بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه شهید باهنر کرمان

دانشکده ریاضی و کامپیوتر

بخش آمار

پایان نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی ارشد آمار ریاضی

p– مقدار فازی در آزمون فرضیه های آماری

استاد راهنما :

دکتر ماشا الله ماشین چی

۱۳۸۷ /۹/ ۲۳

مؤلف :

مسعود فضلعلی پورمیاندوآب

بهمن ۸٦

دانشگاه شهید باهنر کرمان

این پایان نامه

به عنوان یکی از شرایط احراز کارشناسی ارشد

به

بخش ریاضی – دانشکده ریاضی و کامپیوتر

دانشگاه شهید باهنر کرمان

تسلیم شده است و هیچگونه مدرکی به عنوان فراغت از تحصیل دوره مزبور شناخته نمی شود .

دانشجو : مسعود فضلعلی پورمیاندوآب

استاد راهنما : دکتر ماشا اله ماشین چی

داور ۱ : دکترمحمدعلی یعقوبی

داور ۲ : دکتراحدجمالیزاده

۱۳۸۷ /۹/ ۲۳

نماینده تحصیلات تکمیلی دانشگاه : دکترسید ناصر حسینی

تقدیم به:

پدر و مادرم

که هر آنچه دارم بعد از خدا، لطف آنان است.

تشکر و قدر دانی

سپاس خدای را که بر من منت نهاد تا این مر حله از زندگی پیش بیایم که بی شک بدون لطف و عنایت او ممکن نبود. از خانواده ام، بخصوص پدر و مادر که در این مدت عاشقانه و خاضعانه محیطی گرم و صمیمی در خانه به وجود آوردند، کمال تشکرو قدردانی را دارم. از استاد بزرگوار، جناب دکتر ماشین چی که زحمت راهنمایی این پایان نامه را قبول کر دند تشکر می نمایم.
ازقطب فا زی به خاطر کمک های مالی تشکرمی نمایم.

چکیده

یکی از اهداف های مهم استنباط آماری آزمودن فرض و تصمیم گیری بر اساس نتیجه بدست آمده است و از جمله راههای مهم بررسی درست بودن یا نبودن فرض ها، روش p- مقدار است که میزان حمایت داده ها از فرض صفر را اندازه می گیرد. در روش کلاسیک و سنتی داده ها و فرض ها دقیق می باشد. اما اگر مفروضات مبهم و غیر دقیق باشند، فرض یا داده و یا هر دو و در نتیجه p - مقدار شکل جدیدی به خود می گیرند که اصطلاحا فازی گفته می شود.

تا کنون کارهای زیادی در مورد آزمون فر ض های فازی با روش های مختلف انجام شده است ولی با روش p – مقدار کارهای انجام گرفته بسیار محدود و انگشت شمار است.

بنابراین در فصل نخست این پایان نامه به مفهوم نظریه مجموعه های فازی اشاره شده است. در فصل دوم با دیدی کلی، تمام حالاتی که p – مقدار ممکن است با توجه به داده و فرض ها (ساده یا فازی) به خود بگیرد، بررسی کرده ایم. در فصل سوم آماره های رتبه ای نا پارامتری دقیق و فازی را آورده و p – مقدار را در این گونه آماره ها بیان کرده ایم.

یاد آوری می کنیم مطالبی که از نویسنده است با علامت((* *)) نشان داده شده است.

فهرست مطالب

فصل سوم آماره های رتبه ای فازی در آزمون های نا پارامتری و p- مقدار در این آزمون ها

فصل اول

آشنایی با تعاریف اولیه منطق

فازی

۱-۱مقدمه

نظریه مجموعه های فازی در سال ۱۹۶۵ توسط لطفی عسکر زاده دانشمند ایرانی تبار و استاد دانشگاه برکلی آمریکا عرضه شد. این نظریه از زمان ارائه آن تاکنون گسترش و تعمیق زیادی یافته و کاربرد های گوناگون در زمینه های مختلف پیدا کرده است.

نظریه مجموعه های فازی نظریه‌ای برای اقدام در شرایط عدم اطمینان است. این نظریه قادر است بسیاری از مفاهیم و متغیرهاو سیستم هایی که نادقیق و مبهم هستند صورت بندی ریاضی بخشد و زمینه را برای استدلال، استنتاج وتصمیم گیری درشرایط عدم اطمینان فراهم آورد مثلا مفاهیمی مانند سلامتی، افسردگی، پیری و...بصورت مجموعه های معمولی قابل تعریف نیست و به طور دقیق نمی توان مرزبندی برای آنها تعریف کرد. یعنی ممکن است هر فرد تعریفی از این مفاهیم داشته باشد بنابراین در آن نوعی عدم قطعیت وجود دارد. و با استفاده از مجموعه فازی برای هر یک از آنها مدل سازی ریاضی تعریف می شود.

نظریه ی مجموعه های فازی در بسیاری از علوم از جمله آمار واردشده و مفاهیم اساسی این علم را به شکل جدیدی در آورده است. در این فصل به مفاهیم اساسی مجموعه فازی اشاره کرده و در فصل های بعدی شکل فازی شده برخی مسائل آمار را بررسی می کنیم.

۱-۲ تعاریف و مفاهیم

تعریف۱-۲-۱ [۹]: اگر A یک زیر مجموعه دلخواه از مجموعه مرجع X باشد ویژ گی p روی مجموعه X را خوش تعریف گوییم اگر بتوان تمام عناصر A را با p مشخص نمود و به صورت $A=\{x\in X \ |p(x)\}$ نشان می دهیم.

مثال ۱-۲-۱ [۵]: اگر X مجموعه انسانها و p ویژگی «بلند قد تر از ۱۵۰سانتیمتر»باشد آنگاه $A=\{x\in X \mid p(x)\}$، عبارتست از مجموعه انسانهایی که دارای ویژگی p هستند یعنی قد آنها از ۱۵۰ سانتیمتر بیشتر است.

تعریف ۲-۲-۱ [۵]: فرض کنید X یک مجموعه مرجع باشد. تابع نشانگر[۱] هر یرمجموعه معمولی A از X، یک تابع از X به {۱و۰} است که به این گونه تعریف می شود:

$$\mu_A(x)=\begin{cases}1 & x\in A\\ 0 & x\notin A\end{cases}$$

همانگونه که مشاهده می شود دامنه تابع نشانگر، مجموعه دو عضوی {۱و۰}است.

مثال ۲-۲-۱ [۵]: اگر {۱۰و....۲و۱}=X و {۷و۵ و۲}=A آنگاه تابع نشانگربه صورت زیراست:

$$\mu_A(x)=\begin{cases}1 & x=2,5,7\\ 0 & x=1,3,4,6,8,9,10\end{cases}$$

و مثلا $\mu_A(5)=1, \mu_A(6)=0$. یعنی ۵ عضو A است ولی ۶ عضو نیست.

حال اگر برد تابع نشانگر را از {۱و۰} به [۱و۰] گسترش دهیم تابعی بدست می آید که تابع فازی می گوییم پس:

تعریف ۳-۲-۱ [۹]: فرض کنید X مجموعه ای ناتهی باشد هر زیر مجموعه فازی از X مانند A، با یک تابع $\mu_{\tilde{A}}: X\to[0,1]$ مشخص می شود. به $\mu_{\tilde{A}}(x)$ تابع عضویت[۲] می گوییم که در آن برای هر x در X مقدار $\mu_{\tilde{A}}(x)$، میزان عضویت x در آن زیر مجموعه فازی را نشان می‌دهد.

تعریف ٤-۲-۱: توابع مشخصه، توابعی حقیقی مقدار به صورت $A:R\to[0,1]$ هستند که در

[۱]Indicator function

[۲]Membership function

شرایط زیر صدق می‌کنند:

الف) به ازای هر $x \in R$، $0 \le A(x) \le 1$.

ب) وجود دارد $x_0 \in R$ بطوریکه $A(x_0)=1$.

ج) برای هر $\delta \in (0,1]$، $\delta -$ برش، $A_\delta = \{x \in R : A(x) \ge \delta\} = [a_\delta, b_\delta]$ یک بازه بسته کراندار باشد.

مثال۳-۲-۱ [۵]: فرض کنید یک زیر مجموعه فازی نشان دهنده ویژگی اعداد بین صفر تا ۱۰«نه خیلی کوچک و نه خیلی بزرگ» باشد می‌توان تابع عضویت زیر را برای آن تعریف کرد:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0.1 & x=2 \\ 0.3 & x=3 \\ 0.5 & x=4 \\ 0.8 & x=5,6 \\ 0.5 & x=7 \\ 0.3 & x=8 \\ 0.1 & x=9 \end{cases}$$

مثال٤-۲-۱: زیر مجموعه فازی نزدیک ۲ از مجموعه R، را می توان با تابع عضویت زیر نشان داد:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} x-1 & 1 \le x \le 2 \\ -x+3 & 2 \le x \le 3 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

حال فرض کنید X یک مجموعه مرجع و A یک زیر مجموعه فازی از آن باشد مجموعه نقاطی از X که برای آن، مقدار $\mu_{\tilde{A}}(x) > 0$ باشد، تکیه گاه[1] A نامیده می شود و با $Supp(A)$ نشان داده می‌شود و مقدار $M = sup\, \mu_{\tilde{A}}(x)$ ارتفاع[2] مجموعه A نامیده می‌شود. اگر ارتفاع مجموعه فازی A برابر یک باشد آنگاه A نرمال نامیده می‌شود [۵].

[1] Support

[2] Height

پس برای مثال۳-۱ تکیه گاه و ارتفاع به ترتیب $suppA=\{1,2,...,9\}$ و $M=0/8$ و برای مثال ۴-۱ تکیه گاه $suppA=(1,3)$ خواهد بود.

تعریف ۵-۲-۱ [۹]: برای بررسی خواص یک مجموعه فازی از روشی استفاده می کنیم که اصطلاحا مجموعه تراز(δ - برش) نامیده می‌شود و مجموعه تراز وابسته به زیر مجموعه فازی A به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$A(\delta)=\{x\in X \ |A(x)\geq\delta\} \qquad \delta\in(0,1]$$

و مفهوم آن این است که عناصری از x که درجه عضویت آنها در مجموعه فازی A حداقل به بزرگی δ باشد. چون در این پایان نامه روی مجموعه اعداد حقیقی کار می کنیم δ-برش ها، بازه‌های از مجموعه اعداد حقیقی هستند که ابتدا و انتها این بازه ها را به صورت زیر نماد گذاری می کنیم:

$$A_1(\delta)=\inf\{x\in X \ |\mu_A(x)\geq\delta\}=\inf\widetilde{A}(\delta)$$

$$A_2(\delta)=\sup\{x\in X \ |\mu_A(x)\geq\delta\}=\sup\widetilde{A}(\delta)$$

تعریف۶-۲- ۱[۵]: (عدد فازی) یک عدد فازی $\widetilde{A}$، زیر مجموعه ای فازی از مجموعه اعداد حقیقی R است که در شرایط زیر صدق می کند:

الف) $\mu_{\widetilde{A}}$ نرمال است، یعنی وجود دارد $x\in R$ بطوریکه $\mu_{\widetilde{A}}(x)=1$.

ب)تکیه گاه $\widetilde{A}$ کراندار است.

ج)برای هر $\alpha\in(0,1]$، مجموعه $\widetilde{A}_\alpha$ یک بازه بسته باشد.

مجموعه همه اعداد فازی را با $F(R)$ نمایش می‌دهند. درحالت کلی می توان عدد فازی به صورت زیر تعریف کرد:

قضیه ۱-۲-۱[۱۰]: $\widetilde{A}$ از R به [۰،۱) یک عدد فازی است اگر و فقط اگر:

$$\widetilde{A}(x)=\begin{cases}L(x) & x\in(-\infty,a)\\ 1 & x\in(a,b)\\ R(x) & x\in(b,\infty)\end{cases}$$

که در آن L یک تابع صعودی و از راست پیوسته و R یک تابع نزولی و از چپ پیوسته است

و $w_1, w_2 \in R$ وجود دارند که $L(x)=0$ برای هر $x\in(-\infty, w_1)$ و $R(x)=0$ برای هر $x\in(w_2,\infty)$.

اثبات:مر جع [۱۰] صفحه۳۴.

در مجموعه فازی فرم های مختلفی از اعداد وجود دارد از جمله مثلثی و ذوزنقه ای. که برای مثلثی می‌توان تعریف زیر را آورد:

تعریف۷-۲- ۱: عدد مثلثی را با یک سه تای به شکل $T(a,b,c)$ نشان می‌دهیم که درآن b نقطه وسط، a نقطه سمت چپ و c نقطه سمت راست را نشان می‌دهد و تابع عضویت آن به فرم زیر است:

$$\mu_A(x)=\begin{cases}0 & x<a\\ \dfrac{x-a}{b-a} & a< x<b\\ 1 & x=b\\ \dfrac{c-x}{c-b} & b<x\le c\\ 0 & x>c\end{cases}$$

در فصل‌های بعدی بر حسب نیاز، در قسمت پیش نیازها تعاریفی از مجموعه فازی آورده خواهد شد.

فصل دوم

بررسی P – مقدار در حالت پارامتری

۱-۲ مقدمه

یکی از دلایل اینکه p- مقدار در آمار کاربردی به طور فزآینده ای مورد استفاده قرار می گیرد این است که در آزمون های کلاسیک نیاز به تعیین مقدار آزمون در یک سطح α خاص (معمولا۰/۰۵) داریم. بنابراین به جای وارد کردن یک چنین عنصر اختیاری اغلب رایج است فقط مقداراحتمال ذکرگردد واین امکان در اختیار محقق قرارمی گیرد که خودش درباره H_0 قضاوت کند.

به بیان دیگر به محقق این اختیار داده می شودکه با انتخاب هر سطحی از α که برای هدف خود مناسب می بیند یک تصمیم شخصی بگیرد.

P- مقدار به عنوان معیاری برای میزان پشتیبانی داده ها از فرض H_0 محسوب می شود و به فرض H_1بستگی ندارد. این موضوع گاهی به عنوان نقطه ضعف p- مقدار مطرح می شود. بعد از محاسبه p- مقدار اگر $p-value<\alpha$ باشد فرض H_0 در سطح معنی داری α رد می شود و اگر $p-value>\alpha$ باشد H_0 در سطح معنی داری αرد نمی شود.

توجه۱-۲-۲ [۱] گاهی p- مقدار به خطای نوع اول تعبیر می شود درحالیکه خطای نوع اول احتمال رد H_0 وقتی که H_0درست است، می باشد پس تابعی از مشاهدات نیست در حالیکهp- مقدار تابعی از مشاهدات است. مثلاً اگر نمونه گیری یا آزمایشی تحت شرایطی دوباره تکرار شود احتمال پذیرش H_0 همان خواهد بود که دردفعه اول بوده است یعنی اگر H_0درست باشد و آنرا نپذیریم $1-\alpha$ است و اگر H_1 درست باشد احتمال پذیرش H_0برابر βخواهد بود که هیچ کدام به مشاهدات بستگی ندارد اما p- مقدار تابعی از مشاهدات است. و از طرفی احتمال درستی H_0

به شرط مشاهدات نیاز به داشتن توزیع پیشین H_0 یا H_1 دارد و کاملاً متفاوت از $p-$ مقدار می باشد.

۲-۲ پیش نیازها

تعریف ۱-۲-۲ [۲٦]: فرض کنیم X یک مجموعه جهانی و $F(X)$ یک مجموعه از تمام توابع با مقدار حقیقی از X به $[۰,۱]$ باشد بطوریکه $F(X)=\{A \mid A: x\to[0,1]\}$ و در حالت خاص فرض کنیم R مجموعه اعداد حقیقی باشدتعریف می کنیم:

$$
\begin{aligned}
F_c(R) &= \{A \mid A: R\to[0,1], A \text{ is continuous function}\}\\
F_S(R) &= \{S(a,b) \mid a,b\in R, a\le b\}\\
F_B(R) &= \{B(c,d) \mid c,d\in R, c\le d\}\\
F_T(R) &= \{T(a,b,c) \mid a,b,c\in R, a\le b\le c\}
\end{aligned}
$$

$$
S(a,b)(x)=\begin{cases} 1 & if \quad x\le a\\ \dfrac{x-b}{a-b} & if \quad a<x\le b\\ 0 & if \quad x>b\end{cases}
$$

$$
B(c,d)(x)=\begin{cases} 0 & if \quad x<c\\ \dfrac{x-c}{d-c} & if \quad c\le x<d\\ 1 & if \quad x\ge d\end{cases}
$$

$$
T(a,b,c)(x)=\begin{cases} \dfrac{x-a}{b-a} & if \quad a<x\le b\\ \dfrac{x-c}{b-c} & if \quad b<x\le c\\ 0 & if \quad elsewhere\end{cases}
$$

هر $A\in F_c(R)$ یک مجموعه فازی روی R نامیده می شود. هر $A\in F_T(R)$ هم یک عدد فازی مثلثی نامیده می شود.

تعریف ۲-۲-۲ [۵]: اگر $A \in F_c(R)$ باشد آنگاه A محدب نامیده می شود اگر:

$$A(\lambda x+(1-\lambda)y) \geq \min(A(x), A(y)) \quad \forall x, y \in R, \forall \lambda \in [0,1]$$

۱-۲-۲ آزمون فرض ها کلاسیک

فرض کنیم $X=(X_1,...,X_n)$ یک نمونه تصادفی با مقادیر مشاهده شده $x=(x_1,...,x_n)$ باشد بطوریکه X_i ،$i=1,...,n$ دارای تابع چگالی به صورت $f_\theta(x_i)$ با مقدار نامشخص $\theta \in \Theta \subseteq R$ باشد. می خواهیم در آزمون فرض ها در مورد قبول (یا رد) آزمون های فرض $H_0:\theta \in H_0 \subset \Theta$ در مقابل $H_1:\theta \in {H_0}^c=\Theta-\Theta_0$ بر اساس نمونه تصادفی X تصمیم بگیریم.

تعریف ۳-۲-۲[۳۲]: تمام اندازه های بورل[1] که بصورت، $\varphi: R^n \to [0,1]$ تعریف می شود تابع آزمون نامیده می شوند.

تعریف ٤-۲-۲ [۳۲]: تابع توان[2] $\varphi(x)$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\beta_\varphi(\theta)=E_\theta(\varphi(x))=P_\theta(reject\, H_0) \qquad \forall \theta \in \Theta$$

که در آن E امید ریاضی و P نماداحتمال می باشد

تعریف ۵-۲-۲ [۳۲]: آزمون φ را یک آزمون درسطح $\alpha \in [0,1]$ می گوییم هرگاه $\alpha_\varphi \leq \alpha$، هنگامی که:

$$\alpha_\varphi = \sup_{\theta \in \Theta_0} \beta(\theta)$$

[1] Borel-measurable

[2] Power function

درآزمون های غیرتصادفی فضای یافته ها برای مقادیرآماره آزمون به دو ناحیه رد یا مکمل آن یعنی پذیرش تقسیم می شود. برای فرض های متداول H_0 و H_1 ناحیه رد معمولاً در یکی از اشکال زیر اتفاق می افتد :

$$a)T \le t_l \qquad b)T \ge t_l \qquad c)T \notin (t_1, t_2) \qquad (۱)$$

وقتی که t_l, t_1, t_2مقادیر معینی از توزیع T باشند بطوریکه خطای اول به صورت:

$$\alpha = \sup_{\theta \in \Theta_0} P_\theta(reject\, H_0)$$

نمایش داده می شود. در مورد (c.۱) اگر آزمون دو طرفه باشد معمولاً t_1 و t_2 طوری انتخاب می شود که:

$$P_\theta(T \le t_1) = P_\theta(T \ge t_2) = \frac{\alpha}{2}$$

و فرض H_0 رد می شود اگر مقدار t(x)=t در ناحیه بحرانی (ناحیه رد) قرار بگیرد[۱۶].

توجه۱-۲-۲: در این فصل منظور از(۱.a) (۱.b) (۱.c) همان آزمون فر ض ها یک طرفه و دو طرفه می باشد.

یکی از مهمترین مفاهیم آزمون فرض ها مفهوم رابطه درست نمایی یکنواخت[۱] *(MLR)* می باشد در ادامه به تعریف آن می پردازیم:

تعریف۵-۲-۲ [۳۲]: فرض کنید $\{F_\theta : \theta \in \Theta\}$ یک خانواده از توابع توزیع برای $\theta \in \Theta$ باشد. در اینصورت $\{F_\theta\}$ را یک MLR برای آماره $T(x)$ می گوییم هرگاه برای هر $\theta_1 < \theta_2$، $F_{\theta_1}, F_{\theta_2}$ که متمایز باشد، $\frac{F_{\theta_2}}{F_{\theta_1}}$ یک تابع غیر نزولی از $T(x)$ باشد.

[۱] Maximum likelihood estimator

تعریف٦-٢-٢ [٢٦]: فرض کنید φ_α یک خانواده از توابع آزمون α است. حال اگرتابع آزمون به صورت $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in(0,1)}$،باشد بطوری که برای $\alpha_1 \le \alpha_2$ داشته باشیم $\varphi_{\alpha 1}(x) = \varphi_{\alpha 2}(x) = 1$، آنگاه p - مقدار را به صورت زیر تعریف می شود:

$$p-value(x) = \inf\left\{\alpha \left| \varphi(x) = 1, \sup_{H_0} E(\varphi(x)) = \alpha, \quad \varphi \in \varphi_\alpha \right.\right\}$$

براساس این تعریف p – مقدار برای آزمون های تعریف ۵-۲-۲ به صورت زیر خواهد بود:

$$a) g(\theta_0) = P_{\theta_0}(T \le t)$$
$$b) g(\theta_0) = P_{\theta_0}(T \ge t)$$
$$c) g(\theta_0) = 2Min\{P_{\theta_0}(T \le t), P_{\theta_0}(T \ge t) = \begin{cases} 2P_{\theta_0}(T \ge t) & if \quad t \ge m \\ 2P_{\theta_0}(T \le t) & if \quad t \le m \end{cases}$$

که θ_0 نقطه کرانه ای تحت فرض صفر و m میانه توزیع T خواهد بود.

توجه۲-۲ [۲۶]: طبق تعریف۶-۲-۲ در آزمون فرض ها، p – مقدار تابعی است از:

- نقطه کرانه ای تحت فرض صفر
- توزیعی از آماره آزمون
- مقادیر مشاهده آماره آزمون.

و اگر مقدار p – مقدار کمتر از α (سطح معنی داری) باشد فرض صفر را رد و اگر p – مقدار بیشتر از α باشد H_0 را قبول می کنیم.

لم ١-٢-٢ [٢٦]: فرض کنید $X \sim f_\theta : \theta \in \Theta$ وقتی که $\{f_\theta\}$ دارای MLR در $T(x)$ و θ_0 یک نقطه کرانه ای تحت فرض صفر است. در این صورت برای هر آزمونی که به شکل (۱.a) (۱.b) (۱.c) است می توان مشاهده کرد :

الف) p – مقدار یک تابع اکیداً نزولی از θ_0 است.