کنیم که مدل فعال توسط اعضای V و مدل منفعل توسط اعضای W ساخته می شود. گودهارت [1] و یاورسکی [2] این دو مدل رامعرفی کرده و به بررسی خواص آن ها پرداختند([۳] و [۴]). همین طورگراف اشتراک تصادفی توسط ریبارژیك [3] [۶] نیز مطرح شده است.

سرانجام گودهارت و دوستانش در [۷] دو مدل ازگراف های اشتراك تصادفی را معرفی کرده و ویژگی های آن ها را بیان کرده اند و در مورد همبندی این دو مدل بحث کرده اند، که هدف اصلی این پایان نامه می باشد، به همین منظور ، ما ابتدا در فصل نخست تعاریف و مفاهیم اولیه را که در فصل های بعد از آنها استفاده خواهیم کرد، بیان می کنیم. در فصل دوم در مورد ابرگراف های تصادفی و رابطهٔ این ابرگراف ها با ابر گراف تولید شده به وسیلهٔ گراف دو بخشی تصادفی بحث می کنیم. سرانجام در فصل آخر خواص گراف دو بخشی تصادفی را بیان کرده و دو مدل ازگراف های اشتراك تصادفی و ویژگی های آن ها را معرفی کرده و همبندی آن ها را در حالت

[1] Godehardt
[2] Jaworski
[3] rybarczyk

مجانبی بیان می‌کنیم.

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اولیه

فصل نخست پایان نامه، مروری بر تعاریف و مفاهیم اولیه مربوط به گراف و گراف های تصادفی است که در فصل های آتی از آن ها استفاده خواهیم کرد. البته باید به این نکته توجه کنیم که تمام تعاریف و ویژگی های مربوط به گراف را نمی توان در یک فصل خلاصه کرد، اما ما حتی الامکان سعی خواهیم کرد تعاریف و ویژگی هایی که در فصل های آتی این پایان نامه، از آن ها استفاده شده، به طور مختصر شرح دهیم. علاقه مندان می توانند به منابع [۲] ، [۸] و [۹] مراجعه نمایند.

۱.۱ گراف و ویژگی های آن

بسیاری از وضعیتهای دنیای واقعی را می توان به راحتی به وسیلهٔ نموداری متشکل از مجموعه ای از نقاط وخطوطی که زوجهای معینی از این نقاط را به هم وصل می کنند، توصیف کرد. برای مثال نقاط می توانند معرف افراد باشند، خطوط واصل بین زوجها می توانند معرف دوستها باشند؛ و یا نقاط ممکن است مراکز ارتباطی و خطوط، معرف ارتباط های آن ها باشند. توجه کنید در چنین نمودارهایی آنچه بیشتر مورد توجه است آن است که آیا دو نقطهٔ مفروض به وسیلهٔ یك خط به هم وصل شده اند یا نه؛ شیوهٔ وصل نقاط به هم مهم نیست. تجرید ریاضیاتی وضعیتهایی از این نوع، به پیدایش مفهوم گراف منجر شده است.

تعریف ۱.۱.۱. گرافی مانند $G=(V,E)$ ساختاری است مرکب از یك مجموعهٔ متناهی مانند V از رئوس (که نقطه ها و گره ها نیز گفته می شوند) و یك مجموعهٔ متناهی مانند E از یال ها به طوری که هر یال e به جفتی از رئوس مانند v و w وابسته شده است، می نویسیم $e=\{v,w\}$ یا $e=\{w,v\}$ و می گوییم e یالی بین v و w است، یا از هر دوی v و w می گذرد و یا رئوس v و w را به هم وصل می کند.

درحالتی که دو رأس v و w تشکیل یك یال در گراف G را می دهد، گوییم این دو رأس با هم همسایه یا مجاور هستند.

گراف تهی، گرافی است که مجموعه یال های آن تهی باشد، یا به عبارتی گرافی که به ازای هر دو رأس از مجموعه V ، هیچ یالی بین این دو رأس وجود نداشته باشد.

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنید G یک گراف غیر تهی باشد. درجه یک رأس مانند v از گراف G ، که به صورت $deg(v)$ بیان می شود، برابر است با تعداد یال هایی از گراف G که از رأس v می گذرند.

رأسی که درجه آن صفر بوده و هیچ همسایه ای نداشته باشد، رأس منفرد نامیده می شود.

تعریف ۳.۱.۱. اگر $G = (V, E)$ یك گراف باشد، $G' = (V', E')$ را یك زیر گراف G می نامند هر گاه $V' \subseteq V$ و $E' \subseteq E$ باشد.

تعریف ۴.۱.۱. گراف ساده ای را که در آن هر جفت از رأس های متمایز به وسیلهٔ یك یال به هم متصل باشند، گراف کامل می نامند و با نماد K_n نشان می دهند. n تعداد رئوس را بیان می کند.

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنید $G = (V, E)$ یك گراف باشد. اگر بتوان مجموعه رأس ها را به دو زیر مجموعهٔ X و Y به طوری افراز کرد که هر یال دارای یك انتها در X و یك انتها در Y باشد. این گراف را گراف دو بخشی گویند.

تعریف ۶.۱.۱. یك گراف دو بخشی کامل، یك گراف دو بخشی ساده با افراز (X, Y) است که در آن هر رأس X به هر رأس Y متصل است. اگر $|Y| = n$ و $|X| = m$ ، چنین گرافی را به وسیلهٔ $K_{m,n}$ نشان می دهند.

تعریف ۷.۱.۱. مسیر در G ، دنبالهٔ ناتهی $v_0 e_1 v_1 e_2 \cdots e_k v_k$ است که جمله های آن به طور متناوب رئوس و یال ها هستند به قسمی که برای $1 \leq i \leq k$ ، دو انتهای e_i ، v_i و v_{i-1} هستند که در آن یال ها و رئوس متمایز می باشند.

تعریف ۸.۱.۱. فرض کنید $G = (V, E)$ یک گراف غیر تهی باشد. گراف G را همبند گوئیم هرگاه بین هر دو رأس متمایز G ، مسیری وجود داشته باشد. گرافی را که همبند نباشد، ناهمبند گوئیم.

تعریف ۹.۱.۱. ابرگراف $\mathcal{H} = \mathcal{H}(V, E)$ جفت $\langle V, E \rangle$ می باشد به طوری که $V = V(\mathcal{H})$ مجموعه ای ناتهی از رئوس می باشد و $E = E(\mathcal{H})$ مجموعه ای ناتهی از زیرمجموعه های V می باشد. توجه کنید که در این تعریف مجموعه ها ناتهی می باشند و همین طور یال تکراری وجود ندارد. تعداد یال های ابرگراف را با نماد $e(\mathcal{H})$ نشان می دهیم. ابر گرافی که یال های آن حداکثر d رأس دارد با $\overline{\mathcal{H}} = (N_1, N_2, \cdots, N_d)$ نشان می دهیم. N_i تعداد یال های متشکل از i رأس را بیان می کند که در اینجا $i = 1, 2, \cdots, d$ می باشد. واضح است که برای هر i ، $0 \leq N_i \leq \binom{m}{i} = M_i$. برای این دنباله می توان بیان کرد:

$$\underline{N} = (N_1, N_2, \cdots, N_d) \prec (N_1', N_2', \cdots, N_d') = \underline{N'} \iff \forall_{1 \leq i \leq d}\ N_i \leq N_i'.$$

تعریف ۱۰.۱.۱. اگر یك ابرگراف هیچ یال تکراری نداشته باشد و تمامی یال های آن از d رأس تشکیل شده باشد به آن ابرگراف، $d-$ یکنواخت گفته می شود.

با توجه به تعریف گراف می توان گفت که گراف $G = (V, E)$ یك ابرگراف $2-$ یکنواخت می باشد.

۲.۱ گراف های تصادفی

فرض کنید گراف G دارای n رأس است که احتمال انتخاب یک یال بین دو رأس متمایز آن، برابر p است و انتخاب یال ها مستقل از همدیگر صورت می گیرد.

تعریف ۱.۲.۱. گراف تصادفی $G(n,p)$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$G(n,p) : \Omega \longrightarrow \mathcal{G}_n$$

$\mathcal{G}_n$: مجموعه تمام گراف های با n رأس.
به عبارت دیگر گراف تصادفی [1] ، تابعی است که به هر عضو فضای نمونه، یک گراف با n رأس اختصاص می دهد. لازم به ذکر است که بیشتر قضایا و مسائل مربوط به گراف های تصادفی، با استفاده از روش های احتمالی حل می شوند (علاقه مندان می توانند در این زمینه به منابع [۱] و [۵] مراجعه نمایند).

تعریف ۲.۲.۱. یک گراف دو بخشی تصادفی [2] با دو بخش (V,W) از مجموعه رئوس $V \cup W$ که با نماد $\mathscr{BG}_{n,m}\left(n, \mathscr{P}_{(m)}\right)$ نشان می دهیم و

$$V \cup W = \{v_۱, v_۲, \ldots, v_n\} \cup \{w_۱, w_۲, \ldots, w_m\} \quad , \quad |V| = n\ ,\ |W| = m$$

به صورت زیر ساخته می شود:

۱. هر رأس $v \in V$ ، درجه و همسایه هایش از مجموعه W را، به طور مستقل از سایر رئوس V انتخاب می کند.

۲. رأس v ، درجه اش را مطابق توزیع احتمال $\mathscr{P}_{(m)}$ انتخاب می کند به طوری که:

$$\mathscr{P}_{(m)} = (P_۰, P_۱, \ldots, P_m) \qquad , \qquad P\left\{|\Gamma(v)| = k\right\} = P_k\ ,\ k = ۰, ۱, \ldots, m$$

که در آن $\Gamma(v)$ ، برابر مجموعه همسایه های رأس v [3] است.

[1] Random graphs
[2] Random bipartite graph
[3] در گراف ها، مجموعه همسایه های یک رأس را با $N_G(.)$ نشان می دادیم.

۳. رأس v با درجهٔ k ، مجموعهٔ همسایه هایش را به طور یکنواخت از تمام زیر مجموعه های k عضوی از W انتخاب می کند، یعنی احتمال اینکه هر $S \subseteq W$ ، با اندازهٔ k ، با مجموعه همسایه های رأس v منطبق باشد، برابر است با:

$$P\{S = \Gamma(v)\} = \frac{P\{|\Gamma(v)| = k\}}{\binom{m}{k}} = \frac{P_k}{\binom{m}{k}} \tag{۱.۱}$$

و این احتمال را با p_k نشان می دهیم.

تعریف ۳.۲.۱. یك گراف با مجموعه رئوس $V = \{v_۱, v_۲, \cdots, v_n\}$ که در آن (v_i, v_j) یك یال می باشد اگر و تنها اگر v_i و v_j حداقل s همسایه مشترك را در $\mathscr{BG}_{n,m}\left(n, \mathscr{P}_{(m)}\right)$ داشته باشند. یعنی $s \geq |\Gamma(v_i) \cap \Gamma(v_j)|$. که در آن $s \geq ۱$ ، این گراف را گراف اشتراك تصادفی فعال [۴] گوییم.

تعریف ۴.۲.۱. یك گراف با مجموعه رئوس $W = \{w_۱, w_۲, \cdots, w_m\}$ که در آن (w_i, w_i) یك یال می باشد اگر و تنها اگر w_i و w_j حداقل s همسایه مشترك را در $\mathscr{BG}_{n,m}\left(n, \mathscr{P}_{(m)}\right)$ داشته باشند. یعنی $s \geq |\Gamma(w_i) \cap \Gamma(w_j)|$. که در آن $s \geq ۱$ ، این گراف را گراف اشتراك تصادفی منفعل [۵] گوییم.

تعریف ۵.۲.۱. $\mathcal{H}(d, m, N)$ ابرگرافی با m رأس و N یال می باشد که به صورت تصادفی از بین تمام ابرگراف های $d-$ یکنواخت انتخاب می شود.

$\mathcal{H}(۲, m, N)$ همان $G(m, N)$ می باشد که G یك گراف تصادفی است.

تعریف ۶.۲.۱. $\mathcal{H}(d, m, p)$ یك ابرگراف تصادفی $d-$ یکنواخت با m رأس می باشد که هر یال آن به طور مستقل از سایر یال ها با احتمال p رخ می دهد.

$\mathcal{H}(۲, m, p)$ همان $G(m, p)$ می باشد که G یك گراف تصادفی است.

تعریف ۷.۲.۱. $\mathcal{H}(\leq d, m, \underline{N})$ که در آن $\underline{N} = (N_۱, N_۲, \cdots, N_d)$ ، یك ابرگراف تصادفی با m رأس می باشد که به طور یکنواخت از بین تمام ابرگراف های $\overline{\mathcal{H}} = (N_۱, N_۲, \cdots, N_d)$ انتخاب می شود.

تعریف ۸.۲.۱. $\mathcal{H}(\leq d, m, \underline{p})$ که در آن $\underline{p} = (p_۱, p_۲, \cdots, p_d)$ ، یك ابرگراف تصادفی با m رأس می باشد که در آن یك یال با i رأس با احتمال p_i ، مستقل از تمام یال های دیگر رخ می دهد.

[۴] Random active intersection graph

[۵] Random passive intersection graph

۳.۱ تعاریف دیگر

تعریف ۱.۳.۱. اگر X و Y دو متغیر تصادفی باشند، گوئیم متغیر تصادفی Y ، با ترتیب تصادفی(احتمالی) کوچکتر از متغیر تصادفی X است اگر و تنها اگر داشته باشیم:

$$P\{Y > u\} \leq P\{X > u\} \qquad , \qquad \forall u \in (-\infty, \infty)$$

اگر چنین شرطی برای دو متغیر تصادفی X و Y برقرار باشد، در این صورت خواهیم نوشت: $Y \leq X$.
در یک حالت خاص، اگر X و Y دو متغیر تصادفی گسسته باشند به طوری که داشته باشیم:

$$P\{X = k\} = P_k \quad , \quad P\{Y = k\} = Q_k \quad , \qquad k = 0, 1, \dots, m$$

شرط بالا به صورت زیر ساده می شود:

$$\begin{aligned} P\{Y > u\} &\leq P\{X > u\} \\ P\{Y \leq u\} &\geq P\{X \leq u\} \\ \sum_{k=0}^{u} Q_k &\geq \sum_{k=0}^{u} P_k \qquad , \qquad u = 0, 1, 2, \dots, m \end{aligned}$$

در ادامه، به تعریف O (اُیِ بزرگ) و o (اُیِ کوچک) خواهیم پرداخت که در اثبات قضیه ها و لم ها از آن ها بیشتر استفاده خواهیم کرد.

تعریف ۲.۳.۱. فرض کنید $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع باشند، می نویسیم $f(x) = O(g(x))$ (f برابر است با اُیِ بزرگ g)، اگر و تنها اگر یک عدد ثابت و مثبت c وجود داشته باشد که برای x های به اندازه کافی بزرگ، $f(x) \leq cg(x)$.
یعنی O ، یک کران بالا را برای تابع $f(x)$ با یک ضریب ثابت ارائه می دهد.

تعریف ۳.۳.۱. فرض کنید $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع باشند. می نویسیم $f(x) = o(g(x))$ (f برابر است با اُیِ کوچک g)، اگر و تنها اگر زمانی که x به بی نهایت میل می کند، نسبت $\frac{f(x)}{g(x)}$ همگرا به صفر باشد.
یعنی وقتی x به بی نهایت میل می کند، مقدار $f(x)$ نسبت به مقدار $g(x)$ ناچیز است.
به بیان دیگر

$$f(x) = o(g(x)) \Leftrightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

فصل ۲

ابرگراف های تصادفی

۱.۲ خاصیت یکنوایی

اگر یك ابر گراف $\mathcal{H}(V, E_1)$ همبند باشد، آن گاه ابرگراف $\mathcal{H}(V, E_2)$ که در آن $E_1 \subseteq E_2$ نیز همبند خواهد بود. در واقع همبندی خاصیت یکنوا می باشد. در بخش بعدی در مورد همبندی ابرگراف ها صحبت خواهیم کرد که از خاصیت یکنوایی برای بیان همبندی ابرگراف ها استفاده خواهیم کرد. بنابراین در این بخش در مورد خاصیت یکنوایی ابرگراف ها صحبت می کنیم.
فرض کنید Γ یك مجموعهٔ متناهی باشد، برای مثال می توان فرض کرد که مجموعه ای است که شامل m عدد طبیعی می باشد، یعنی $[m] = \{1, 2, \cdots, m\}$. فرض کنید $|\Gamma| = m$ ، $0 \leq p \leq 1$ ، $0 \leq N \leq m$. ما دو نوع زیر مجموعهٔ تصادفی از مجموعهٔ Γ را معرفی می کنیم. اولی زیر مجموعهٔ Γ_p که یك زیر مجموعهٔ تصادفی از Γ می باشد به طوری که هر عضو از Γ با احتمال p و مستقل از سایر اعضاء در Γ_p قرار می گیرد. دیگری Γ_N می باشد که یك زیر مجموعهٔ تصادفی از Γ می باشد به طوری که این زیر مجموعه از بین تمام زیر مجموعه های N -عضوی از Γ به طور یکنواخت انتخاب می شود.

فرض کنید Γ^d تمام زیر مجموعه های d -عضوی از مجموعهٔ Γ می باشد، یعنی $\Gamma^d = \{A \subseteq [m] \,:\, |A| = k\}$.
اگر $V = [m]$ مجموعه رئوس ابرگراف تصادفی باشد، ما می توانیم Γ_p^d را برای $\mathcal{H}(d, m, p)$ و Γ_N^d را برای $\mathcal{H}(d, m, N)$ تعریف کنیم و همین طور $\bigcup_{i=1}^{d} \Gamma_{p_i}^i$ را برای $\mathcal{H}(\leq d, m, \underline{p})$ و $\bigcup_{i=1}^{d} \Gamma_{N_i}^i$ را برای $\mathcal{H}(\leq d, m, \underline{N})$ تعریف می کنیم.

قضیه ۱.۱.۲. *فرض کنید $\mathcal{Q}$ خانواده ای از زیر مجموعه های Γ با خاصیت افزایشی باشد، $0 \leq p_1 \leq p_2 \leq 1$ ، $0 \leq N_1 \leq N_2 \leq M$ آن گاه*

$$P\left\{\Gamma_{p_1} \in \mathcal{Q}\right\} \leq P\left\{\Gamma_{p_2} \in \mathcal{Q}\right\}$$

و

$$P\left\{\Gamma_{N_1} \in \mathcal{Q}\right\} \leq P\left\{\Gamma_{N_2} \in \mathcal{Q}\right\}.$$

برهان. تعریف می کنیم $p_0 = \dfrac{p_2 - p_1}{1 - p_1}$. آن گاه Γ_{p_2} به عنوان اجتماع دو زیر مجموعهٔ مستقل Γ_{p_0} و Γ_{p_1} مطرح می شود. احتمال اینکه عضو ثابت از مجموعهٔ Γ در $\Gamma_{p_0} \cup \Gamma_{p_1}$ باشد برابر است با

$$p_0 + p_1 - p_0 p_1 = \frac{p_2 - p_1}{1 - p_1} + p_1 - \frac{p_2 - p_1}{1 - p_1} p_1 = p_2$$

پس $P\{\Gamma_{p_\circ} \cup \Gamma_{p_۱} \in \mathcal{Q}\} = P\{\Gamma_{p_۲} \in \mathcal{Q}\}$. پس اگر $\Gamma_{p_۱} \in \mathcal{Q}$ باشد، آن گاه طبق اینکه $\mathcal{Q}$ افزایشی است، $\Gamma_{p_\circ} \cup \Gamma_{p_۱} \in \mathcal{Q}$ خواهد بود. پس

$$P\{\Gamma_{p_۱} \in \mathcal{Q}\} \leq P\{\Gamma_{p_\circ} \cup \Gamma_{p_۱} \in \mathcal{Q}\} = P\{\Gamma_{p_۲} \in \mathcal{Q}\}.$$

برای نامساوی دوم، فرایند زیر مجموعهٔ تصادفی را ایجاد می کنیم. به این صورت که در زمان صفر هیچ عضوی در زیر مجموعه نداریم ودر زمان بعدی یک عضو داریم . پس در زمان $N-$ ام، زیر مجموعهٔ ما N عضو خواهد داشت. پس Γ_N ، $N-$ امین زیر مجموعه در فرایند به حساب می آید که دارای N عضو می باشد. بنابراین $\Gamma_{N_۱} \subseteq \Gamma_{N_۲}$. از آنجایی که $\mathcal{Q}$ خاصیت افزایشی است، رخداد $\Gamma_{N_۱} \in \mathcal{Q}$ نتیجه می دهد که $\Gamma_{N_۲} \in \mathcal{Q}$. پس برای هر $N_۱ \leq N_۲$ ،

$$P\{\Gamma_{N_۱} \in \mathcal{Q}\} \leq P\{\Gamma_{N_۲} \in \mathcal{Q}\}.$$

□

از آنجایی که می توان $\mathcal{H}(\leq d, m, \underline{p})$ و $\mathcal{H}(\leq d, m, \underline{N})$ را به ترتیب به صورت اجتماع مجموعه های مستقل $\bigcup_{i=۱}^{d} \Gamma_{p_i}^{i}$ و $\bigcup_{i=۱}^{d} \Gamma_{N_i}^{i}$ در نظر گرفت. پس لم زیر را با توجه به قضیهٔ بالا می توان بیان کرد.

لم ۲.۱.۲. *فرض کنید $\mathcal{Q}$ یك خاصیت افزایشی باشد و $\underline{N} \prec \underline{N'}$ و $\underline{p} \prec \underline{p'}$ آن گاه*

$$p\{\mathcal{H}(\leq d, m, \underline{p}) \in \mathcal{Q}\} \leq p\left\{\mathcal{H}(\leq d, m, \underline{p'}) \in \mathcal{Q}\right\}$$

و

$$p\{\mathcal{H}(\leq d, m, \underline{N}) \in \mathcal{Q}\} \leq p\left\{\mathcal{H}(\leq d, m, \underline{N'}) \in \mathcal{Q}\right\}.$$

قضیه ۳.۱.۲. *فرض کنید $\mathcal{Q}$ یك خاصیت یکنوا از زیرمجموعه های Γ باشد، $\circ \leq a \leq ۱$ و $N = N(m)$ و $M = M(m)$ دنباله ای از اعداد صحیح باشد، به طوری که $\circ \leq N \leq M$. اگر برای هر دنبالهٔ $p = p(m) \in (\circ, ۱)$ ، به طوری که $p = \frac{N}{M} + O(\sqrt{\frac{N(M-N)}{M^۳}})$ داشته باشیم $P\{\Gamma_p \in \mathcal{Q}\} \to a$ ، آن گاه برای هر $m \to \infty$ ، $P\{\Gamma_N \in \mathcal{Q}\} \to a$.*

برهان. ابتدا حالتی که $\mathcal{Q}$ افزایش پیدا می کند را بررسی می کنیم. فرض کنید C یك ثابت دلخواه بزرگ باشد. فرض می کنیم:

$$p_\circ = \frac{N}{M}$$
$$q_\circ = ۱ - p_\circ$$
$$p_+ = min\left\{p_\circ + C\sqrt{\frac{p_\circ q_\circ}{M}}, ۱\right\}$$
$$p_- = max\left\{p_\circ - C\sqrt{\frac{p_\circ q_\circ}{M}}, \circ\right\}.$$

از آنجایی که $\mathcal{Q}$ یك خاصیت یکنوا می باشد، می توان نوشت:

$$\begin{aligned} P\left\{\Gamma_{p_+} \in \mathcal{Q}\right\} &= \sum_{N'=۱}^{M} P\left\{\Gamma_{N'} \in \mathcal{Q}\right\} P\left\{|\Gamma_{p_+}| = N'\right\} \\ &\geq \sum_{N' \geq N} P\left\{\Gamma_{N'} \in \mathcal{Q}\right\} P\left\{|\Gamma_{p_+}| = N'\right\} \\ &\geq P\left\{\Gamma_N \in \mathcal{Q}\right\} P\left\{|\Gamma_{p_+}| \geq N\right\} \\ &= P\left\{\Gamma_N \in \mathcal{Q}\right\} \left(۱ - P\left\{|\Gamma_{p_+}| < N\right\}\right) \\ &= P\left\{\Gamma_N \in \mathcal{Q}\right\} - P\left\{\Gamma_N \in \mathcal{Q}\right\} P\left\{|\Gamma_{p_+}| < N\right\} \\ &\geq P\left\{\Gamma_N \in \mathcal{Q}\right\} - P\left\{|\Gamma_{p_+}| < N\right\} \end{aligned} \quad (۱.۲)$$

به طور مشابه

$$\begin{aligned} P\left\{\Gamma_{p_-} \in \mathcal{Q}\right\} &= \sum_{N'=۱}^{M} P\left\{\Gamma_{N'} \in \mathcal{Q}\right\} P\left\{|\Gamma_{p_-}| = N'\right\} \\ &\leq \sum_{N' \leq N} P\left\{\Gamma_{N'} \in \mathcal{Q}\right\} P\left\{|\Gamma_{p_-}| = N'\right\} + P\left\{|\Gamma_{p_-}| > N\right\} \\ &\leq P\left\{\Gamma_N \in \mathcal{Q}\right\} P\left\{|\Gamma_{p_-}| \leq N\right\} + P\left\{|\Gamma_{p_-}| > N\right\} \\ &\leq P\left\{\Gamma_N \in \mathcal{Q}\right\} + P\left\{|\Gamma_{p_-}| > N\right\} \end{aligned} \quad (۲.۲)$$

Γ_N و Γ_p برای $N = \circ$ و $p = \circ$ زیر مجموعه های تهی هستند. پس $\Gamma_N = \Gamma_p$. پس در آن صورت وقتی $m \to \infty$ ، $P\left\{\Gamma_p \in \mathcal{Q}\right\} \to a$ آن گاه $P\left\{\Gamma_N \in \mathcal{Q}\right\} \to a$.