دانشکده فیزیک

گروه فیزیک نظری و اختر فیزیک

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته فیزیک نظری

عنوان

تک قطبی مغناطیسی روی S^2 از دیدگاه هندسه دیفرانسیل

استاد راهنما

دکتر حسین فخری

استاد مشاور

دکتر سید کمال‌الدین سید یعقوبی

پژوهشگر

مهدی لطفی‌زاده

بهمن ماه ۱۳۸۶

نام خانوادگی دانشجو: لطفی‌زاده **نام:** مهدی

عنوان پایان‌نامه: تک قطبی مغناطیسی روی S^2 از دیدگاه هندسه دیفرانسیل

استاد راهنما: دکتر حسین فخری

استاد مشاور: دکتر سید کمال‌الدین سید یعقوبی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد **رشته:** فیزیک **گرایش:** نظری **دانشگاه:** تبریز

دانشکده: فیزیک **تاریخ فارغ‌التحصیلی:**۸۶/۱۱/۱۴ **تعداد صفحات:**۹۷

کلید واژه‌ها: تک قطبی مغناطیسی- هندسه کلاسیک- هندسه ناجابجایی- بارهای توپولوژیکی

چکیده:

با استفاده از تکنیک‌های کلاف‌های تاری، مسئله تک قطبی مغناطیسی مورد مطالعه قرار می‌گیرد. تک قطبی مغناطیسی به عنوان یک کلاف اصلی با تار $U(1)$ روی فضای پایه S^2 در نظر گرفته می‌شود و فضای کل، S^3 است. به جای کار با خود فضاهای توپولوژیک S^2، S^3 و $U(1)$، طبق قضیه گلفاند- نایمارک با جبر توابع هموار بر روی آنها کار می‌کنیم. سپس با به کارگیری تصویرگرها و کلاسهای چرن مرتبه اول، بارهای توپولوژیکی تک قطبی مغناطیسی را محاسبه می‌کنیم. از آنجا که رسته‌های گوناگون جبرهای ناجابجائی را می‌توان بعنوان شواهدی برای وجود رسته‌هائی از فضاهای ناجابجایی یا کوانتومی تعبیر نمود که البته هنوز وجود بالفعل آنها تأیید نشده است، توسط جبرهای ناجابجایی بر روی S^2 و S^3 کره‌های کوانتومی S^2 و S^3 را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. همچنین در گذر به هندسه ناجابجایی یک توسیع هوپف- گالوای مناسب جای کلاف اصلی فوق را گرفته و با در نظر گرفتن تزویج بین نظریه K و کوهمولوژی دوری، بارهای توپولوژیک ناجابجایی توسط مشخصه چرن- کُن محاسبه شده است.

فهرست مطالب

فصل سوم: نتایج و بحث

تقدیر و تشکر

به نام خدایی که همه چیز از اوست، حتی سپاس. او که در تمام مراحل زندگی از لطف و رحمتش برخوردار بودیم. پس پیشانی بر آستان عبودیتش می نهیم و با ذره ذره وجودمان خداوند را سپاس می‌گوییم. بی شک این مجموعه بدون کمک اساتید بزرگوار و دوستان عزیز ممکن نبود، لذا بر خود لازم می دانم به مصداق حدیث شریف (*من لم یشکر المخلوق لم یشکر الخالق*) از تلاش‌های استاد راهنمای بزرگوار و گرانقدر جناب آقای دکتر حسین فخری که راهنما و مشوق بنده در انجام، تهیه و تکمیل این پایان‌نامه بودند نهایت سپاسگزاری و قدردانی را داشته باشم.

همچنین از کمک‌های بی‌دریغ مسئولین کتابخانه‌های دانشکده‌های فیزیک و ریاضی نهایت سپاس و تشکر را دارم.

تقدیم به

پدر، مادر، خواهر و برادر عزیزم

که موفقیت‌هایم را مدیون زحمات، دلسوزی‌ها و دعای خیر ایشان می‌باشم.

سپاس خدای را
نازل کننده حکمتها
بر دلهای کلمه‌ها
به یگانگی راه راست
از مقام قدیم‌تر
اگر چه دینها و مذهب‌ها
به اختلاف امتها
مختلف گشتند.

و درود و سلام خدا
بر محمد و خاندان او
که مدد رساننده همت‌هاست
از خزاین جود و کرم
به سخن راست‌تر.

(ابن عربی- خطبه کتاب فصوص الحکم)

فصل اول

مقدمه و بررسی منابع

تک قطبی مغناطیسی برای اولین بار در مقاله تاریخی دیراک[1] معرفی شد [1]. تک قطبی مغناطیسی یکی ازقابل توجه ترین پیش‌بینی‌های مکانیک کوانتومی است که هنوز از نظر آزمایشی تأیید نشده است. نتیجه ای که از یک بحث فیزیکی در مورد تک قطبی مغناطیسی به دست می آید این است که بار مغناطیسی باید برحسب واحد $\frac{\hbar c}{۲|e|}$ کوانتیده باشد. بحث دیراک که در مرجع بالا آمده است این است که، صرف وجود یک تک قطبی مغناطیسی در عالم، می‌توانست توضیحی برای طبیعت انفصالی بار الکتریکی در عالم به دست دهد. چون کوانتش بار الکتریکی یکی از ژرف ترین رازهای جهان فیزیک است، لذا ایده دیراک دارای جاذبه‌ی زیادی است.

در این پایان نامه ما رهیافت دیراک به تک قطبی را دنبال نخواهیم کرد. یک بحث عالی از تاریخچه ایده های نظری و تحقیقات آزمایشگاهی به نقل از جکسون[2] در منبع [2] آمده است که علاقه‌مندان را به آن ارجاع می دهیم. در عوض ما رهیافتی را که بیشتر از ریاضیات مدرن بهره می گیرد را بر گزیده‌ایم. در ابتدا مسأله را از دیدگاه هندسه جابجایی مورد مطالعه قرار می دهیم. در بررسی تک قطبی از دیدگاه هندسه جابجایی ابتدا یک توصیف متحد از تمام کلاف های برداری[3] نا هم ارز روی کره‌ی دو بعدی $S^۲$ به وسیله ساختن تصویرگرهای[4] سراسری p، از طریق نگاشت‌های هم متعدد[5] ارایه می‌کنیم [3]. در این رهیافت، هر تصویرگر، مدولی تصویری[6] با تولید متناهی[7] از مقاطع[8] کلاف برداری از مرتبه ۱ مختلط متناظر روی $S^۲$را معین می کند.

1- Dirac
2- Jackson
3- Vector Bundle
4- Projector
5- Equivariant
6- Projective module
7- Finitely generated
8- Section

ارتباط بین مدول های تصویری با تولید متناهی و مدول مقاطع یک کلاف برداری برای نخستین بار در [4] مورد بررسی قرار گرفته است.

التصاق کانونیکی[۱] $\nabla = pd$ را برای محاسبه بارهای توپولوژیکی[۲] مورد استفاده قرار می دهیم. تصویرگرهای ترانهاد[۳] یافته، مقادیر معکوس را برای بارها به دست می دهند. بنابراین معلوم می شود ترانهاد تصویرگرها اگرچه یک یکریختی[۴] در نظریه K^5 است، نگاشت همانی نیست. همچنین یک ایزومتری پاره ای[۶] چنان بنا می‌کنیم، که هم ارزی بین تصویرگرمماس (که در نظریه K بدیهی است) و شکل حقیقی تصویرگر با بار ۲ را به دست بدهد.

در فصل دوم به تک قطبی مغناطیسی از دیدگاه هندسه ناجابجایی[۷] نگاه می کنیم. هندسه ناجابجایی نخستین بار توسط ریاضی‌دان فرانسوی، آلن کُن[۸]، معرفی شد. ما از منابع [5]، [6]، [7] و [8] برای هندسه ناجابجایی استفاده کرده‌ایم. در بررسی تک قطبی از دیدگاه هندسه ناجابجایی در اولین مرحله نیازمند یک معادل ناجابجایی برای مفهوم کلاف اصلی هستیم. این کار نخستین بار در [9] انجام شده است. سپس باید تمامی اجزای کلاف اصلی[۹] $S^۳ \xrightarrow{U(۱)} S^۲$ را ناجابجایی کنیم. کره های ناجابجایی در منبع [10] بررسی شده اند. در این پایان نامه رهیافت [10] برای کره $S^۳$ ناجابجایی انتخاب شده است.

1- Canonical connection
2- Topological charge
3- Transpose
4- Isomorphism
5- K-theory
6- Partial isometry
7- Noncommutative geometry
8- Alain Connes
9 - Principal bundle

رهیافت هندسی به نظریه های پیمانه ای[۱] با گروههای کوانتومی[۲] بر مبنای کلافهای اصلی کوانتومی[۳] با توسیعهای هوپف- گالوا[۴] صورت می پذیرد که در [9] بحث شده است. توسیع هوپف- گالوا نوع خاصی از التصاق به نام التصاق قوی[۵] را می پذیرد که در [11] بررسی شده است.

در[11] ، [12] و [13] نشان داده شده است که مدول مقاطع کلافهای برداری کوانتومی متناظر با چنین توسیع‌هایی، مدولهای تصویری هستند یعنی کلافهای برداری هندسه ناجابجایی. بنابراین توسیعهای از نوع هوپف – گالوا با التصاق قوی بهترین نامزد برای کلافهای اصلی ناجابجایی هستند.

در [14] نشان داده شده است که یک تغییر شکل[۶] از کره سه بعدی را می‌توان به عنوان یک توسیع هوپف - گالوا روی جبر جابجایی توابع برروی کره سه بعدی در نظر گرفت. در [26] نشان داده شده است که کره های کوانتومی بحث شده در [10] تشکیل یک کلاف اصلی کوانتومی با التصاق قوی را می‌دهند. همچنین تصویرگرها برای کلاف خطی کوانتومی وابسته[۷] با بار تک قطبی دلخواه محاسبه شده است. در [12] و [15] با بکارگیری تزویج چرن- کن بین نظریه K و کوهمولوژی دوری، بارهای توپولوژیکی تاربندی هوپف کوانتومی محاسبه شده است. نظریه K برای جبرهای C^* در [16] و برای کلافهای برداری در [17] مورد مطالعه قرار گرفته است. منبع اصلی برای همولوژی دوری و کوهمولوژی دوری [18] است.

1- Gauge theory
2- Quantum Group
3- Quantum principal bundle
4- Hopf-Galois extension
5- Strong connection
6- Deformation
7- Associated quantum line bundle

فصل دوم

مبانی و روش‌ها

۱-۲ تک قطبی از دیدگاه هندسه‌ی کلاسیک و توپولوژی

۱-۱-۲ ساختار عمومی

با توصیف مختصری از طرح کلی که جزئیات آن در بخش‌های دیگر این فصل خواهد آمد، کارمان را شروع می‌کنیم. فرض کنید $\pi: S^3 \xrightarrow{U(1)} S^2$ تاربندی اصلی هوپف[1] روی کره‌ی S^2 با گروه ساختاری[2] $U(1)$ باشد. از نظر تاریخی مطالعه نگاشت $\pi: S^3 \longrightarrow S^2$ به مطالعه ناورداهای نگاشت‌های $S^{2n-1} \longrightarrow S^n$ برمی‌گردد [19]. نخستین مثال غیر بدیهی آن $S^3 \longrightarrow S^2$ است. واضح است که کلاف اصلی فوق یک کلاف بدیهی نیست، به این معنی که $S^3 \neq S^2 \times U(1)$ چرا که اگر $S^3 = S^2 \times U(1)$ پس S^3 باید حداقل همسانریخت[3] با $S^2 \times U(1)$ باشد و این در صورتی امکان دارد که ناورداهای توپولوژیکی آنها (مثلاً گروه‌های هموتوپی آنها) با هم یکریخت باشند.

می‌دانیم اگر X و Y دو فضای توپولوژیک هم‌بند مسیری[4] باشند داریم:

$$\pi_n(X \times Y) \cong \pi_n(X) \oplus \pi_n(Y) \qquad (۲-۱-۱)$$

که π_n، n- امین گروه هموتوپی[5] را نشان می‌دهد. از [19] داریم:

$$\pi_2(S^2) \cong \mathbb{Z}, \qquad \pi_2(S^1) \cong \{e\}, \qquad \pi_2(S^3) \cong \{e\}. \qquad (۲-۱-۲)$$

حال اگر فرض کنیم $S^3 = S^2 \times S^1$ نتیجه می‌گیریم:

$$\pi_2(S^3) = \pi_2(S^2) \oplus \pi_2(S^1) \Rightarrow \{e\} = \mathbb{Z} \oplus \{e\} \qquad (۲-۱-۳)$$

که آشکارا چنین نیست، در نتیجه کلاف اصلی فوق بدیهی نیست.

---

1 Principal Hopf fibration
2 Structuregroup
3 Homeomorphism
4 Path connected
5 Homotopy group

اگر M یک فضای توپولوژیک هاوسدورف[1] و فشرده[2] باشد، C(M) را مجموعه تمامی توابع پیوسته که روی M (با مقدار حقیقی یا مختلط) تعریف می‌شوند در نظر می‌گیریم. C(M) به‌وضوح یک فضای برداری است در عین حال یک فضای باناخ[3] هم هست. با تعریف یک ضرب روی C(M) آن را تبدیل به یک جبر باناخ می‌کنیم. به‌بیان دیگر C(M) با جمع نقطه به نقطه و ضرب توابع (نه ترکیب آنها) تبدیل به یک جبر باناخ می‌شود

$$(fg)(x) = f(x)g(x), \quad (۲-۱-۴)$$

$$\|f\| = \sup\{|f(x)|\, x \in M\}. \quad (۲-۱-۵)$$

با تعریف یک این وُلوشن[4] به‌صورت $*: C(M) \to C(M)$ جبر باناخ C(M) تبدیل به یک *- جبر باناخ می‌شود و از آنجا که

$$\|f\bar{f}\| = \|f\|^{2} \quad (۲-۱-۶)$$

پس C(M) تبدیل به یک جبر C^* می‌شود [20].

اگر جبر توابع هموار[5] روی خمینه[6] دیفرانسیل‌پذیر و فشرده‌ی M را با $C^\infty(M)$ نشان دهیم، می‌توان نشان داد که $C^\infty(M)$ زیرجبر چگالی[7] از C(M) است. دیدیم که C(M) یک جبر C^* نیست ولی در هر صورت با ضرب توابع یک جبر است [6]. اگر توابع مختلط مقدار روی فضای کل[8]، S^3 را با $B_{\mathbb{C}} := C^\infty(S^3, \mathbb{C})$ و توابع هموار روی فضای پایه‌ی[9]، S^2 را با

---

1 Hausdorff
2 Compact
3 Banch
4 Involution
5 Smooth
6 Manifold
7 Dense
8 Total space
9 Base space

$A_{\mathbb{C}} := C^{\infty}(S^{2},\mathbb{C})$ نشان دهیم، از آن‌جا که S^{2} و S^{3} خمینه‌های دیفرانسیل‌پذیر فشرده می‌باشند لذا $A_{\mathbb{C}}$ و $B_{\mathbb{C}}$ تشکیل جبر می‌دهند. می‌دانیم عمل‌های[1] چپ گروه $U(1)$ روی $\mathbb{C}$ توسط اعداد صحیح بر چسب زده می‌شوند و دو نمایش[2] نظیر به اعداد صحیح مختلف ناهم ارزند.

اگر از دیدگاه توپولوژیکی به مسأله نگاه کنیم این عدد صحیح همان درجه‌ی[3] نگاشت $f:S^{1}\to S^{1}$ یا همان عدد پیچش[4] می‌باشد، که نشان می‌دهد S^{1} تحت نگاشت f چند دور حول S^{1} پیچانده می‌شود، که این نیز به وضوح منجر به یافتن گروه هموتوپی مرتبه‌ی اول یا گروه بنیادی[5] ، S^{1} می‌شود که با استفاده از فضاهای پوششی[6] در [21] محاسبه شده است. نتیجه عبارت است از:

$$\pi_{1}(S^{1}) \cong \mathbb{Z}. \tag{۲-۱-۷}$$

عناصر هر کلاس هموتوپی به تعداد دفعات یکسانی حول $S^{1} \cong U(1)$ پیچانده می‌شوند و رابطه هم ارزی چنین است که دو عضو در یک کلاس هموتوپی هستند هرگاه عدد پیچش آنها یکی باشد. مجموعه‌ی نگاشت‌های متناظر هم متعدد را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$C^{\infty}_{(n)}(S^{3},\mathbb{C}) := \left\{\phi \in C^{\infty}(S^{3},\mathbb{C}) \middle| \phi(p.w) = w^{-n}.\phi(p)\right\} \tag{۲-۱-۸}$$

که در آن $p \in S^{3}$ و $W \in U(1)$.

1 Action
2 Representation
3 Degree
4 Winding number
5 Fundamental
6 Covering

به‌سادگی می‌توان نشان داد که $C^{\infty}_{(n)}(S^3,\mathbb{C})$ یک $A_{\mathbb{C}}$- مدول راست است. هم‌چنین می‌توان نشان داد اگر $\pi: E \to M$ یک کلاف برداری، باشد در این صورت فضای $\Gamma(M,E)$ متشکل از مقاطع کلاف برداری یک $C(M)$- مدول راست است.

یاد آوری می‌کنیم [22] اگر M یک خمینه و G یک گروه لی[1] باشد یک کلاف تاری اصلی با گروه G، شامل یک خمینه P و یک عمل از راست G روی P صادق در شرایط زیر است:

۱- G به‌طور آزاد[2] و از راست روی P عمل می‌کند

$$(u,a) \in P \times G \mapsto ua = R_a u \in P. \qquad (۲-۱-۹)$$

۲- M فضای خارج قسمتی[3]، P به‌وسیله‌ی رابطه هم ارزی القاء شده به‌وسیله G و $M = P/G$ و نگاشت تصویری کانونیکی $\pi: P \to M$ دیفرانسیل‌پذیر است.

۳- P موضعاً بدیهی است یعنی هر نقطه‌ی x از M یک همسایگی باز مانند U دارد به‌طوری که $\pi^{-1}(U)$ یکریخت با $U \times G$ است.

حال فرض کنید $P(M,G)$ یک کلاف تاری اصلی و F خمینه‌ای است که G از چپ روی آن عمل می‌کند:

$$(a,f) \in G \times F \mapsto af \in F. \qquad (۲-۱-۱۰)$$

کلاف تاری $E(M,F,G,P)$ وابسته به P با تار استاندارد F را چنان می‌سازیم که روی خمینه $P \times F$ گروه G به‌صورت زیر عمل کند

$$G \times (P \times F) \to (P \times F) \qquad (۲-۱-۱۱)$$

$$a \in G; \qquad (u,f) \in P \times F \mapsto (ua, a^{-1}f) \in P \times F.$$

1 Lie
2 Free
3 Quotient

فضای خارج قسمتی P×F با این عمل گروه به‌صورت زیر نشان داده می‌شود

$$E = \frac{P \times F}{G} = P \times_G F. \qquad (۲-۱-۱۲)$$

حال حالتی را در نظر می‌گیریم که F یک فضای برداری k- بعدی، از V، باشد. همچنین فرض کنید P یک نمایش k- بعدی از G باشد. کلاف برداری وابسته $P \times_\rho V$ با یکی گرفتن نقاط (u,v) و $(ua, \rho(a)^{-1}v)$ در P×V حاصل می‌شود که در آن $u \in P, a \in G, v \in V$ با جایگذاری‌های $P = S^3, M = S^2, G = U(1)$، تاربندی هوپف به‌دست می‌آید. حال می‌خواهیم با استفاده از تاربندی هوپف یک کلاف برداری وابسته بسازیم که در آن تارها به‌جای گروه لی U(۱)، گروه $\mathbb{C}$ باشد که با توجه به توضیحات بالا این کلاف برداری وابسته به‌صورت زیر خواهد بود

$$E^{(n)} = S^3 \times_{U(1)} \mathbb{C}, \qquad (۲-۱-۱۳)$$

$$U(1) \times (S^3 \times \mathbb{C}) \to (S^3 \times \mathbb{C}); \qquad \phi : S^3 \to \mathbb{C}$$

$$p \mapsto \phi(p) \qquad (۲-۱-۱۴)$$

$$e^{in\lambda} : (p, \phi(p)) \mapsto (pe^{in\lambda}, e^{-in\lambda}\phi(p))$$

با تعریف $w := e^{i\lambda}$ به‌دست می‌آوریم:

$$w^n : (p, \phi(p)) \mapsto (pw^n, w^{-n}\phi(p)). \qquad (۲-۱-۱۵)$$

یادآوری می‌کنیم که $A_\mathbb{C}$ - مدول استاندارد آزاد با n تا مولد به‌صورت زیر است:

$$A_\mathbb{C}^N := A_\mathbb{C} \oplus \ldots \oplus A_\mathbb{C} \quad (\text{N بار}) \qquad (۲-۱-۱۶)$$

که عناصر آن را می‌توان به‌صورت بردارهای ستونی تصور کرد [8].

لازم است جبر $A_\mathbb{C}$ یکدار[1] باشد تا مطمئن شویم $A_\mathbb{C}^N$ آزاد است.

1 Unital

قضیه گلفاند- نایمارک[1] یک هم ارزی بین رسته‌ی[2] فضاهای توپولوژیک هاوسدورف و رسته‌ی C^*- جبرهای توابع پیوسته روی آن فضاهای توپولوژیک و یا رسته جبرهای توابع هموار روی آن فضاهای توپولوژیک برقرار می‌سازد. با استفاده از این قضیه و با دانستن اطلاعات در مورد جبر توابع بر روی فضاهای توپولوژیک می‌توان اطلاعاتی در مورد خود فضاهای توپولوژیک به‌دست آورد. به‌عنوان مثال نشان داده می‌شود که اگر جبر توابع هموار بر روی یک فضای توپولوژیک یکدار باشد فضای توپولوژیک متناظر باید فشرده باشد و بر عکس [6].

در اینجا چون S^2 و S^3 خمینه‌های فشرده هستند پس جبر توابع بر روی آنها یعنی $A_{\mathbb{C}}$ و $B_{\mathbb{C}}$ یکدار است و در نتیجه $A_{\mathbb{C}}^N$ یک $A_{\mathbb{C}}$- مدول آزاد است. قضیه زیر را به‌آسانی می‌توان اثبات کرد.

قضیه ۱-۱: $A_{\mathbb{C}}$- مدول راست J، تصویری است اگر و تنها اگر به فرم J=eI باشد که در آن I یک $A_{\mathbb{C}}$- مدول راست آزاد و e یک خود توان[3] در $\mathrm{End}_{A_{\mathbb{C}}}(I)$ است [6].

حال باید نشان دهیم که $\Gamma(M,E)$ یا به‌طور خلاصه $\Gamma(E)$ متشکل از مقاطع کلاف برداری E روی فضای پایه M یک $C(M)$- مدول تصویری با تولید متناهی است. اثبات قضیه زیر نیز ساده است:

قضیه۱-۱-۲: فرض کنید E'' یک کلاف برداری روی فضای پیرا فشرده‌ی[4] M باشد در این

1 Gelfand-Naimark
2 Category
3 Idempotent
4 Paracompact

صورت می‌توان کلاف برداری دیگر E' روی M را چنان یافت که جمع ویتنی[1] $E'' \oplus E'$ کلاف برداری بدیهی باشد [6].

قضیه بالا معادل با جابه‌جاپذیر بودن نمودار

(۲-۱-۱۷)
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & E' \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "1_{E'}"'] & M \times \mathbb{C}^N \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\cong"] & E'' \arrow[r] \arrow[d, "1_{E''}"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & E' \arrow[r] & E' \oplus E'' \arrow[r] & E'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

است. فرض کنیم Γ تابعگری[2] باشد که رسته‌ی کلاف‌های برداری را با رسته‌ی مدول مقاطع کلاف‌های برداری مرتبط می‌سازد. می‌توان نشان داد [6] که تابعگر Γ دقیق[3] است به این معنی که دنباله‌های کامل کوتاه[4] را حفظ می‌کند. با اثر دادن این تابعگر به نمودار بالا نمودار

(۲-۱-۱۸)
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \Gamma(E') \arrow[r] \arrow[d, "1_{\Gamma(E')}"'] & C(M)^N \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \Gamma(E'') \arrow[r] \arrow[d, "1_{\Gamma(E'')}"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \Gamma(E') \arrow[r] & \Gamma(E') \oplus \Gamma(E'') \arrow[r] & \Gamma(E'') \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

به دست می‌آید. که در آن از این حقیقت استفاده شده است که کلاف‌های برداری بدیهی در رسته کلاف‌های برداری با مدول‌های آزاد در رسته مدولهای تصویری هم ارزند، لذا $M \times \mathbb{C}^N$بدیهی است. $\Gamma(M \times \mathbb{C}^N)$ یک مدول آزاد و برابر با $C(M)^N$ است.

چون نمودار فوق شکافته[5] می‌شود پس $\Gamma(E'')$ مدول تصویری است [6]. در نتیجه داریم:

(۲-۱-۱۹)
$$C(M)^N \cong \Gamma(E') \oplus \Gamma(E'').$$

1 Whitney sum
2 Functor
3 Exact
4 Short exact sequence
5 Split

برای دنباله $\circ \to \Gamma(E') \to C(M)^N \to \Gamma(E'') \to \circ$ دیدیم که $\Gamma(E'')$ یک مدول تصویری و $C(M)^N$ یک مدول آزاد است. در نتیجه یک خود توان p متعلق به $\mathrm{End}_{C(M)}(C(M)^N)$ وجود دارد به‌طوری که

$$\Gamma(E'') \cong pC(M)^N. \qquad (۲-۱-۲۰)$$

به‌وضوح مشخص است که جبر $\mathrm{End}_{C(M)}(C(M)^N)$ متشکل از نگاشت‌های C(M)- خطی از $C(M)^N$ به $C(M)^N$ با جبر ماتریسی $M_N(C(M))$ یکی است [6]. خود توان p ($p=p^2$) را یک تصویرگر گویند هرگاه:

$$\mathrm{Ker}p = (\mathrm{im}p)^{\perp} \qquad (۲-۱-۲۱)$$

به‌بیان معادل هر خود توان که خود الحاق باشد یک تصویرگر است. بنابراین در حالت خاص که $M=s^2$، مدول $\Gamma^{\infty}(S^2,E^{(n)})$ را می‌توان با تصویر مدول آزاد از مرتبه N، $(A_{\mathbb{C}})^N$، از تصویرگر $p \in M_N(A_{\mathbb{C}})$ یکی گرفت که $M_N(A_{\mathbb{C}})$ جبر ماتریس‌های N×N با درایه‌های متعلق به $A_{\mathbb{C}}$است که عدد صحیح N به‌صورت $N=|n|+1$ داده می‌شود. بحث بالا ما را به قضیه سرسوآن[1] رهنمون می‌سازد که اثبات کامل آن را می‌توان در [4] یا [6] یافت.

قضیه ۳-۱-۲(سرسوآن): تابعگر Γ از رسته کلاف‌های برداری روی فضای فشرده‌ی M به رسته‌ی مدول‌های تصویری با تولید متناهی روی C(M) یک هم ارزی رسته‌هاست.

اگر (E,π,M) یک کلاف برداری باشد در این صورت رتبه این کلاف برداری عبارت است از تابع موضعاً ثابت $r: M \to N$ که به‌صورت $r(x)=\dim(E_x)$ داده می‌شود که در آن E_x تار در نقطه $x \in M$ است. اگر فضای پایه هم‌بند باشد در این‌صورت رتبه ثابت است [17].

1 Serre-Swan