وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه تربیت معلم آذربایجان
دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی

پایان نامه مقطع کارشناسی ارشد
رشته ریاضی محض، گرایش جبر

عنوان

فیلترسازی ایده‌آلهای راتلیف ـ راش وابسته به ایده‌آل‌ها و مدول‌ها

استاد راهنما
دکتر جعفر امجدی

استاد مشاور
دکتر منیره صدقی

پژوهشگر
عفیفه خادم حسینی

اسفند ماه ۱۳۸۷
تبریز- ایران

تقدیم به:

پدر و مادر فداکارم

همســر عزیــزم

برادر مهربانم

و

آنانکه در تمام مراحل در کنارم بودند

وَ هوَ عالم بِکُل شئ

الهی زبان قاصر است از بردن نامت چه رسد که حمد و ثنایت گوید. اما این بار نه عقل که دل فرمان می‌راند به چشم و گوش و زبان وحتی عقل که شکر نعمت های بی پایان تو گویند هر چند عاجز و ناتوان. پس الهی سپاس از آن آغاز که مرا به بندگی برگزیدی، پرورشم دادی، هدایتم کردی ، راه‌ها را برایم هموار نمودی ، زندگی را بر من آسان ساختی و توانائیم بخشیدی که گام نهم در مسیری که راه اندیشیدن را درآن بیاموزم . الهی می‌دانم که حقیقت علم شناخت توست و می‌دانم که من تو را نشناخته‌ام آنگونه که باید می‌شناختم ولی عاجزانه از تو هدایت می‌طلبم برای دانستن ذرّه‌ای از حقیقت که تو عالمی بر صداقت خواسته‌ام و قادری بر هدایت لحظه به لحظه‌ام .

اکنون که به لطف پروردگار پایان نامه کارشناسی ارشد را به اتمام رسانده‌ام بر خود واجب می‌دانم از زحمات تمام کسانی که در این راه مرا یاری کرده‌اند تشکر نمایم . در آغاز از زحمات دلسوزانه استاد راهنمای خود جناب دکتر جعفر امجدی که شیوه تعلیمشان همیشه با فروتنی و از جان و دل است، تشکر کنم. از خانم دکتر منیره صدقی که سمت استاد مشاور مرا داشتند بخاطر راهنمایی‌های ارزشمندشان و از اساتید محترم دکتر نقی‌پور و دکتر شیخ‌الاسلامی که زحمت داوری این پایان نامه را قبول کرده‌اند قدردانی می‌کنم. از دوستان عزیزم که گاه و بی گاه از آنها راهنمایی خواسته‌ام و از تمام اساتید ومعلمین دوران تحصیلم چه در دانشگاه و چه در مدرسه که گام‌های نخستین را پا به پای آنها برداشته‌ام تشکر می‌کنم.

در پایان از پدر و مادر عزیزم که زمینه ساز رشد و پرورش و تحصیل من بوده‌اند و همواره مرا یاری کرده‌اند وبرادر مهربانم که همیشه مشوق من بوده و همسرم که در طول این دوره‌ی تحصیلی همواره در کنارم بود و تشویقم می‌کرد و سرگرم بودن مرا به تحصیل تحمل کرده است، قدردانی می‌نمایم.

فَاذا فَرَغتَ فَانصَب و اِلی ربّکَ فَارغَب

عفیفه خادم حسینی

اسفند ۱۳۸۷

فهرست مندرجات

چکیده

فرض کنید R حلقه جابجایی نوتری، M یک R ـ مدول متناهی مولد و I ایده‌آل واقعی از R باشد. در این پایان نامه گزاره هایی از $\widetilde{I}^{(M)} = \cup_{k\geq 1}(I^{k+1}M :_R I^kM)$ ــ ایده‌آل راتلیف ـ راش وابسته به M ــ بیان و بررسی شده است. وقتی $M = R$، (یا بطور کلی تر وقتی M پروژکتیو باشد،) آنگاه $\widetilde{I}^{(M)} = \widetilde{I}$ که $\widetilde{I}$ بستار راتلیف ـ راش I می‌باشد. اگر I ایده‌آل منظم و $\mathrm{Ann}_R(M) = 0$، نشان خواهیم داد $\{\widetilde{I^n}^{(M)}\}_{n\geq 0}$، یک I ـ فیلترسازی پایدار است. وقتی $M_{\mathfrak{p}}$ بازای هر $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \setminus \mathrm{Max}(R)$ آزاد باشد، برای ایده‌آل منظم I تحت شرایطی روی R نشان خواهیم داد که $l(\frac{\widetilde{I}^{(M)}}{\widetilde{I}})$ متناهی است. بعلاوه $\widetilde{I}^{(M)} = \widetilde{I}$ اگر $A^*(I)\cap\mathrm{Max}(R) = \emptyset$. ($A^*(I)$ مقدار ایستای دنباله $\mathrm{Ass}(\frac{R}{I^n})$ است.) تعمیمی که از $\widetilde{I}$ در نظر گرفته ایم کمک می کند که فیلترسازی معمول راتلیف ـ راش را بهتر بفهمیم. وقتی R موضعی و I ایده‌آل منظم $\mathfrak{m}$ ـ اولیه باشد روش ما محاسبه کران k را بطوریکه برای $n \geq 1$، $\widetilde{I^n} = (I^{n+k} :_R I^k)$ آسانتر می کند. برای هر ایده‌آل I نشان خواهیم داد بازای هر $n \gg 0$، $\widetilde{I^n_M} = I^nM + \Gamma_I(M)$. این ایجاب می کند که $\widetilde{\Re}(I, M) = \oplus_{n\geq 0}\widetilde{I^n_M}$ نوتری است، اگر و تنها اگر $\mathrm{depth}M > 0$. جالب اینکه اگر $\mathrm{dim}M = 1$ آنگاه $\widetilde{G_I}(M) = \oplus_{n\geq 0}\frac{\widetilde{I^n_M}}{\widetilde{I^{n+1}_M}}$ بعنوان $gr_I(M)$ ـ مدول نوتری و کوهن مکالی است. همچنین کاربرد در ضرایب هیلبرت نیز بیان شده است.

کلید واژه ها: بستار راتلیف ـ راش، فیلترسازی راتلیف ـ راش، توابع هیلبرت، ایده‌آل‌های اول وابسته.

مقدمه

ایده اصلی بستار صحیح یک ایده‌آل در یک حلقه جابجایی نوتری در سال ۱۹۵۴ توسط نورثکات[۱] و ریس[۲] بیان گردید. امّا در سال ۱۹۷۸ راتلیف و راش نوع دیگری از بستار را برای یک ایده‌آل در یک حلقه دلخواه بصورت $\widetilde{I} = \cup_{k\geq 1}(I^{k+1} :_R I^k)$ معرفی کردند [۲۲] که در صورت نوتری بودن حلقهٔ R، بازای $k \gg 0$، $\widetilde{I} = (I^{k+1} :_R I^k)$. اکنون شاهد مقالات بسیاری در این مورد هستیم و در مورد فیلترسازی $F_R^I = \{\widetilde{I^n}\}_{n\geq 0}$ بحث‌هایی مطرح شده است. زمانیکه $(R, \mathfrak{m})$ یک حلقهٔ موضعی و I یک ایده‌آل $\mathfrak{m}$ ـ اولیه باشد، این فیلترسازی کاربرد زیادی در نظریه توابع هیلبرت دارد، که بعنوان مثال می‌توان در مرجع [۲۴] مشاهده نمود.

در سال ۱۹۹۳ این بستار نسبت به یک R ـ مدول مانند M به صورت $\widetilde{I_M} = \cup_{k\geq 1}(I^{k+1}M :_M I^k)$ تعمیم داده شد. همچنین در سال ۲۰۰۷ امجدی ـ نقی‌پور در مقاله [۱] و متعاقب آن پوتنپوراکال ـ فاهد ذوالفقار در [۲۰] این بستار را برای یک ایده‌آل به صورت وابسته به یک R ـ مدول مانند M به شکل زیر تعمیم داده‌اند

$$\widetilde{I}^{(M)} = \cup_{k\geq 1}(I^{k+1}M :_R I^kM)$$

که آن را بستار راتلیف ـ راش I وابسته به M می‌نامیم. این تعمیم ما را در شناخت بهتر فیلترسازی معمولی راتلیف ـ راش کمک می‌کند.

در فصل اول این پایان نامه مفاهیم اولیه مورد نیاز در فصول بعد بیان شده است. در فصل های ۲ و ۳ به بررسی مقاله [۲۰] پرداخته‌ایم. در این مقاله حلقه‌ها نوتری و مدول‌ها متناهی مولد در نظر گرفته شده‌اند. ولی ما سعی کرده‌ایم حدالامکان این شروط را حذف و یا از شرایطی ضعیف‌تر استفاده کنیم.

در فصل ۲ ابتدا تعاریف اولیه بستار راتلیف ـ راش و تعمیم آن و خواص آنها بیان شده است

---

[۱] Northcott

[۲] Rees

و مثال هایی را از ایده‌آل‌هایی که بسته راتلیف ـ راش هستند، آورده‌ایم. سپس به فیلترسازی $F_M^I = \{\widetilde{I^n}^{(M)}\}_{n\geq ۰}$ پرداخته ایم و نشان داده ایم که یک I ـ فیلترسازی است (در قضیه ۲.۳.۲ مشاهده کنید) و در نتیجه مدول $\Re(F_M^I) = \oplus_{n\geq ۰}\widetilde{I^n}^{(M)}$ یک $\Re(I) = \oplus_{n\geq ۰} I^n$ ـ جبر است. سپس با پرداختن به $\widetilde{I_M}$ ـ بستار راتلیف ـ راش I نسبت به M ـ نشان داده‌ایم که $\widetilde{\Re}(I,M) := \oplus \widetilde{I_M^n}$، $\Re(F_M^I)$ ـ مدول مدرج است (گزاره ۵.۳.۲).

در بخش ۴.۲ نشان داده‌ایم $I \to \widetilde{I}^{(M)}$ یک تابع پیچیده روی مجموعهٔ ایده‌آل‌های R، به خاطر خاصیت $\widetilde{\widetilde{I}^{(M)}}^{(M)} = \widetilde{I}^{(M)}$، می‌باشد. همچنین نشان داده‌ایم وقتی $\mathrm{grade}_M I > ۰$، آنگاه $\widetilde{I}^{(M)}$ بسته راتلیف ـ راش و همچنین بسته راتلیف ـ راش وابسته به M است.

در بخش ۵.۲ به بررسی رابطه بستار راتلیف ـ راش وابسته به M و بستار صحیح پرداخته ایم و نشان داده ایم اگر $\mathrm{rank} M = ۱$ و I منظم باشد آنگاه $\widetilde{I}^{(M)} \subseteq \overline{I}$. نهایتاً ثابت کرده ایم مجموعه

$$C(I) := \{J| \ \text{ایده‌آل منظم}\ J\ \text{و}\ \widetilde{I}^{(J)} = \overline{I}\}$$

غیر تهی بوده و دارای عضو ماکسیمال منحصر به فرد است.

در بخش ۶.۲ با نگاهی دیگر به فیلترسازی F_M^I، ثابت کرده ایم که تحت شرایط نسبتاً ملایمی، I ـ پایدار است. همچنین ثابت کرده ایم $\mathrm{Ann}_R(M) \subseteq \cap_{n\geq ۱}\widetilde{I^n}^{(M)}$. لذا اگر F_M^I فیلترسازی I ـ پایدار باشد، آنگاه $\mathrm{Ann}_R(M) \subseteq \cap_{n\geq ۱} I^n$.

در فصل ۳ $\widetilde{I}^{(M)}$ و F_M^I را در حالات مختلف بررسی کرده‌ایم. در حالتی که $M_\mathfrak{p}$ بازای هر $\mathfrak{p}$ عضو $\mathrm{Spec}(R)\backslash\mathrm{Max}(R)$ آزاد باشد و $\mathrm{Ass}R \cap \mathrm{Max}R = \emptyset$، نشان داده‌ایم که F_M^I برای هر ایده‌آل منظم، I ـ فیلترسازی پایدار است و اگر $A^*(I) \cap \mathrm{Max}R = \emptyset$ (منظور از $A^*(I)$ مقدار ایستای $\mathrm{Ass}\frac{R}{I^n}$) آنگاه $\widetilde{I}^{(M)} = \widetilde{I}$. در حالتی که $\mathrm{Ann}_R(M) \neq ۰$ و $\mathrm{grade}_M I = ۰$ مدول را با ایده‌آل $(\Gamma_I(M) :_R M)$ عوض کرده ایم و نشان داده ایم (گزاره ۳.۲.۳) که اگر $M \neq \Gamma_I(M)$ آنگاه بازای هر $n \gg ۰$، $\widetilde{I^{n+۱}}^{(M)} = I.\widetilde{I^n}^{(M)} + (\Gamma_I(M) :_R M)$ و نهایتاً ثابت کرده ایم بازای هر $n \gg ۰$، $\widetilde{I_M^n} = I^n M + \Gamma_I(M)$. در ۳.۳ رابطه $\widetilde{I}^{(M)}$ با عضو صوری بیان شده است که خواص جالبی را برای $\widetilde{I}$، $\widetilde{I}^{(M)}$ و $\widetilde{I_M}$ به ارمغان آورده و موجب یافتن کران پائینی برای $k \gg ۰$ در تعریف این بستار ها گردیده است. (مراجعه کنید به ۸.۳.۳، ۱۱.۳.۳ و ۱۲.۳.۳). در ۴.۳ حالتی که I دارای تحویل

اصلی باشد بررسی شده و عدد تحویل کران دیگری را برای $k \gg 0$ در تعریف $\widetilde{I^n}^{(M)}$ بدست آورده است. سپس به بررسی مثال‌هایی با استفاده از همین کران پرداخته‌ایم. در بخش پایانی ثابت کرده‌ایم که اگر $\dim M = 1$، آنگاه $\widetilde{G_I}(M) = \oplus_{n \geq 0} \frac{\widetilde{I_M^n}}{\widetilde{I_M^{n+1}}}$، یک $gr_I(M)$ ـ مدول نوتری و کوهن مکالی با بعد ۱ است. این جالب است که اگر $\operatorname{depth} M = 0$ (و $\dim M = 1$) آنگاه $\widetilde{\Re}(I, M)$ بعنوان $\Re(I)$ ـ مدول نوتری نیست. ما کاربردهایی از این نتایج را در توابع هیلبرت بیان کرده‌ایم.

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اولیه

در این فصل بعضی از مفاهیم و قضایایی که در فصل‌های بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند، آورده می‌شود. در سراسر این پایان نامه تمام حلقه‌ها جابجایی و یکدار هستند.

۱.۱ تعاریف و مفاهیمی از جبر جابجائی

تعریف ۱.۱.۱ : فرض کنید R یک حلقه و I یک ایده‌آل واقعی از R باشد. رادیکال I را با نماد $\sqrt{I}$ نشان می‌دهیم و به صورت

$$\sqrt{I} = \{r \in R \mid \exists n \in \mathbb{N};\ r^n \in I\ \}$$

تعریف می‌کنیم.

تعریف ۲.۱.۱ : ایده‌آل I از حلقه R را پوچتوان گویند هر گاه $n \in \mathbb{N}$ موجود باشد بطوریکه $I^n = 0$.

لم ۳.۱.۱ : فرض کنید R یک حلقه و I یک ایده‌آل واقعی از R باشد. همچنین فرض کنید $\mathfrak{p}_i$، $1 \leq i \leq n$، ایده‌آل های اولی از R باشند، بطوریکه $I \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i$. دراین صورت $1 \leq i \leq n$ موجود است بطوریکه $I \subseteq \mathfrak{p}_i$.

برهان : رجوع شود به گزاره ۱۱.۱ مرجع [۳].

تعریف ۴.۱.۱ : فرض کنید R یک حلقه و M یک R ـ مدول باشد. پوچساز M نسبت به حلقه R را به صورت $\{x \in R \mid xM = ۰\}$ تعریف می کنیم و آن را با نماد $\mathrm{Ann}_R(M)$ یا $(۰ :_R M)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۵.۱.۱ : فرض کنید R یک حلقه و M و N دو R ـ مدول باشند. مجموعهٔ $\{x \in R \mid xN \subseteq M\}$ ایده‌آلی از R می‌باشد که آن را با نماد $(M :_R N)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۶.۱.۱ : فرض کنید R یک حلقه و I ایده‌آلی از R و M و N دو R ـ مدول باشند. بوضوح مجموعه $\{x \in M \mid xI \subseteq N\}$ زیر مدولی از M است که ما آن را با نماد $N :_M I$ نمایش می‌دهیم.

تبصره ۷.۱.۱ : بسادگی دیده می‌شود که $\mathrm{Ann}_R(M) = (۰ :_R M) = \bigcap_{x\in M}(۰ :_R x)$.

گزاره ۸.۱.۱ : فرض کنید R یک حلقه و M، R ـ مدول متناهی مولد باشد. همچنین فرض کنید S یک مجموعه بسته ضربی از R باشد. در این صورت

$$S^{-۱}\mathrm{Ann}_R(M) = \mathrm{Ann}_{S^{-۱}R}(S^{-۱}M).$$

برهان : رجوع شود به گزاره ۱۴.۳ مرجع [۳].

تبصره ۹.۱.۱ : فرض کنید R یک حلقه و $\mathfrak{p}$ ایده‌آل اولی از آن باشد. همچنین فرض کنید M یک R ـ مدول باشد. با فرض $S = R\backslash\mathfrak{p}$ حلقه $S^{-۱}R$ را بانماد $R_\mathfrak{p}$ و $R_\mathfrak{p}$ ـ مدول $S^{-۱}M$ را بانماد $M_\mathfrak{p}$ نشان خواهیم داد. همچنین بسادگی دیده می شود که $R_\mathfrak{p}$، یک حلقه موضعی باایده‌آل ماکسیمال $\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$ است.

گزاره ۱۰.۱.۱ : فرض کنید R یک حلقه، M یک R ـ مدول و S مجموعه بسته ضربی در R باشد. در این صورت $M \otimes_R S^{-۱}R = S^{-۱}M$.

برهان : رجوع شود به گزاره ۵.۳ مرجع [۳].

تعریف ۱۱.۱.۱ : فرض کنید R یک حلقه و M یک R ـ مدول باشد. M را باوفا[۱] گوئیم هرگاه

$$\mathrm{Ann}_R(M) = \langle ۰ \rangle.$$

[۱] Faithfull

تعریف ۱۲.۱.۱ : فرض کنید R یک حلقه و F یک R ـ مدول باشد. F را یکدست [۲] گوئیم هرگاه بازای هر دنبالهٔ دقیق از R ـ مدول ها و R ـ هومومورفیسم ها مانند

$$\circ \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow K \longrightarrow \circ$$

دنبالهٔ

$$\circ \longrightarrow M \otimes_R F \longrightarrow N \otimes_R F \longrightarrow K \otimes_R F \longrightarrow \circ$$

یک دنباله دقیق از R ـ مدول ها و R ـ هومومورفیسم ها باشد.

لم ۱۳.۱.۱ : فرض کنید R یک حلقه و M یک R ـ مدول باشد. در این صورت اگر M یکدست باشد آنگاه $M_{\mathfrak{p}}$ نیز بعنوان $R_{\mathfrak{p}}$ ـ مدول یکدست خواهد بود.

برهان : رجوع کنید به گزاره ۱۰.۳ مرجع [۳].

تبصره ۱۴.۱.۱ : بسادگی دیده می‌شود که $R[x]$ بعنوان R ـ مدول یکدست است.

تعریف ۱۵.۱.۱ : فرض کنید R یک حلقه و M یک R ـ مدول باشد. M را بطور باوفا یکدست [۳] گوئیم هر گاه بازای هر دنباله از R ـ مدول ها و R ـ هومومورفیسم ها مانند ψ، ψ دقیق باشد اگر و تنها اگر $M \otimes \psi$ دقیق باشد.

تعریف ۱۶.۱.۱ : فرض کنید R و T دو حلقه و $f : R \longrightarrow T$ یک هومومورفیسم حلقه ها باشد. اگر T بعنوان R ـ مدول بطور باوفا یکدست باشد، در این صورت f را بطور باوفا یکدست گوئیم. برای مثال به ۴۲.۱.۱ مراجعه کنید.

تعریف ۱۷.۱.۱ : فرض کنید R و T دو حلقه باشند T را R ـ جبر یکدست گویند هرگاه T بعنوان R ـ مدول یکدست باشد.

تبصره ۱۸.۱.۱ : حلقه $S^{-1}R$ یک R ـ جبر یکدست است.

[۲] flat

[۳] faithfully flat

قضیه ۱۹.۱.۱ : فرض کنید R و T دو حلقه بوده و T یک R ـ جبر یکدست باشد. همچنین فرض کنید M و N دو R ـ مدول باشند. در این صورت

$$(M :_R N) \otimes_R T = (M \otimes_R T :_T N \otimes_R T).$$

برهان : رجوع کنید به قضیه ۱.۱۸ مرجع [۱۵].

تعریف ۲۰.۱.۱ : فرض کنید R یک حلقه و M و N دو R ـ مدول باشند. مجموعهٔ همهٔ R ـ هومورفیسم های از M به N را با نماد $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ نمایش می‌دهیم. بسادگی دیده می‌شود که با عمل جمع توابع و ضرب اسکالر $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ یک R ـ مدول می‌باشد.

تعریف ۲۱.۱.۱ : فرض کنید R یک حلقه و P یک R ـ مدول باشد. در این صورت P را R ـ مدول پروکتیو گویند هر گاه بازای هر دنباله دقیق کوتاه مانند $0 \to M \to N \to K \to 0$ از R ـ مدول ها و R ـ هومورفیسم ها، دنبالهٔ

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(P,M) \to \mathrm{Hom}_R(P,N) \to \mathrm{Hom}_R(P,K) \to 0$$

یک دنبالهٔ دقیق از R ـ مدول ها و R ـ هومورفیسم ها باشد.

تعریف ۲۲.۱.۱ : فرض کنید R یک حلقه باشد. $\bigcap_{\mathfrak{m}\in \mathrm{Max}R} \mathfrak{m}$ را جیکبسون [۴] رادیکال R تعریف کرده و آن را با نماد $J(R)$ نشان می‌دهیم.

لم ۲۳.۱.۱ : (لم ناکایاما) فرض کنید R یک حلقه و M یک R ـ مدول متناهی مولد و I ایده‌آلی از R باشد، بطوریکه $I \subseteq J(R)$. در این صورت اگر $IM = M$، آنگاه $M = 0$.

تعریف ۲۴.۱.۱ : فرض کنید R یک حلقه باشد. ایده‌آل واقعی q از R را یک ایده‌آل اولیه گوئیم هر گاه بازای هر x و y از R که $xy \in q$ نتیجه دهد $x \in q$ یا $y \in \sqrt{q}$.

گزاره ۲۵.۱.۱ : فرض کنید R یک حلقه و q یک ایده‌آل اولیه از آن باشد. در این صورت $\sqrt{q}$ کوچکترین ایده‌آل اول R است که شامل q می باشد.

برهان : رجوع شود به لم ۵.۴ مرجع [۲۸].

[۴] Jacobson

تبصره ۲۶.۱.۱ : با نماد ها و شرایط گزاره فوق اگر فرض کنیم $p := \sqrt{q}$ آنگاه q را p ـ اولیه گوئیم.

تعریف ۲۷.۱.۱ : فرض کنید R یک حلقه، M یک R ـ مدول و N زیر مدولی از آن باشد. در این صورت تعریف می‌کنیم

$$r_M(N) := \sqrt{\mathrm{Ann}_R(\frac{M}{N})}.$$

تعریف ۲۸.۱.۱ : فرض کنیم R یک حلقه، M یک R ـ مدول و Q زیر مدول واقعی از آن باشد. Q را زیر مدول اولیه M گوئیم هر گاه بازای هر x از R و هر m از M که $xm \in Q$ آنگاه $m \in Q$ یا $x \in r_M(Q)$.

تبصره ۲۹.۱.۱ : بسادگی دیده می شود وقتی Q زیر مدول اولیه از M باشد، $(Q :_R M)$ یک ایده‌آل اولیه R می باشد. و اگر فرض کنیم $\mathfrak{p} := \sqrt{(Q :_R M)}$، آنگاه Q را زیر مدول $\mathfrak{p}$ ـ اولیه M می‌نامیم.

لم ۳۰.۱.۱ : *لم آرتین ـ ریس* [۵]

فرض کنیم R یک حلقه نوتری، I ایده‌آلی از R، و M یک R ـ مدول متناهی مولد باشد و N و N' زیر مدول های M باشند. در این صورت عدد صحیح مثبتی مانند r چنان موجود است که بازای هر n طبیعی بزرگتر از r داریم:

$$I^n N \cap N' = I^{n-r}(I^r N \cap N').$$

برهان : رجوع کنید به ۷.۳ مرجع [۱۵].

تعریف ۳۱.۱.۱ : فرض کنید R یک حلقه و I و J ایده‌آل هایی از آن باشند بطوریکه $J \subseteq I$. در این صورت J را تحویل [۶] I گوئیم هرگاه عدد طبیعی n چنان موجود باشد که $JI^n = I^{n+1}$. مینیمم این n ها را عدد تحویل [۷] I نسبت به J گوئیم و آن را با نماد $r_J(I)$ نشان می‌دهیم.

لم ۳۲.۱.۱ : فرض کنید S یک حلقه جابجائی و یکدار و R زیر حلقهٔ نوتری از آن باشد. همچنین فرض کنید E یک S ـ مدول باوفا و بعنوان R ـ مدول، متناهی مولد باشد. در این صورت S بعنوان

[۵] Artin _ Rees's lemma

[۶] Reduction

[۷] Reduction number

R ـ مدول، متناهی مولد و بنابراین نوتری خواهد بود.

برهان : با توجه به اینکه R زیر حلقه ای از S است، بوضوح $\mathrm{Hom}_S(E,E) \subseteq \mathrm{Hom}_R(E,E)$. حال فرض کنید به ازای هر s از S، $\Gamma_s : E \to E$ نگاشت ضرب توسط s باشد. R ـ همومورفیسم $\phi : S \to \mathrm{Hom}_S(E,E)$ را بصورت $\phi(s) = \Gamma_s$ در نظر می گیریم. بسادگی دیده می شود که $\ker\phi = ۰$. چون $\mathrm{Hom}_R(E,E)$ متناهی مولد است پس S هم بعنوان R ـ مدول، متناهی مولد خواهد بود. $\square$

تعریف ۳۳.۱.۱ : حلقه R را موضعی [۸] گویند هرگاه نوتری بوده و تنها یک ایده‌آل ماکسیمال داشته باشد که معمولاً آن را با $(R,\mathfrak{m})$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۳۴.۱.۱ : فرض کنید $(R,\mathfrak{m})$ یک حلقه موضعی باشد. در این صورت هر R ـ مدول پروژکتیو، آزاد است.

برهان : رجوع شود به قضیه ۵.۲ مرجع [۱۲].

قضیه ۳۵.۱.۱ : فرض کنید $(R,\mathfrak{m})$ یک حلقه موضعی و I یک ایده‌آل واقعی از آن باشد. در این صورت: $\bigcap_{n\geq ۰} I^n = ۰$.

برهان : نتیجه بدیهی قضیه اشتراک کرول (۲۵.۸ مرجع [۲۸]) می‌باشد.

تعریف ۳۶.۱.۱ : فرض کنید R یک حلقه، M یک R ـ مدول و I ایده‌آلی از R باشد. $x \in I$ را عضو M ـ صوری [۹] در I گوئیم، هرگاه عدد صحیحی مثل $c \geq ۰$ موجود باشد بطوریکه

$$(I^{n+1}M :_M x) \cap I^c M = I^n M \quad \forall n \geq c.$$

تبصره ۳۷.۱.۱ : درصورتیکه $(R,\mathfrak{m})$ یک حلقه موضعی بوده و میدان ماندهٔ R ($\frac{R}{\mathfrak{m}}$) نامتناهی باشد آنگاه این عضو موجود است.

برهان : رجوع شود به ۱.۲۲ مرجع [۱۵].

---

[۸] Local

[۹] M ـ superficial

گزاره ۳۸.۱.۱ : فرض کنید R یک حلقه و M یک R ـ مدول باشد. در این صورت گزاره های زیر معادلند:

i) $M = \circ$

ii) بازای هر $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$، $M_{\mathfrak{p}} = \circ$

iii) بازای هر $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(R)$، $M_{\mathfrak{m}} = \circ$.

برهان : رجوع شود به گزاره ۸.۳ مرجع [۳].

لم ۳۹.۱.۱ : فرض کنید R و S دو حلقه بوده و S، R ـ مدول هم باشد. در این صورت اگر P یک R ـ مدول پروژکتیو باشد آنگاه $S \otimes_R P$ یک S ـ مدول پروژکتیو خواهد بود.

برهان : فرض کنید $\circ \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow \circ$ یک دنباله دقیق از S ـ مدول ها و S ـ هomomorphism ها باشد. ثابت می کنیم که دنباله

$$\circ \longrightarrow \mathrm{Hom}_S(S \otimes_R P, A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_S(S \otimes_R P, B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_S(S \otimes_R P, C) \longrightarrow \circ$$

دقیق است. از اینکه $\mathrm{Hom}_S(S \otimes_R P, N) \simeq \mathrm{Hom}_R(P, Hom_S(S, N)) \simeq \mathrm{Hom}_R(P, N)$ و با عنایت به اینکه P بعنوان R ـ مدول پروژکتیو است، حکم بسادگی نتیجه می‌شود. □

نتیجه ۴۰.۱.۱ : فرض کنید $\mathfrak{p}$ ایده‌آل اولی از حلقه R باشد. در این صورت اگر M یک R ـ مدول پروژکتیو باشد، آنگاه $M_{\mathfrak{p}}$ بعنوان $R_{\mathfrak{p}}$ ـ مدول پروژکتیو است. نتیجتاً $M_{\mathfrak{p}}$ بعنوان $R_{\mathfrak{p}}$ ـ مدول آزاد خواهد بود.

برهان : با توجه به ۳۴.۱.۱ و اینکه $M_{\mathfrak{p}} \simeq M \otimes_R R_{\mathfrak{p}}$ حکم بدست می‌آید. □

تبصره ۴۱.۱.۱ : فرض کنید R و T دو حلقه و $f : R \to T$ یک هomomorphism حلقه ها باشد. همچنین فرض کنید I و J به ترتیب ایده‌آل هایی از R و T باشند. ایده‌آل تولید شده توسط $f(I)$ از T را با نماد I^e [۱۰] و ایده‌آل $f^{-1}(J)$ از R را با نماد J^c [۱۱] نمایش می‌دهیم.

مثال ۴۲.۱.۱ : فرض کنید $(R, \mathfrak{m})$ یک حلقه موضعی باشد. در این صورت هomomorphism طبیعی $R \to T = R[x]_{\mathfrak{m}R[x]}$ بطور باوفا یکدست است و میدان مانده T نامتناهی است.

[۱۰] e حرف اول extension به معنای توسیع است.

[۱۱] c حرف اول contraction به معنای تحدید است.

حل: چون $R[x]$ بعنوان R ـ مدول یکدست است با توجه به قضیه ۱.۷ مرجع [۱۲]، $R[x]_{\mathfrak{m}R[x]}$ نیز یکدست خواهد بود. حال فرض کنید که M، N و K سه R ـ مدول دلخواه باشند بطوریکه دنباله $\circ \longrightarrow R[x]\otimes M \xrightarrow{f^*} R[x]\otimes N \xrightarrow{g^*} R[x]\otimes K \longrightarrow \circ$ دقیق است. کافی است ثابت کنیم که دنباله $\circ \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} K \longrightarrow \circ$ دقیق است. فرض کنید $n \in \mathrm{Im} f$. پس عضوی مانند m در M وجود دارد بطوریکه $f(m) = n$. از طرفی $n \in N[x]$ و $m \in M[x]$. بنابراین $f^*(m) = n$. لذا $n \in \ker g^*$. پس $g^*(n) = \circ$. امّا $g^*(n) = g(n)$. بنابراین $n \in \ker g$. حال فرض کنید $n \in \ker g$. پس $g^*(n) = g(n) = \circ$. لذا چند جمله‌ای مانند $h(x)$ در $M[x]$ وجود دارد که $f^*(h(x)) = n$. فرض کنیم $h(x) = m_\circ + m_1 x + \ldots + m_r x^r$. بنابراین $f^*(h(x)) = f(m_\circ) + f(m_1)x + \ldots + f(m_r)x^r = n$. حال با مقایسه درجه‌ها داریم $f(m_\circ) = n$. لذا $n \in \mathrm{Im} f$. براحتی دیده می شود که f یک به یک است. برای اثبات پوشا بودن g فرض کنیم $k \in K$. بنابراین $k \in K[x]$. لذا چند جمله‌ای مانند $\phi(x)$ در $N[x]$ وجود دارد که $g^*(\phi(x)) = k$. فرض کنیم $\phi(x) = n_\circ + n_1 x + \ldots + n_l x^l$. بنابراین $g^*(\phi(x)) = g(n_\circ) + g(n_1)x + \ldots + g(n_l)x^l = k$. و باز با مقایسه درجه‌ها خواهیم داشت $g(n_\circ) = k$. بنابراین g پوشاست. توجه کنید که اگر ψ دنبالهٔ دقیقی از R ـ مدول‌ها و R ـ هومومورفیسم‌ها باشد، آنگاه $\psi \otimes_R R[x] \otimes_{R[x]} R[x]_{\mathfrak{m}R[x]} = \psi \otimes_R R[x]$.

با توجه به محاسبه زیر میدان مانده T برابر $K(x)$، میدان خارج قسمتی حلقه چند جمله‌ای های $K[x]$ است و لذا نامتناهی است. ($K = \frac{R}{\mathfrak{m}}$)

$$\frac{T}{\mathfrak{m}^e} = \frac{R[x]_{\mathfrak{m}R[x]}}{(\mathfrak{m}R[x])R[x]_{\mathfrak{m}R[x]}} \simeq (\frac{R[x]}{\mathfrak{m}R[x]})_{\mathfrak{m}R[x]} \simeq (\frac{R}{\mathfrak{m}}[x])_{\mathfrak{m}R[x]} = K[x]_{\mathfrak{m}R[x]} = K(x).$$

۲.۱ طول یک مدول و ایده‌آل اول وابسته به یک مدول

تعریف ۱.۲.۱ : فرض کنیم R یک حلقه و M یک R ـ مدول باشد. همچنین فرض کنید خانواده‌ای از زیر مدول های M مانند $\{M_i\}_{\circ}^{n}$ موجود باشند بطوریکه

$$(\circ) = M_{\circ} \subset M_{۱} \subset \ldots \subset M_n = M$$

و نیز بازای هر i ($۱ \leq i \leq n$) $M_i/M_{i-۱}$ ـ مدول های R ساده باشند. در این صورت زنجیر فوق را یک سری ترکیبی [۱۲] برای M می‌نامیم.

تعریف ۲.۲.۱ : فرض کنیم R یک حلقه و M یک R ـ مدول باشد. همچنین فرض کنید که M دارای یک سری ترکیبی مانند

$$(\circ) = M_{\circ} \subset M_{۱} \subset \ldots \subset M_n = M$$

باشد. ثابت می‌شود که طول تمام سری های ترکیبی برای R ـ مدول M با هم برابراند، (قضیه ۳۴.۷ مرجع [۲۸]). دراین صورت n را طول[۱۳] سری ترکیبی می‌نامند. طول یک سری ترکیبی را طول M می‌نامیم و آن را با نماد $l_R(M)$ نشان می‌دهیم. هرگاه M دارای سری ترکیبی نباشد آنگاه $l_R(M)$ را ∞ تعریف می‌کنیم.

قضیه ۳.۲.۱ : فرض کنید R یک حلقه و M یک R ـ مدول باشد. در این صورت $l(M) < \infty$ اگر و تنها اگر R نوتری و آرتینی باشد.

برهان : مراجعه شود به قضیه ۵.۱۲ مرجع [۲۹].

لم ۴.۲.۱ : فرض کنید $\circ \rightarrow M_{۱} \rightarrow M_{۲} \rightarrow \ldots \rightarrow M_k \rightarrow \circ$ دنباله ای دقیق از R ـ مدول ها و R ـ هومورفیسم ها چنان باشد که بازای هر $۱ \leq i \leq k$ ، $l(M_i) < \infty$. در این صورت

$$\sum_{i=۱}^{k} (-۱)^i l(M_i) = \circ .$$

برهان : مراجعه شود به صفحه ۱۲ مرجع [۱۲].

---

[۱۲] Composition series

[۱۳] Length

تعریف ۵.۲.۱ : فرض کنید R یک حلقه و I یک ایده‌آل واقعی از R باشد. I را تجزیه پذیر گوئیم هر گاه ایده‌آل های $\mathfrak{p}_i$ ـ اولیه مانند $\mathfrak{q}_i$ $(1 \leq i \leq n)$ چنان موجود باشند که

$$I = \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{q}_i.$$

هر گاه $\mathfrak{p}_i$ ها متمایز از هم بوده و برای هر $1 \leq i \leq n$، $\bigcap_{j\neq i} \mathfrak{q}_j \nsubseteq \mathfrak{q}_i$، این تجزیه را یک تجزیه مینیمال برای I می‌نامند.

تعریف ۶.۲.۱ : فرض کنید R یک حلقه و I یک ایده‌آل واقعی از R باشد. همچنین فرض کنید $I = \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{q}_i$ یک تجزیه مینیمال برای I باشد. در این صورت اعضای مجموعه $\{\sqrt{\mathfrak{q}_1}, \ldots, \sqrt{\mathfrak{q}_n}\}$ را ایده‌آل های وابسته I می‌نامند و آن را با علامت $\mathrm{ass}(I)$ نمایش می‌دهند.

قضیه ۷.۲.۱ : (نتیجه اولین قضیه یکتایی) فرض کنید R یک حلقه و I ایده‌آل تجزیه پذیری از R باشد. در این صورت $\mathrm{ass}(I)$ مستقل از تجزیه I است.

برهان : رجوع شود به ۱۸.۴ مرجع [۲۸].

تبصره ۸.۲.۱ : از گزاره ۲۴.۴ مرجع [۲۸] داریم $\mathrm{minass}(I) = \min(I)$.

گزاره ۹.۲.۱ : فرض کنید R یک حلقه، I یک ایده‌آل واقعی از آن و S یک مجموعه بسته ضربی از R باشد. همچنین فرض کنید $I = \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{q}_i$ یک تجزیه مینیمال برای I باشد. در این صورت $I^e = \bigcap_{\mathfrak{p}_i \cap S = \phi} \mathfrak{q}_i^e$ و $I^{ec} = \bigcap_{\mathfrak{p}_i \cap S = \phi} \mathfrak{q}_i$.

برهان : رجوع شود به ۴۰.۵ مرجع [۲۸].

تعریف ۱۰.۲.۱ : فرض کنیم R یک حلقه، M یک R ـ مدول و N زیر مدولی از M باشد. گوئیم N دارای تجزیه اولیه است هر گاه زیر مدول های $\mathfrak{p}_i$ ـ اولیه‌ای مانند $\{N_i\}_{i=1}^{n}$ موجود باشند بطوریکه $N = \cap_{i=1}^{n} N_i$. هر گاه $\mathfrak{p}_i$ ها متمایز از هم بوده و برای هر $1 \leq i \leq n$، $\bigcap_{j\neq i} N_j \nsubseteq N_i$ این تجزیه را یک تجزیه مینیمال برای N می‌نامند.

قضیه ۱۱.۲.۱ : فرض کنید R یک حلقه، M یک R ـ مدول نوتری و N زیر مدولی از M باشد. در این صورت N دارای تجزیه اولیه مینیمال است.