بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه ارومیه

یک روش همسان سازی از ساختن خم‌های بیضوی با رتبه موردل – ویل قوی

حسن خیاط

استاد راهنما:

دکتر علی سرباز جانفدا

دانشکده علوم

گروه ریاضی

بهمن ۱۳۸۷

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

پایان نامه حسن خدیمی به تاریخ ۸۷/۱۱/۷ شماره ۲-۹۲۰ مورد پذیرش هیات محترم داوران با رتبه عالی
و نمره ۱۸ قرار گرفت.
هیجده تمام

۱- استاد راهنما و رئیس هیئت داوران: دکتر علی سهرابی نصرا

۲- استاد مشاور:

۳- داور خارجی: دکتر محسن قاسمی

۴- داور داخلی: دکتر هوشنگ بهروش هوشنگ بهروش

۵- نماینده تحصیلات تکمیلی: دکتر ساعد ابراشیدی

تقدیم به

پدر شادروان

و مادر مهربان

و برادران همراهم

تقدیر و تشکّر

از مادرم که بخاطر من رنج‌های زیادی را متحمّل شدند، از پدرم که دیگر بین ما نیست ولی خاطراتش در بین ما زنده است بسیار ممنون و سپاسگزارم.

از برادرهای بزرگترم فرزاد و حسین که به من توجّه خاصی داشتند بسیار سپاسگزارم.

از استاد راهنما جناب آقای دکتر علی سرباز جانفدا که به من کمک های زیادی کردند بسیار متشکرم.

از اساتید گرامی، آقایان دکتر هوشنگ بهروش و دکتر محسن قاسمی که زحمت خواندن این پایان نامه را کشیدند بسیار ممنونم.

از دوستان گرامی آقایان رضا حیدرشناس، پیام ابراهیم‌نژاد، سید موسی موسوی، بابک صمصامی، مجید خدایی، حسین خسرو آبادی و محمد یار حسینی و دیگر دوستان کمال قدردانی و تشکّر را دارم.

چکیده

با استفاده از نظریه پیچش مسئله ساختن خم‌های بیضوی از رتبه n ($n \geq ۱$) با مولدهایش را به مسئله پیدا کردن نقاط گویا روی یک واریته مشخص V_n کاهش می‌دهیم. با پارامتری کردن همه نقاط گویا روی V_n ($۲ \leq n \leq ۷$) همه خم‌های بیضوی از رتبه حداقل n ($n \leq ۷$) را بدست می‌آوریم.

فهرست مندرجات

پیشگفتار

در فصل اول مفاهیمی اولیه از هندسه جبری را ارائه می‌کنیم. واریته‌های آفینی و تصویری و همچنین نگاشتهای بین واریته‌ها، مثل ریخت را بررسی کرده و در نهایت خم‌های جبری را معرفی می‌کنیم. هدف اصلی در این فصل بیا ن ارتباط نزدیک خم‌های بیضوی با هندسه جبری است.

در فصل دوم خم‌های بیضوی را بطور خلاصه مطالعه می‌کنیم. معادلاتی همچون معادلات وایرشتراس را بیان کرده و از خم‌های بیضوی گروه آبلی می‌سازیم. درون ریختی خم‌های بیضوی و هم‌گونی را شرح داده همچنین با قضیه‌ای نشان می‌دهیم چگونه هر خم بیضوی با یک خم بیضوی با معادله وایرشتراس یکریخت است.

در فصل سوم نقاط تابی، زیرگروه تابی و رتبه خم‌های بیضوی شرح داده شده و نتایج مهمی همچون قضیه موردل—ویل را مطرح می‌کنیم. در قسمت آخر پیچش یک خم بطور خلاصه شرح داده شده است.

فصل چهارم قسمت اصلی پایان نامه است، در این فصل خم‌های بیضوی با رتبه موردل—ویل بالا به روشی خاص و مشخص ساخته می‌شوند. در این راستا واریته مشخصی تحت عنوان V_n معرفی شده و با پارامتری کردن نقاط روی این واریته، خم‌های بیضوی از رتبه حداقل n ($n \leq ۷$) ساخته می‌شوند. شایان ذکر است که در اثبات برخی قضایا در این فصل از [۱۰] استفاده شده است.

فصل ۱

هندسه جبری

در این فصل ابتدا مباحثی از جبر و سپس مفاهیمی از هندسه جبری را ارائه می‌کنیم. در بحث مربوط به هندسه جبری واریته‌ها را تعریف خواهیم کرد که ارتباط نزدیکی با خم‌های بیضوی دارند.

۱.۱ مفاهیمی از جبر

تعریف ۱.۱.۱ میدان E یک توسیع میدان F است در صورتی که F یک زیر میدان E باشد.

قضیه ۲.۱.۱ فرض کنیم F یک میدان و $f(x)$ یک چند جمله‌ای غیر ثابت از $F[x]$ باشد. در این صورت یک توسیع میدان E از F و یک $\alpha \in E$ وجود دارد بطوری که $f(\alpha) = 0$.

برهان : [[۳] ، قضیه 1.35]. ■

تعریف ۳.۱.۱ عضو α از یک توسیع E از F به روی F جبری است در صورتی که به ازای یک چند جمله ای ناصفر $f(x) \in F[x]$ داشته باشیم $f(\alpha) = 0$. در صورتی که α به روی F جبری نباشدآنگاه گوییم α به روی F متعالی است.

تعریف ۴.۱.۱ یک توسیع میدان E از F یک توسیع جبری F است هر گاه هر عضو E روی F جبری باشد.

تذکر ۵.۱.۱ اگر E یک توسیع از میدان F باشد آنگاه E یک فضای برداری روی F و حتی یک F جبراست.

تعریف ۶.۱.۱ اگر یک توسیع میدان E از F به عنوان یک فضای برداری به روی F با بعد متناهی n باشد، آنگاه E یک توسیع متناهی از درجه n روی F است. درجه E روی F را بصورت $[E:F]$ نمایش خواهیم داد.

قضیه ۷.۱.۱ هر توسیع متناهی E از F یک توسیع جبری است.

برهان : [[۳] ، قضیه 1.38]. ■

قضیه ۸.۱.۱ فرض کنیم E یک توسیع میدان F باشد در این صورت

$$\bar{F}_E = \{\alpha \in E : \text{روی } F \text{ جبری است } \alpha\}$$

زیر میدانی از E است که بستار جبری F در E نامیده می‌شود.

برهان : [[۳] ، قضیه 4.38]. ■

تعریف ۹.۱.۱ یک میدان F بطور جبری بسته است اگر هر چند جمله‌ای غیر ثابت از $F[X]$ صفری در F داشته باشد.

قضیه ۱۰.۱.۱ میدان F بطور جبری بسته است اگر و فقط اگر هر چند جمله‌ای غیر ثابت از $F[X]$ در $F[X]$ به عوامل خطی تجزیه شود.

برهان : [[۳] ، قضیه 5.38]. ■

نتیجه ۱۱.۱.۱ هر میدان بطور جبری بسته F هیچ توسیع جبری سره ندارد یعنی اینکه توسیع جبری چون E ندارد که F زیر میدان سره E باشد.

قضیه ۱۲.۱.۱ هر میدان F دارای یک بستار جبری $\bar{F}$ است (یعنی $\bar{F}$ یک توسیع جبری از F است که بطور جبری بسته است).

برهان : [[۳] ، قضیه 7.38]. ■

تعریف ۱۳.۱.۱ اگر σ یک یکریختی از میدان E به توی میدانی دیگر باشد آنگاه عضو a از E توسط σ ثابت نگه داشته می‌شود در صورتی که $\sigma(a) = a$. گردایه‌ای مانند S ازیکریختی‌های E زیر میدان F از E را ثابت نگه می‌دارد در صورتی که هر عضو $a \in F$ توسط هر عضو $\sigma \in S$ ثابت نگه داشته شود.

تعریف ۱۴.۱.۱ فرض کنیم E توسیع متناهی از میدان F باشد. تعداد یکریختی‌های از E به توی $\bar{F}$ که F را ثابت نگه می‌دارند اندیس E روی F است و به صورت $\{E : F\}$ نمایش داده می‌شود.

تعریف ۱۵.۱.۱ یک توسیع متناهی E از F یک توسیع تفکیک پذیر است در صورتی که $\{E : F\} = [E : F]$.

تعریف ۱۶.۱.۱ یک میدان کامل است در صورتی که هر توسیع متناهی آن تفکیک پذیر باشد.

تعریف ۱۷.۱.۱ توسیع میدان E از F را نرمال گوییم هر گاه E روی F جبری بوده و برای هر x متعلق به E همه صفرهای چندجمله‌ای مینیمال x روی F، در E جبری باشند. به طور معادل هر گاه به ازای هر چندجمله‌ای $p(x) \in F[x]$ با ریشه‌ای در E، تمام ریشه‌های $p(x)$ در E باشند.

تعریف ۱۸.۱.۱ فرض کنیم E توسیعی از F باشد. مجموعه تمام یکریختی‌های حلقه‌ای $\sigma : E \longrightarrow E$ که عناصر F را ثابت نگه می‌دارند، گروه گالوای [1] توسیع E روی F گفته و با $G_{E/F}$ نشان می‌دهیم. به ازای هر زیرگروه H از $G_{E/F}$ قرار می‌دهیم:

$$\mathrm{Fix(H)} = \{x \in E : \ \forall\sigma \in H; \sigma(x) = x\}$$

$Fix(H)$ زیر میدان E است.

تعریف ۱۹.۱.۱ توسیع جبری E از میدان F را یک توسیع گالوا گوییم هر گاه $F = Fix(G_{E/F})$.

[1] Galios group

گزاره ۲۰.۱.۱ شرایط زیر روی مجموعه ناتهی Σ با ترتیب جزیی $\leq$ هم‌ارزند:

(۱) هر دنباله صعودی $x_1 \leq x_2 \leq \cdots$ در Σ ایستاست (یعنی nای وجود دارد بطوری که $\cdots x_n = x_{n+1}$).

(۲) هر زیر مجموعه غیر تهی از Σ یک عضو ماکسیمال دارد.

برهان : [[۱] ، گزاره 6.1]. ■

تعریف ۲۱.۱.۱ فرض کنیم I یک مجموعه‌ی اندیس‌گذار به طور جزیی مرتب بوده و A مجموعه‌ی گروه‌ها باشد. گردایه‌ی $\{A_i, \phi_{ij}\}$ از گروه‌ها و همریختی‌های گروهی را یک دستگاه معکوس [۲] می‌گوییم هرگاه برای هر $i, j \in I$ با فرض $i \leq j$ همریختی ϕ_{ji} از A_j به A_i تعریف شده و در شرایط زیر صدق کنند:

(۱) ϕ_{ii} همریختی همانی روی A_i است؛

(۲) هرگاه $i \leq \ell \leq j$، آنگاه $\phi_{ji} = \phi_{\ell i}\phi_{j\ell}$.

تعریف ۲۲.۱.۱ فرض کنیم I یک مجموعه‌ی به طور جزیی مرتب بوده و $i, j \in I$ دلخواه باشند. حد معکوس [۳] هر دستگاه معکوس $\{A_i, \phi_{ji}\}$ از گروه ها و همریختی‌های گروهی را به صورت $\varprojlim A_i$ نشان داده و برابر با مجموعه‌ی عناصر (a_i) از فضای حاصل‌ضربی $\prod A_i$ تعریف می‌کنیم که به ازای هر $i, j \in I$ با فرض $i \leq j$ داشته باشیم $\phi_{ji}a_j = a_i$. می‌توان نشان داد که این مجموعه یک گروه است. چون هر یک از گروه‌های A_i دارای توپولوژی گسسته هستند بنابراین یک توپولوژی روی $\prod A_i$ القا می‌کنند که آن را توپولوژی فرامتناهی [۴] می‌گوییم. بنابراین حد معکوس دستگاه $\{A_i, \phi_{ij}\}$ نیز به عنوان زیر فضایی از $\prod A_i$ دارای توپولوژی فرامتناهی است. برای جزییات بیشتر به [۹] مراجعه کنید.

[۲] invers system
[۳] invers limit
[۴] profinite topology

۲.۱ واریته‌های آفینی

تعریف ۱.۲.۱ حلقه A را نوتری گوییم اگر در سه شرط معادل زیر صدق کند:

(۱) هر مجموعه غیرتهی از ایده‌آل‌ها در A یک عضو ماکسیمال دارد.

(۲) هر زنجیر صعودی از ایده‌آل‌ها در A ایستاست.

(۳) هر ایده‌آل در A متناهی تولید شده است.

قضیه ۲.۲.۱ (قضیه پایه هیلبرت)[۵] اگر A حلقه نوتری باشد آنگاه حلقه چند جمله‌ای‌های $A[x]$ نوتری است.

برهان : [[۱] ، قضیه 7.5]. ■

نتیجه ۳.۲.۱ اگر A حلقه نوتری باشد آنگاه حلقه چند جمله‌ای‌های $A[x_1, \ldots, x_n]$ از n متغیر x_1،...،x_n هم نوتری است.

برهان : [[۱] ، نتیجه 7.6]. ■

فرض کنیم k یک میدان بطور جبری بسته باشد. n—فضای آفین[۶] روی k را با $\mathbb{A}^n$ نشان داده و بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathbb{A}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_i \in k\}.$$

فرض کنیم $k[x_1, \ldots, x_n]$ حلقه چند جمله‌ای‌های از n متغیر x_1،...،x_n روی k باشد. فرض کنیم $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$ چندجمله‌ای از n متغیر باشد. مجموعه صفرهای f عبارت است از:

$$Z(f) = \{x \in \mathbb{A}^n : f(x) = 0\}.$$

اگر $T \subseteq k[x_1, \ldots, x_n]$ باشد، آنگاه $Z(T)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Z(T) = \{x \in \mathbb{A}^n : f(x) = 0; \forall f \in T\}.$$

[۵] Hilbert's Basis Theorem

[۶] affine n-space

فرض کنیم a ایده‌آل در $k[x_1,\dots,x_n]$ باشد. چون $k[x_1,\dots,x_n]$ نوتری است پس a متناهی تولید شده است، بنابراین $T=\{f_1,\dots,f_r\}\subseteq k[x_1,\dots,x_n]$ وجود دارد که مولد a است. همچنین داریم $Z(a)=Z(T)$.

تعریف ۴.۲.۱ زیر مجموعه Y از $\mathbb{A}^n$ را مجموعه جبری گوییم هر گاه یک زیر مجموعه $T\subseteq k[x_1,\dots,x_n]$ وجود داشته باشد بطوری که $Y=Z(T)$.

گزاره ۵.۲.۱ اجتماع دو مجموعه جبری مجموعه جبری است. اشتراک هر خانواده دلخواه از مجموعه‌های جبری یک مجموعه جبری است. همچنین مجموعه تهی و فضای $\mathbb{A}^n$ مجموعه‌های جبری‌اند.

برهان : [[۴]، فصل I، گزاره 1.1]. ■

تعریف ٦.۲.۱ با در نظر گرفتن مکمل‌های مجموعه‌های جبری به عنوان مجموعه‌های باز یک توپولوژی روی $\mathbb{A}^n$ تعریف می‌کنیم که به آن توپولوژی زاریسکی[۷] می‌گوییم. این توپولوژی در چهار اصل موضوع معرف یک توپولوژی در $\mathbb{A}^n$ صدق می‌کند، چون با توجه به گزاره ۵.۲.۱ اشتراک دو مجموعه باز، باز است و اجتماع تعدادی دلخواه از مجموعه‌های باز بازند. بعلاوه مجموعه تهی و $\mathbb{A}^n$ هر دو بازند.

مثال ۷.۲.۱ توپولوژی زاریسکی را روی خط آفین $\mathbb{A}^1$ در نظر می‌گیریم. هر ایده‌آل در $k[x]$ اصلی است، بنابراین هر مجموعه جبری مجموعه صفرهای یک چندجمله‌ای است. چون k بطور جبری بسته است هر چند جمله‌ای غیر صفر $f(x)$ می‌تواند بصورت

$$f(x)=c(x-a_1)\cdots(x-a_n);\ \ c,a_i\in k$$

تجزیه شود. آنگاه $Z(f)=\{a_1,\dots,a_n\}$. بنابراین مجموعه‌های جبری در $\mathbb{A}^1$ فقط زیر مجموعه‌های متناهی هستند و همچنین $\mathbb{A}^1$ و $\emptyset$ مجموعه‌های جبری هستند.

---
[۷] Zariski

تعریف ۸.۲.۱ یک مجموعه جبری $Y \subseteq \mathbb{A}^n$ تحویل‌ناپذیر است هر گاه هیچ تجزیه‌ای از Y به فرم

$$Y = Y_1 \cup Y_2; \quad Y_1, Y_2 \subsetneqq Y$$

از اجتماع دو زیر مجموعه جبری سره Y وجود نداشته باشد.

مثال ۹.۲.۱ $\mathbb{A}^1$ تحویل‌ناپذیر است چون تنها زیر مجموعه‌های بسته سره آن زیر مجموعه‌های متناهی هستند در حالی که $\mathbb{A}^1$ نامتناهی است، چون k بطور جبری بسته است بنابراین نامتناهی است. ادعای اخیر را ثابت می‌کنیم:

فرض کنیم k یک میدان به طور جبری بسته باشد که متناهی عضو دارد. فرض کنیم $a_1, \ldots, a_n$ اعضای این میدان باشند، بنابراین

$$f(x) = (x - a_1) \ldots (x - a_n)$$

چندجمله‌ای است که صفرهای آن عضوهای میدان k هستند، ولی اگر صفرهای چندجمله‌ای

$$f(x) = (x - a_1) \ldots (x - a_n) + 1$$

را در نظر بگیریم، چون k به طور جبری بسته است فرض متناهی بودن k نقض می‌شود.

تعریف ۱۰.۲.۱ یک واریته جبری آفین[8] (بطور ساده واریته آفین) یک مجموعه جبری تحویل‌ناپذیر از $\mathbb{A}^n$ (با در نظر گرفتن توپولوژی زاریسکی) است. یک زیرمجموعه باز از یک واریته آفین را یک واریته شبه آفین[9] گوییم.

تذکر ۱۱.۲.۱ اگر Y یک مجموعه جبری باشد، آنگاه

$$I(Y) = \{f \in k[x_1, \ldots, x_n] : f(x) = 0; \forall x \in Y\}$$

[8] affine algebraic variety

[9] quasi affine variety

یک ایده‌آل در $k[x_1,\dots,x_n]$ است. فرض کنیم a ایده‌آل در $k[x_1,\dots,x_n]$ باشد، آنگاه

$$Z(a)=\{x\in\mathbb{A}^n : f(x)=0; \forall f\in a\}.$$

همچنین رادیکال a را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\sqrt{a}=\{f\in k[x_1,\dots,x_n] : \exists r>0 \quad s.t \quad f^r\in a\}.$$

گزاره ۱۲.۲.۱ (۱) اگر $T_1\subseteq T_2$ زیر مجموعه‌هایی از $k[x_1,\dots,x_n]$ باشند، آنگاه $Z(T_1)\supseteq Z(T_2)$؛

(۲) اگر $Y_1\subseteq Y_2$ زیر مجموعه‌هایی از $\mathbb{A}^n$ باشند، آنگاه $I(Y_1)\supseteq I(Y_2)$؛

(۳) برای هر دو زیر مجموعه Y_1 و Y_2 از $\mathbb{A}^n$، داریم: $I(Y_1\cup Y_2)=I(Y_1)\cap I(Y_2)$؛

(۴) برای هر ایده‌آل $a\subseteq k[x_1,\dots,x_n]$، $I(Z(a))=\sqrt{a}$؛

(۵) برای هر زیر مجموعه $Y\subseteq\mathbb{A}^n$، $Z(I(Y))=\bar{Y}$ که $\bar{Y}$ بستار Y است.

برهان : [[۴]، فصل I، گزاره 1.2]. ■

قضیه ۱۳.۲.۱ فرض کنیم k یک میدان بطور جبری بسته باشد. فرض کنیم a یک ایده‌آل در حلقه چند جمله‌ای‌های $k[x_1,\dots,x_n]$ باشد و $f\in k[x_1,\dots,x_n]$ یک چند جمله‌ای باشد که در هر نقطه از $Z(a)$ صفر شود، آنگاه یک $r>0$ وجود دارد بطوری که $f^r\in a$.

برهان : [[۴]، فصل I، قضیه 1.3]. ■

نتیجه ۱۴.۲.۱ مجموعه جبری Y در $\mathbb{A}^n$ تحویل ناپذیر است اگر و فقط اگر ایده‌آل متناظر آن یعنی $I(Y)$ در حلقه چند جمله‌ای‌های $k[x_1,\dots,x_n]$ ایده‌آلی اول باشد.

برهان : [[۴]، فصل I، نتیجه 1.4]. ■

مثال ۱۵.۲.۱ $\mathbb{A}^n$ تحویل ناپذیر است چون ایده‌آل متناظر آن ایده‌آل صفر در $k[x_1,\dots,x_n]$ است که ایده‌آلی اول است.

تعریف ۱۶.۲.۱ اگر $Y \subseteq A^n$ یک مجموعه جبری آفین باشد ما حلقه مختصاتی آفین از Y را با حلقه خارج قسمتی $\frac{k[x_1,\ldots,x_n]}{I(Y)}$ تعریف کرده و آن را با $A(Y)$ نشان می‌دهیم.

تذکر ۱۷.۲.۱ اگر Y یک واریته آفین باشد آنگاه $A(Y)$ دامنه صحیح است.

تعریف ۱۸.۲.۱ فضای توپولوژیکی X را نوتری گوییم هر گاه در شرط زنجیر نزولی برای زیر مجموعه‌های بسته صدق کند؛ یعنی برای هر دنباله به فرم $\cdots \supseteq Y_2 \supseteq Y_1$ از زیر مجموعه‌های بسته، عدد صحیح r وجود داشته باشد بطوری که $Y_r = Y_{r+1} = \cdots$.

گزاره ۱۹.۲.۱ در یک فضای توپولوژی نوتری X هر زیرمجموعه بسته غیر تهی Y می‌تواند بصورت اتحاد متناهی $Y = Y_1 \cup \cdots \cup Y_r$ از زیر مجموعه‌های بسته تحویل ناپذیر از Y_i ها بیان شود. اگر داشته باشیم $Y_i \not\supseteq Y_j$ برای هر $i \neq j$ آنگاه Y_i ها بطور منحصر بفردی تعیین می‌شوند.

برهان : [[۴]، فصل I، گزاره 1.5]. ■

تذکر ۲۰.۲.۱ $\mathbb{A}^n$ فضای توپولوژیکی نوتری است. چون اگر $\cdots \supseteq Y_2 \supseteq Y_1$ یک زنجیر نزولی از زیر مجموعه‌های بسته باشد، آنگاه طبق گزاره ۱۲.۲.۱ قسمت(۲)، $\cdots \subseteq I(Y_2) \subseteq I(Y_1)$ یک زنجیر صعودی از ایده‌آل‌ها در $k[x_1,\ldots,x_n]$ است. چون $k[x_1,\ldots,x_n]$ حلقه نوتری است پس این زنجیر از ایده‌آل‌ها سرانجام ایستاست. اما برای هر i، $Y_i = Z(I(Y_i))$ (با توجه به گزاره ۱۲.۲.۱ قسمت ۵ و اینکه Y_iها بسته‌اند) بنابراین زنجیر Y_iها هم ایستاست.

نتیجه ۲۱.۲.۱ هر مجموعه جبری در $\mathbb{A}^n$ می‌تواند بصورت منحصر بفرد از اتحاد واریته‌ها بیان شود که هیچ یک دیگری را شامل نیست.

تعریف ۲۲.۲.۱ اگر X فضای توپولوژیکی باشد بزرگترین زنجیر $Z_0 \subset Z_1 \subset \cdots \subset Z_n$ از زیرمجموعه‌های بسته تحویل‌ناپذیر مجزا از X را بعد X تعریف کرده با $dimX$ نشان می‌دهیم و بعد یک واریته آفین را بعد آن به عنوان یک فضای توپولوژیکی تعریف می‌کنیم.

تعریف ۲۳.۲.۱ فرض کنیم A حلقه و P ایده‌آل اول در A باشد. فرض کنیم زنجیر $P_0 \subset P_1 \subset \cdots \subset P_n = P$ از ایده‌آل‌های اول مجزا وجود داشته باشد. سوپریمم روی همه عددهای صحیح n، را ارتفاع [۱۰] این ایده‌آل اول گوییم. بعد A را سوپریمم روی همه ارتفاع‌های ایده‌آل‌های اول تعریف می‌کنیم.

گزاره ۲۴.۲.۱ اگر Y یک مجموعه جبری آفینی باشد، آنگاه بعد Y مساوی با بعد حلقه مختصاتی آفین $A(Y)$ است.

برهان : [[۴]، فصل I، گزاره 1.7]. ■

گزاره ۲۵.۲.۱ بعد $\mathbb{A}^n$ برابر n است.

برهان : [[۴]، فصل I، گزاره 1.9]. ■

$\mathbb{A}^n$ با توپولوژی زاریسکی را در نظر می‌گیریم. توپولوژی زاریسکی روی یک واریته جبری آفین V توپولوژی القا شده توسط توپولوژی زاریسکی $\mathbb{A}^n$ روی V است. به ویژه مجموعه‌های بسته در V همان اشتراک‌های $V \cap W$ از V با واریته‌های جبری آفین $W \subset \mathbb{A}^n$ خواهند بود. به عبارت دیگر، مجموعه‌های بسته V زیرواریته‌های جبری آفین [۱۱] V هستند.

تعریف ۲۶.۲.۱ فرض کنیم Y واریته باشد و $Y \ni x$ و $f_1, \ldots, f_m \in k[x_1, \ldots, x_n]$ مولدهایی برای $I(Y)$ باشند. آنگاه Y در نقطه x غیرمنفرد (هموار) است اگر ماتریس $m \times n$

$$(\partial f_i / \partial x_j(x)) \qquad 1 \leq i \leq m\ ,\ 1 \leq j \leq n$$

رتبه $n - dim\ Y$ داشته باشد. اگر Y در هر نقطه غیر منفرد باشد آنگاه گوییم Y غیر منفرد است.

[۱۰] height

[۱۱] affine algebraic subvariety

۳.۱ واریته‌های تصویری

فرض کنیم k یک میدان بطور جبری بسته باشد. $n-$ فضای تصویری روی k را مجموعه کلاسهای هم ارزی از $n+1$ تایی های $(a_\circ,\dots,a_n)$ از عناصر k، که همگی صفر نیستند، تحت رابطه هم ارزی

$$(a_\circ,\dots,a_n) \sim (\lambda a_\circ,\dots,\lambda a_n); \quad \forall \lambda \in k, \lambda \neq \circ$$

تعریف کرده و آن را با $\mathbb{P}^n$ نشان می‌دهیم. با تعبیر هندسی، $\mathbb{P}^n$ مجموعه همه خطوط گذرنده از مبدا در k^{n+1} است. فضای تصویری $\mathbb{P}^n$ را می‌توان به صورت خارج قسمت $\mathbb{P}^n = \frac{k^{n+1}\setminus\{\circ\}}{\sim}$ تعبیر کرد که $\sim$ معرف هم ارزی بالاست. هر نقطه در فضای تصویری $\mathbb{P}^n$ را می‌توان به صورت رده هم ارزی

$$[(a_\circ,\dots,a_n)] = \{(\lambda a_\circ,\dots,\lambda a_n) : \lambda \in k, \lambda \neq \circ\}$$

تلقی کرد. در این نماد گذاری باید حداقل یکی از مختصات a_i ها ناصفر باشد.

تعریف ۱.۳.۱ چند جمله‌ای $f \in k[x_\circ,\dots,x_n]$ را همگن از درجه d گوییم هر گاه برای هر $\lambda \in k$،

$$f(\lambda x_\circ,\dots,\lambda x_n) = \lambda^d f(x_\circ,\dots,x_n).$$

به عبارت دیگر همه جمله‌های f درجه‌های یکسان داشته باشند. حال اگر نقطه $(x_\circ,\dots,x_n)$ در مجموعه صفر f باشد هر نقطه بصورت $(\lambda x_\circ,\dots,\lambda x_n)$ ، که λ ثابتی در k است، در مجموع صفر f واقع خواهد بود.

تعریف ۲.۳.۱ یک زیرمجموعه Y از $\mathbb{P}^n$ را مجموعه جبری تصویری گوییم هر گاه یک مجموعه T از چند جمله‌ای‌های همگن در $k[x_\circ,\dots,x_n]$ وجود داشته باشد بطوری که $Y = Z(T)$

گزاره ۳.۳.۱ اتحاد هر دو مجموعه جبری تصویری یک مجموعه جبری تصویری است. اشتراک هر خانواده دلخواه از مجموعه‌های جبری تصویری یک مجموعه جبری تصویری است. مجموعه