دانشگاه سیستان و بلوچستان

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض(جبر)

عنوان:

توصیف تکواره‌ها به‌وسیله سیستم‌های راست منظم

استاد راهنما:

دکتر اکبر گلچین

تحقیق و نگارش:

حکیمه یاسمی

پاییز ۱۳۹۱

تقدیم به

د

به

تقدير و تشكر:

خدا

ف

چکیده

در این پایان‌نامه به توصیف تکواره‌هایی می‌پردازیم که روی آن‌ها سیستم‌های راست منظم در بعضی از دیگر خواص، همچون صادق بودن، صادق قوی بودن، آزاد بودن، تصویری بودن، همواری، همواری قوی، همواری ضعیف، به‌طور اساسی همواری ضعیف و بدون تابی صدق می‌کنند و یا سیستم‌های راست دارای هر یک از خواص ذکر شده، منظم می‌باشند. همچنین به توصیف تکواره‌هایی می‌پردازیم که روی آن‌ها خاصیت منظم بودن سیستم‌ها با بعضی از خواص فوق‌الذکر معادل است. در نهایت تکواره هایی را بررسی می‌کنیم که روی آن‌ها سیستم‌های راست صادق در شرط‌های (P) و (E) منظم هستند. تکواره‌هایی را توصیف می‌کند که روی آن‌ها سیستم‌های راست دارای خواصی مانند همواری، همواری قوی، همواری ضعیف، به‌طور اساسی همواری ضعیف و بدون تابی، منظم هستند و همچنین شرایطی را بررسی می‌کنیم که سیستم‌های راست منظم در هر یک از خواص ذکر شده صدق کنند.

فهرست مندرجات

پیشگفتار

مطالعات بسیاری در ارتباط با تصویری بودن و هموراری سیستم‌ها روی تکواره‌ها صورت گرفته است. خواص سیستم‌ها روی تکواره‌ها در زنجیر به‌طور اکید نزولی زیر صدق می‌کنند.

آزاد ⇐ تصویری ⇐ هموراری قوی ⇐ هموراری ⇐ هموراری ضعیف ⇐ به‌طور اساسی ضعیف هموار ⇐ بدون‌تاب.

خواص سیستم‌ها روی تکواره‌ها از حدود سال ۱۹۷۰ مورد تحقیق و بررسی قرار گرفته است. بسیاری از مولفان همچون کیلپ [۱]، بولمن فلمینگ [۲]، نورمک [۳]، استنستروم [۴] و ... شرایطی را روی یک تکواره بررسی کرده‌اند که لازم و کافی است تا خواص فوق‌الذکر از سیستم‌ها معادل شوند. با این وجود هنوز مسائلی در ارتباط با توصیف تکواره‌ها بر اساس خواص سیستم‌ها روی آن‌ها وجود دارد.

در این پایان‌نامه به توصیف تکواره‌هایی می‌پردازیم که روی آن‌ها سیستم‌های راست منظم در بعضی از دیگر خواص همچون صادق بودن، صادق قوی بودن، آزاد بودن، تصویری بودن، هموراری، هموراری قوی، هموراری ضعیف، به‌طور اساسی هموراری ضعیف و بدون تابی صدق می‌کنند و یا سیستم‌های راست دارای هر یک از خواص ذکر شده، منظم می‌باشند. همچنین به توصیف تکواره‌هایی می‌پردازیم که روی آن‌ها خاصیت منظم بودن سیستم‌ها با بعضی از خواص فوق‌الذکر معادل است. در این کار همچنین تکواره‌هایی را بررسی می‌کنیم که روی آن‌ها سیستم‌های راست صادق در شرط‌های (P) و (E) منظم هستند. این پایان نامه شامل سه فصل است. فصل اول شامل تعاریف و مفاهیم مقدماتی است که در فصل‌های ۲ و ۳ استفاده خواهند شد. در بخش ۵ از این فصل ضمن معرفی $S-$ سیستم‌های راست منظم به بیان و اثبات چند قضیه می‌پردازیم که در فصل‌های بعد استفاده خواهند شد.

فصل ۲ شامل سه بخش است. در بخش اول نشان می‌دهیم هر سیستم صادق قوی، یک سیستم منظم است و شرایطی را بررسی می‌کنیم که تحت آن یک سیستم منظم، صادق قوی است. همچنین تکواره‌هایی را بررسی می‌کنیم که روی آن‌ها هر سیستم راست منظم، صادق است و برعکس. بخش ۲ تکواره‌هایی را توصیف

[۱] Kilp

[۲] Bulman-Fleming

[۳] Normak

[۴] Stenstrom

می‌کند که روی آن‌ها سیستم‌های راست دارای خواصی مانند هموار‌ی، همواری قوی، همواری ضعیف، به‌طور اساسی همواری ضعیف و بدون تابی، منظم هستند و همچنین شرایطی را بررسی می‌کنیم که سیستم‌های راست منظم در هر یک از خواص ذکر شده صدق کنند. در بخش ۳ از این فصل ابتدا تکواره هایی را بررسی می‌کنیم که روی آن‌ها تصویری بودن و منظم بودن سیستم‌ها معادل می‌شوند، سپس به توصیف تکواره‌هایی می‌پردازیم که روی آن‌ها هر سیستم راست آزاد منظم است.

فصل ۳ از دو بخش تشکیل شده است، بخش اول تکواره‌هایی را بررسی می‌کند که روی آن‌ها همه سیستم‌های راست صادق در شرط (E) و بخش دوم همه سیستم‌های راست صادق در شرط (P) منظم هستند.

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

در این فصل تعاریف و مفاهیم مقدماتی لازم در این پایان‌نامه را بیان می‌کنیم.
این فصل شامل پنج بخش است. چهار بخش اول شامل تعاریف مقدماتی مربوط به تکواره‌ها و سیستم‌ها می‌باشند و در بخش پنج از این فصل سیستم منظم بیان و چند قضیه مقدماتی در این رابطه ثابت می‌شود.

۱ـ۱ نیم‌گروه‌ها و تکواره‌ها

تعریف ۱.۱.۱. گروه‌وار $(S,*)$ عبارتست از یک مجموعه غیر تهی S که یک عمل دوتایی $*$ روی آن تعریف شده باشد.
$(S,*)$ را نیم‌گروه گوییم، هرگاه عمل $*$ شرکت‌پذیر باشد. به عبارت دیگر

$$(\forall x,y,z\in S):\quad x*(y*z)=(x*y)*z.$$

برای راحتی کار عمل نیم‌گروه را ضربی در نظر می‌گیریم و از این پس به جای $x*y$ از xy استفاده می‌کنیم.

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنید S یک گروه‌وار باشد. عنصر $e\in S$ را:
ـ همانی راست S گوییم، اگر برای هر $s\in S$، $se=s$.
ـ همانی چپ S گوییم، اگر برای هر $s\in S$، $es=s$.
ـ همانی S گوییم، اگر برای هر $s\in S$، $se=s=es$.
عنصر همانی گروه‌وار S را با ۱ یا دقیق‌تر 1_S نمایش می‌دهیم.

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنید S یک گروه‌وار دارای همانی ۱ باشد. عنصر $s\in S$ معکوس‌پذیر چپ (راست) نامیده می‌شود، هرگاه $t\in S$ موجود باشد به‌طوری‌که $ts=1$ ($st=1$). در این حالت t معکوس چپ (راست) برای s نامیده می‌شود.
اگر $t\in S$ موجود باشد به‌طوری‌که $st=ts=1$، آنگاه s معکوس‌پذیر نامیده می‌شود و t را معکوس s می‌نامیم که در صورت منحصربفرد بودن با s^{-1} نمایش داده می‌شود.

تعریف ۴.۱.۱ فرض کنید S یک گروه‌وار باشد. عنصر $z \in S$:

– صفر راست S نامیده می‌شود، اگر برای هر $s \in S$، $sz = z$.

– صفر چپ S نامیده می‌شود، اگر برای هر $s \in S$، $zs = z$.

– صفر S نامیده می‌شود، اگر برای هر $s \in S$، $sz = zs = z$. صفر گروه‌وار S را اغلب با 0 نمایش می‌دهیم.

– نیم‌گروه S صفر راست (چپ) نامیده می‌شود، هرگاه هر عضو از S یک صفر (راست) چپ از S باشد.

تعریف ۵.۱.۱. عنصر s از نیم‌گروه S پوچ‌توان راست (چپ) نامیده می‌شود، هرگاه عدد طبیعی n وجود داشته باشد به‌طوری‌که $s^n = z \in S$، که z یک صفر راست (چپ) از S است.

نیم‌گروه S پوچ راست (چپ) نامیده می‌شود، اگر هر عنصر $s \in S$ پوچ‌توان راست (چپ) باشد.

تعریف ۶.۱.۱. اگر عنصر $1 \in S$ موجود باشد به‌طوری‌که برای هر $x \in S$، $1x = x1 = x$، آنگاه ۱ را عنصر همانی نیم‌گروه S و S را تکواره می‌نامیم.

برای هر نیم‌گروه بدون همانی S همانی ۱ با مشخصات زیر را می‌توان اضافه کرد:

$$1.1 = 1, \qquad (\forall s \in S): \ 1s = s = s1.$$

در اینصورت $S \cup \{1\}$ یک تکواره است و آن را با نماد S^1 نمایش می دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$S^1 = \begin{cases} S & 1 \in S \\ S \cup \{1\} & 1 \notin S \end{cases}$$

S^1 را تکواره به‌دست آمده از S با الحاق عنصر همانی به آن می‌نامیم.

مثال ۷.۱.۱.

– $(\mathbb{N}, \cdot)$ یک تکواره و $(\mathbb{N}, +)$ یک نیم‌گروه است.

– $(\mathbb{Z}, \gcd)$ با عمل دوتایی $(\forall z_1, z_2 \in Z): \ \ z_1.z_2 = \gcd(z_1, z_2)$، که در آن gcd بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک z_1 و z_2 می‌باشد، یک نیم‌گروه است.

تعریف ۸.۱.۱. گروه عبارتست از یک تکواره S به‌طوری‌که برای هر $s \in S$ عنصر منحصربفردی مانند s^{-1} در S موجود باشد، به‌طوری‌که $1 = ss^{-1} = s^{-1}s$.

مثال ۹.۱.۱. $(\mathbb{Z}, +)$ و $(\mathbb{Q}, +)$ هر دو مثال‌هایی از گروه می‌باشند.

تعریف ۱۰.۱.۱. زیرمجموعه ناتهی T از نیم‌گروه S را یک زیر نیم‌گروه S گوییم، هرگاه $T^2 \subseteq T$. به عبارت دیگر T زیرنیم‌گروه S است، هرگاه تحت عمل S بسته باشد، یعنی برای هر $x, y \in T$، $xy \in T$.

اگر S تکواره‌ای با عنصر همانی ۱ باشد، اگر $1 \in T$، آنگاه زیر نیم‌گروه T را زیر تکواره S گوییم.

تعریف ۱۱.۱.۱. زیرمجموعه ناتهی I از نیم‌گروه S را ایدآل چپ (راست) S گوییم، اگر $SI \subseteq I$ $(IS \subseteq I)$. هر ایدآل چپ و راست S را یک ایدآل دوطرفه S گوییم.
بوضوح S و $\{0\}$ ایدآل‌هایی از S هستند که آن‌ها را ایدآل‌های بدیهی نیم‌گروه S گوییم. ایدآل I با این خاصیت که $\{0\} \subset I \subset S$ را یک ایدآل سره (حقیقی) S گوییم.

مثال ۱۲.۱.۱. اگر $S = \{1, x, 0\}$ یک نیم‌گروه با شرط $x^2 = 0$ باشد، آنگاه $T = \{0, 1\}$ زیر نیم‌گروه S است، زیرا نسبت به عمل S بسته است. اما T یک ایدآل S نیست، زیرا $TS = \{1, x, 0\} \not\subset T$.

تعریف ۱۳.۱.۱. فرض کنید S یک نیم‌گروه و a عضوی از آن باشد. $S^1a = Sa \cup \{a\}$ کوچک‌ترین ایدآل چپ S شامل a است که آن را ایدآل چپ اصلی تولیدشده توسط a گوییم و با نماد S^1a نشان می‌دهیم.
به‌طور مشابه $aS^1 = aS \cup \{a\}$ ایدآل راست اصلی تولیدشده توسط a می‌باشد.
همچنین $S^1aS^1 = SaS \cup aS \cup Sa \cup \{a\}$ را ایدآل اصلی تولیدشده توسط a می‌نامیم.

تعریف ۱۴.۱.۱. فرض کنید X یک مجموعه و ρ یک رابطه روی X باشد. ρ را یک رابطه هم‌ارزی روی X گوییم، هرگاه واجد خواص زیر باشد:

(۱) برای هر $x \in X$، $x\rho x$.

(۲) برای هر $x, y \in X$، $x\rho y$ ایجاب کند $y\rho x$.

(۳) برای هر $x, y, z \in X$، $x\rho y$ و $y\rho z$ ایجاب کند $x\rho z$.

خواص بالا به ترتیب انعکاسی، تقارنی و تعدی نامیده می‌شوند.

تعریف ۱۵.۱.۱. فرض کنید S یک مجموعه، ρ یک رابطه هم‌ارزی روی S و s عنصر دلخواهی از S باشد. رده هم‌ارزی s را با نماد $[s]_\rho$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$[s]_\rho = \{t \in S; t\rho s\} .$$

مجموعه تمام رده‌های هم‌ارزی را مجموعه خارج قسمتی S توسط ρ می‌نامیم و با نماد S/ρ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱۶.۱.۱. فرض کنید S یک نیم‌گروه و ρ یک رابطه روی S باشد. رابطه ρ

— سازگار راست نامیده می‌شود، هرگاه برای هر $s, t, u \in S$، $s\rho t$ ایجاب کند $(su)\,\rho\,(tu)$.

— سازگار چپ نامیده می‌شود، هرگاه برای هر $s, t, u \in S$، $s\rho t$ ایجاب کند $(us)\,\rho\,(ut)$.

— سازگار نامیده می‌شود، هرگاه سازگار راست و چپ باشد.

تعریف ۱۷.۱.۱. یک رابطه هم ارزی سازگار چپ (راست) را یک همنهشتی چپ (راست) گوییم و رابطه هم‌ارزی سازگار، همنهشتی نامیده می‌شود.

تعریف ۱۸.۱.۱. فرض کنید S یک نیم‌گروه و ρ یک رابطه همنهشتی روی S باشد، اگر برای هر $s, t \in S$، $[s]_\rho [t]_\rho = [st]_\rho$، آنگاه S/ρ به یک نیم‌گروه تبدیل می‌شود که آن را نیم‌گروه خارج‌قسمتی S توسط ρ می‌نامیم.

توجه کنید که اگر S یک تکواره باشد، آنگاه S/ρ یک تکواره با عنصر همانی $[۱]_\rho$ می‌باشد و دارای خاصیت زیر است:

$$(\forall a \in S): \qquad [a]\,\rho\,[۱]\,\rho = [a]\,\rho = [a۱]\,\rho = [۱]\,\rho\,[a]\,\rho.$$

تعریف ۱.۱.۱۹. فرض کنید $(S,\cdot)$ و $(T,\cdot)$ دو نیم‌گروه باشند. نگاشت $\varphi : S \to T$ را یک همریختی نیم‌گروه‌ها گوییم، هرگاه برای هر $x,y \in S$ داشته باشیم:

$$\varphi\,(xy) = \varphi\,(x)\,\varphi\,(y)\,.$$

اگر S و T نیم‌گروه‌های به ترتیب با عناصر همانی ۱_S و ۱_T باشند. نگاشت $\varphi : S \to T$ را همریختی تکواره‌ها گوییم، هرگاه برای هر $x,y \in S$ داشته باشیم:

$$\varphi\,(xy) = \varphi\,(x)\,\phi\,(y)\,, \qquad \varphi\,(۱_S) = ۱_T.$$

— همریختی φ را تک‌ریختی گوییم، هرگاه یک‌به‌یک باشد.

— همریختی φ را بروریختی گوییم، هرگاه پوشا باشد.

— همریختی φ را یک‌ریختی گوییم، هرگاه یک‌به‌یک و پوشا باشد و می‌نویسیم $S \cong T$.

تعریف ۱.۱.۲۰. عنصر e از نیم‌گروه S را خودتوان گوییم، هرگاه $e = e^۲$. مجموعه تمام عناصر خودتوان S را با $E(S)$ نمایش می‌دهیم. نیم‌گروه S را نیم‌گروه خودتوان گوییم، هرگاه هر عنصر $s \in S$ خودتوان باشد.

— به عنوان مثال $(\mathbb{N}, gcd)$ یک نیم‌گروه خودتوان است.

تعریف ۱.۱.۲۱. نیم‌گروه S را برگشت‌پذیر راست (چپ) گوییم، هرگاه هر دو ایدآل چپ (راست) دلخواه S دارای اشتراک ناتهی باشند. به عبارت دیگر تکواره S را برگشت‌پذیر راست (چپ) گوییم، هرگاه

$$(\forall s,t \in S)\,(\exists u,v \in S): \quad us = vt\,(su = tv)$$

تعریف ۲۲.۱.۱. تکواره S را تاشونده راست (چپ) گوییم، هرگاه

$$(\forall s, t \in S)\,(\exists u \in S): \quad su = tu\,(us = ut)$$

واضح است که تکواره‌های تاشونده راست (چپ)، برگشت‌پذیر چپ (راست) می‌باشند. البته عکس این مطلب در حالت کلی برقرار نمی‌باشد. به عنوان مثال تکواره $(\mathbb{N}, \cdot)$ یک تکواره برگشت‌پذیر راست است اما تاشونده چپ نیست.

تعریف ۲۳.۱.۱. عنصر s از نیم‌گروه S را منظم گوییم، هرگاه عنصر $s' \in S$ موجود باشد به‌طوری‌که $ss's = s$.

نیم‌گروه S را منظم گوییم، هرگاه هر عضو آن منظم باشد.

لم ۲۴.۱.۱([۵]). فرض کنید s یک عنصر منظم از نیم‌گروه S باشد، یعنی $x \in S$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $s = sxs$، آنگاه sx و xs خودتوان هستند و $Ss = S(xs)$ و $sS = (sx)S$.

تعریف ۲۵.۱.۱. عنصر $s \in S$

— حذف‌پذیر راست نامیده می‌شود، هرگاه برای هر $r, t \in S$، $rs = ts$ ایجاب کند $r = t$.

— حذف‌پذیر چپ نامیده می‌شود، هرگاه برای هر $r, t \in S$، $sr = st$ ایجاب کند $r = t$.

— حذف‌پذیر نامیده می‌شود، هرگاه s حذف‌پذیر چپ و راست باشد.

نیم‌گروه S حذف‌پذیر چپ (حذف‌پذیر راست یا حذف‌پذیر) نامیده می‌شود، هرگاه هر عنصر S حذف‌پذیر چپ (حذف‌پذیر راست یا حذف‌پذیر) باشد.

۱—۲ $S-$ سیستم‌ها

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنید S یک تکواره با همانی 1_S و A یک مجموعه ناتهی باشد. A را یک $S-$ سیستم راست گوییم، هرگاه نگاشتی مانند

$$A \times S \to A$$
$$(a, s) \mapsto as$$

موجود باشد به‌طوری‌که:

(۱) برای هر $a \in A$، $a1_S = a$.

(۲) برای هر $a \in A$ و برای هر $s, t \in S$، $a\,(st) = (as)\,t$.

$S-$سیستم راست A را با A_S نمایش می‌دهیم و به‌طور مشابه $S-$ سیستم چپ $_SA$ را تعریف می‌کنیم.

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنید A_S یک $S-$ سیستم راست و $A' \subseteq A_S$ یک زیرمجموعه غیرتهی باشد. A' یک زیرسیستم A_S نامیده می‌شود، هرگاه

$$(\forall a' \in A')\,(\forall s \in S): \quad a's \in A'.$$

تعریف ۳.۲.۱. فرض کنید A_S یک $S-$ سیستم راست باشد. عنصر $\theta \in S$ صفر A_S نامیده می‌شود، اگر

$$(\forall s \in S): \quad \theta s = \theta.$$

یعنی $\{\theta\}$ یک زیرسیستم تک عضوی می‌باشد.

قضیه ۴.۲.۱. هر ایدآل راست از S یک زیرسیستم از S_S است.

برهان. واضح است، زیرا همواره، $KS \subseteq K$.

تعریف ۵.۲.۱. فرض کنید A_S و B_S دو سیستم راست باشند. نگاشت $f: A_S \to B_S$ همریختی $S-$ سیستم‌های راست نامیده می‌شود، اگر

$$(\forall a \in A)\,(\forall s \in S): \quad f\,(as) = f\,(a)\,s$$

مجموعه همه $S-$ همریختی‌های از A_S به‌توی B_S را با $Hom\,(A_S, B_S)$ یا گاهی اوقات با $Hom_S\,(A, B)$ نمایش می‌دهیم.

$S-$ همریختی $f : A_S \to B_S$ را یک $S-$ یک‌ریختی گوییم، اگر f دوسویی باشد. در این حالت گوییم A_S و B_S یک‌ریخت هستند و می‌نویسیم $A_S \cong B_S$.

تعریف ۶.۲.۱. فرض کنید A_S یک $S-$ سیستم باشد. یک $S-$ همریختی $f : A_S \to A_S$ یک درون‌ریختی و یک درون‌ریختی دوسویی یک خودریختی از A_S نامیده می‌شود.

مجموعه $Hom\,(A_S, A_S)$ تحت ترکیب نگاشت‌ها تشکیل تکواره می‌دهد و با $End\,(A_S)$ نمایش داده می‌شود و مجموعه همه خودریختی‌های A_S تحت ترکیب نگاشت‌ها تشکیل گروه می‌دهند و با $Aut\,(A_S)$ نمایش داده می‌شود که به ترتیب تکواره درون‌ریختی و گروه خودریختی نامیده می‌شوند.

تعریف ۷.۲.۱. فرض کنید A_S یک $S-$ سیستم باشد. رابطه هم‌ارزی ρ روی A همنهشتی $S-$سیستم‌ها یا همنهشتی روی A_S نامیده می‌شود، اگر برای هر $s \in S$ و برای هر $a, a' \in A_S$، $a\rho a'$ ایجاب کند $(as)\,\rho\,(a's)$.

— اگر $X \subseteq A_S \times A_S$، $\rho\,(X)$ کوچک‌ترین همنهشتی روی A_S شامل X خواهد بود که اشتراک همه همنهشتی‌های شامل X است.

— همنهشتی ρ به‌طور متناهی تولیدشده نامیده می‌شود، هرگاه زیرمجموعه متناهی $X \subseteq A_S \times A_S$ موجود باشد به‌طوری‌که $\rho = \rho\,(X)$.

— همنهشتی ρ تک‌دوری نامیده می‌شود، هرگاه، تولید شده توسط $(x, y) \in A_S \times A_S$ باشد و به‌صورت $\rho\,(x, y)$ نمایش داده می‌شود.

— فرض کنید ρ یک همنهشتی روی A_S باشد. ضرب راست به وسیله عناصر S را روی مجموعه خارج‌قسمتی $A_{S/\rho} = \left\{[a]_\rho ; a \in A\right\}$ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(\forall s \in S): \quad [a_\rho]\,s = [as]_\rho.$$

از خاصیت همنهشتی سیستم‌ها نتیجه می‌شود که این ضرب خوش‌تعریف است. چون $a\rho a'$ و چون ρ همنهشتی راست روی A_S است پس، برای هر $s \in S$ $(as)\,\rho\,(a's)$، لذا $[as]_\rho = [a's]_\rho$.

به عنوان یک نتیجه $A_{S/\rho}$ به یک $S-$ سیستم راست تبدیل می‌شود که سیستم خارج قسمتی A_S به وسیله ρ نامیده می‌شود.

$$\begin{gathered} A_{S/\rho} \times S \to A_{S/\rho} \\ \left([a]_\rho, s\right) \mapsto [a]_\rho s = [as]_\rho \end{gathered}$$

با توجه به دو خاصیت زیر $A_{S/\rho}$ یک $S-$ سیستم راست می‌باشد.

$$\begin{aligned} &(i) \quad [a]_\rho ۱ = [a۱]_\rho = [a]_\rho \\ &(ii) \quad [a]_\rho (ss') = [a(ss')]_\rho = [(as)s']_\rho = [as]_\rho s' = \left([a]_\rho s\right) s' \end{aligned}$$

سیستم خارج قسمتی راست S به‌وسیله همنهشتی راست تک‌دوری، سیستم راست تک‌دوری نامیده می‌شود.

به‌طور مشابه، تعاریف و مفاهیم فوق برای همنهشتی‌های روی سیستم‌های چپ تعریف می‌شوند.

اگر $X \subseteq {}_SA \times {}_SA$، آنگاه $\lambda(X)$ کوچک‌ترین همنهشتی روی ${}_SA$ شامل X را نشان می‌دهد.

تعریف ۸.۲.۱.

(۱) هر زیر سیستم $B_S \subseteq A_S$ همنهشتی ریس ρ_B روی A را با دستور زیر مشخص می‌کند:

$a\rho_B a'$ اگر $a, a' \in B$ یا $a = a'$.

سیستم خارج‌قسمتی نتیجه شده را با A_S/B_S نمایش می‌دهیم و آن را سیستم خارج‌قسمتی ریس A_S به‌وسیله زیرسیستم B_S می‌نامیم.

در حالت خاص اگر $K_S \subseteq S_S$ یک ایدآل راست باشد، آنگاه S_S/K_S سیستم خارج‌قسمتی S_S به‌وسیله ایدآل راست K_S می‌نامیم.

(۲) اگر $f : A_S \to B_S$ یک $S-$همریختی باشد، هم‌ارزی $Kerf$ که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(\forall a, a' \in A_S): \quad a\,(Kerf)\,a' \Leftrightarrow f(a) = f(a').$$

یک همنهشتی $S-$سیستم‌های راست است که همنهشتی هسته f نامیده می‌شود.

(۳) فرض کنید A_S یک $S-$ سیستم راست باشد و فرض کنید $a \in A_S$. همریختی λ_a از S_S به‌توی A_S را

برای هر $s \in S$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\lambda_a : S_S \to A_S$$
$$s \mapsto as$$

همنهشتی $\ker \lambda_a$ روی S_S همنهشتی پوچ‌ساز $a \in A_S$ نامیده می‌شود.

به‌طور مشابه، اگر ${}_SA$ یک $S-$ سیستم چپ باشد و $a \in {}_SA$، همریختی ρ_a از ${}_SS$ به‌توی ${}_SA$ را برای هر $s \in S$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\rho_a : {}_SS \to {}_SA$$
$$s \mapsto sa$$

همنهشتی $\ker \rho_a$ روی ${}_SS$ همنهشتی پوچ‌ساز $a \in {}_SA$ نامیده می‌شود.

تعریف ۹.۲.۱. $S-$ سیستم راست A_S را تصویری گوییم، اگر برای هر برویختی $\pi : P_S \to Q_S$ و هر همریختی $f : A_S \to Q_S$ همریختی $g : A_S \to P_S$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $\pi g = f$.

به عبارت دیگر نمودار زیر جابجایی باشد.

$$\begin{tikzcd} & A_S \arrow[dl, "g"'] \arrow[d, "f"] \\ P_S \arrow[r, "\pi"'] & Q_S \end{tikzcd}$$

تعریف ۱۰.۲.۱. عنصر s از تکواره S، $e-$ حذف‌پذیر چپ (راست) نامیده می‌شود، اگر $se = s$ $(es = s)$ و $Ker\lambda_s \leq Ker\lambda_e$ $(Ker\rho_s \leq Ker\rho_e)$.

تکواره S، PP چپ (راست) نامیده می‌شود، اگر هر عنصر $s \in S$، برای یک خودتوان $e \in S$، $e-$ حذف‌پذیر راست (چپ) باشد.

گروه و تکواره حذف‌پذیر چپ مثال‌هایی از یک تکواره PP راست هستند.

گزاره ۱۱.۲.۱.([۵]). S یک تکواره PP راست است اگروتنها اگر همه ایدآل‌های راست اصلی S تصویری باشند. به عبارت دیگر برای هر $z \in S$ ایدآل راست اصلی zS تصویری است اگروتنها اگر

z، برای یک خودتوان $e \in S$، $e-$ حذف‌پذیر چپ باشد.

تعریف ۱۲.۲.۱. A_S یک سیستم راست ساده نامیده می‌شود، هرگاه شامل هیچ زیرسیستم سره‌ای نباشد. واضح است که Θ_S یک $S-$ سیستم ساده است.

۱—۳ رسته

تعریف ۱.۳.۱. یک رسته C تشکیل شده از:

۱) کلاس $\mathrm{Ob}\ \mathrm{C}$ متشکل از اعضایی که اشیاء C نامیده می‌شوند.

۲) به‌ازای هر زوج مرتب (A,B) از اشیاء C مجموعه $Mor_C(A,B)$ که عضوهای آن را مورفیسم (ریخت) های از A به B می‌نامیم، نسبت داده می‌شود به‌طوری که اگر $A \neq A'$ یا $B \neq B'$، آنگاه

$$Mor_C(A,B) \cap Mor_C(A',B') = \emptyset$$

۳) ترکیب ریخت‌ها، یعنی به‌ازای هر سه‌تایی (A,B,C) از اشیاء در C، نگاشت

$$Mor_C(A,B) \times Mor_C(B,C) \longrightarrow Mor_C(A,C)$$

$$(f,g) \mapsto g \circ f$$

موجود است به‌قسمی که:

a) این ترکیب شرکت‌پذیر است. یعنی برای اشیاء A، B، C و D در C و ریخت‌های $f \in Mor_C(A,B)$، $g \in Mor_C(B,C)$ و $h \in Mor_C(C,D)$ داشته باشیم: $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

b) برای هر شیء $A \in Ob\ \mathrm{C}$ ریخت $id_A \in Mor_C(A,A)$، ریخت همانی A، موجود باشد به‌قسمی که برای هر $f \in Mor_C(A,B)$، $B \in Ob\ \mathrm{C}$، داریم: $f \circ id_A = id_B \circ f = f$.

مثال ۲.۳.۱.

(۱) در رسته مجموعه‌ها که با Set نمایش داده می‌شود، اشیاء، مجموعه‌ها، ریخت‌ها، توابع بین مجموعه‌ها و