بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه گیلان

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

گرایش کاربردی

روش هوموتوپی برای حل معادلات با مشتقات جزئی

از

فاطمه بادپیما خراط محله

استاد راهنما

دکتر جعفر بی آزار

شهریور ۱۳۸۷

تقدیم به

مادرم

به پاس فداکاری هایش

۱۳۸۷ /۱۰/ - ۵

تقدیر و تشکر

منت خدای را که امکان غرورانگیز بنده بودنش را به من عطا فرمود

بر خود لازم می دانم که تشکر خود را از کسانی که در ارائه این پایان نامه یاریم نمودند اعلام نمایم

استاد ارجمندم، جناب آقای دکتر بی آزار که راهنمایی های ایشان همواره روشنگر راهم بود،

خانواده ی عزیزم، به خاطر همه ی موهبت ها و فداکاری هایشان،

داوران محترم، جناب آقای دکتر فتحی و جناب آقای دکتر گنجی،

مهمان ارجمند، جناب آقای دکتر تقی زاده،

و همه ی اساتیدی که بر علم و آگاهیم افزودند.

همچنین خانم ها ابراهیمی، آیاتی و دوست عزیزم خانم عظیمی که در طول این مدت همواره در کنارم بودند و مشوق راهم.

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

عنوان | صفحه

فهرست جدول ها

صفحه

عنوان

فهرست شکل ها

صفحه

عنوان

چکیده

روش آشفتگی هوموتوپی برای حل معادلات با مشتقات جزئی

فاطمه بادپیما

در این پایان نامه روش آشفتگی هوموتوپی، برا ی حل معادلات دیفرانسیل جزئی به کار رفته است. برای نشان دادن توانایی های این روش تعدادی مثال ارائه شده است. نتایج حاصل، قابلیت ها و سادگی روش را آشکار می سازد.
محاسبات با استفاده از نرم افزار میپل ۱۰ انجام شده است.

واژه های کلیدی: معادلات دیفرانسیل جزئی، روش آشفتگی هوموتوپی، روش تجزیه آدومین

Abstract

Homotopy perturbation method for solving Partial differential equations.

Fateme Badpeima

In this work, homotopy perturbation method (HPM) is employed to solve partial differential equations. Some examples are presented to illustrate the ability of this method. The results obtained using this method reveal the capability and simplicity of the method.
For computations Maple 10 is used.

Key words: *Partial differential equations, Homotopy perturbation method, Adomian decomposition method*

پیش گفتار

سالهاست که آنالیز تواناترین شاخه ریاضیات بوده و مبحث معادلات دیفرانسیل بخش عمده آن است. هدف اولیه‌ی معادلات دیفرانسیل آن است که وسیله‌ای برای مطالعه تغییرات جهان مادی فراهم آورد. نظریه معادلات دیفرانسیل، بهترین و عمومی‌ترین نظریه ریاضی است که به وسیله‌ی آن بسیاری از قوانین طبیعی و انسانی را می توان تبیین نمود. این نظریه شاخه‌ای از آنالیز ریاضی است که از دو قسمت معادلات دیفرانسیل معمولی و معادلات دیفرانسیل جزئی تشکیل شده است. کار برروی این نظریه در قرن هفدهم میلادی توسط اشخاصی چون نیوتن و لایپ نیتز شروع شد وحاصل کار آن ها معادلات دیفرانسیل ساده ای بود که حل آن ها توسط توابع مقدماتی امکان پذیر بود. در قرن هجدهم میلادی با بررسی تار مرتعش، اولین معادله دیفرانسیل جزئی پدید آمد. سپس اویلر ضمن بررسی شرایط وجود و یکتایی جواب، به حل مسائل مقدار مرزی با استفاده از سری‌های توانی پرداخت که بعدها این روش توسط فوریه کامل و به نام او ثبت گردید. تا کنون نظریه معادلات دیفرانسیل عرصه بهترین تحقیقات ریاضی بوده و منشأ ابداع نظریه‌های گوناگون در ریاضی و علوم دیگر گردیده است. هم‌چنین با توجه به رابطه نزدیک آن با علوم دیگر، مخصوصاً فیزیک به نقش کلیدی و اهمیت وافر آن می‌توان پی برد. معادلات ناشی از دنیای تکنولوژی، بسیار پیچیده هستند. این معادلات معمولاً دارای ضرایب متغیر بوده، غیرخطی هستند، مرزهای نامنظم دارند و به صورت دستگاه های توأم از انواع مختلف (مثلاً سهموی و هذلولوی) ظاهر می شوند.

در ریاضیات محض، روش‌های حل معادلات دیفرانسیل با استفاده از شیوه‌های تحلیلی مانند انتگرالگیری یا بسط به سری خاص، مورد بررسی قرار می‌گیرد. در این معادلات تأکید بر یافتن عبارت دقیق برای جواب می باشد. متأسفانه مسائل مهم زیادی در مهندسی و علوم، به خصوص مسائل غیرخطی، وجود دارند که روش‌های تحلیلی یا در آن‌ها به کار نمی‌روند و یا به کارگیری آن‌ها بسیار مشکل است. در چنین مواقعی به روش‌های عددی رو می‌آوریم. در این پایان‌نامه به حل چند نمونه از معادلات دیفرانسیل معمولی و معادلات دیفرانسیل جزئی با استفاده از روش« آشفتگی هوموتوپی[1] » می‌پردازیم.

1- Homotopy perturbation method

این پایان‌نامه شامل پنج فصل به صورت زیر می‌باشد

در فصل اول برخی مفاهیم و تعاریف اولیه در معادلات دیفرانسیل جزئی ارائه می‌شود. در فصل دوم ابتدا روش پارامتر مصنوعی معرفی شده وبا حل یک مثال، محدودیت های این روش نشان داده می شود. سپس ساختار کلی روش آشفتگی هوموتوپی بیان خواهد شد. در فصل سوم کاربردهایی از روش آشفتگی هوموتوپی برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی و معادلات دیفرانسیل جزئی ارائه شده است. فصل چهارم به حل معادله زاخاروف[1] و معادله فرمی[2] با استفاده از روش آشفتگی هوموتوپی و روش تجزیه آدومین[3] اختصاص دارد و با ارائه‌ی مثال هایی از این دو نوع معادله، کارآیی این روش ها نشان داده شده است و سرانجام، در فصل پنجم برنامه های کامپیوتری دو روش آشفتگی هوموتوپی و تجزیه آدومین ارائه شده است.

1- Zakharov -Kuznetsov equation
2- Fermi-Ulam-Pasta equation
3- Adomian decomposition method

فصل اول

تعاریف ومقدمات اولیه
در معادلات دیفرانسیل جزئی

۱-۱ مقدمه

دربسیاری از پدیده ها در علوم مختلف پارامترهایی وجود دارند که برمطابق قوانین حاکم بر آن پدیده با یکدیگر ارتباط دارند. بیان این ارتباط به زبان ریاضی، منجر به یک معادله تابعی می شود و معادله تابعی حاصل از پدیدهایی که درآن آهنگ تغییرات یک تابع نسبت به یک یا چند متغییر مستقل مطالعه می شود، یک معادله دیفرانسیل می باشد. اگر تابع فقط به یک متغیر مستقل بستگی داشته باشد، یک معادله دیفرانسیل معمولی[1] و اگر تعداد متغیرها ی مستقل بیش از یکی باشد، یک معادله دیفرانسیل جزئی[2] است.

معادلات دیفرانسیل جزئی عموماً در فیزیک محیط های پیوسته پیش می آید، مانند مسائل مشتمل بر میدان های الکتریکی، دینامیک سیالات، پخش و حرکت موج. نظریه ی معادلات دیفرانسیل جزئی با نظریه ی معادلات دیفرانسیل معمولی بسیار متفاوت و تقریباً از هر لحاظ بسیار مشکل تر است.

به عنوان یک مثال ساده از معادلات دیفرانسیل جزئی، به دمای اتاقی که در آن نشسته اید توجه کنید. واضح است که دمای اتاق از یک نقطه به نقطه ی دیگر تغییر می کند، یعنی تابعی بر حسب مختصات دکارتی y,x و z است. همچنین دما با زمان نیز تغییر می کند. بنابراین آن را می توان به صورت $u(x,y,z,t)$ نوشت.

در این فصل به ارائه ی مفاهیم و تعاریف مورد نیاز در معادلات دیفرانسیل جزئی می‌پردازیم.

۱-۲ تعاریف و مفاهیم اساسی

۱-۲-۱ تعریف معادله دیفرانسیل جزئی $(P.D.E.)$

این گونه معادلات در هندسه و فیزیک هنگامی پدید می آیند که تعداد متغیرهای مستقل در مسأله ی مورد بحث بیشتر ازیکی باشد. در هر معادله دیفرانسیل جزئی ، متغیر وابسته (تابع مجهول)، باید حداقل تابع دومتغیرمستقل باشد، لذا نسبت به یک متغیر

1- Ordinary Differential Equation
2- Partial Differential Equation

تنها مشتق عادی ندارد بلکه مشتقات جزئی نسبت به چند متغیر دارد.

هنگامی که قوانین فیزیک را برای مسایلی از این نوع به کار می بریم، بعضی اوقات رابطه ای مانند

$$F(x, y, ..., u, u_x, u_y, ..., u_{xx}, u_{xy}, ...) = 0, \quad (۱-۲-۱)$$

بین تابع و مشتقات آن به دست می آوریم .چنین رابطه ای، که مشتقات جزئی را به هم ربط می دهد، به یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی موسوم است. [۲۷]

نماد گذاری: گاهی مشتقات جزئی را به گونه ای می نویسیم که متغیرهای مستقل در اندیس آن ها ظاهر می شوند. به عنوان مثال، به جای $\frac{\partial u}{\partial x}$، $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ و $\frac{\partial^2 u}{\partial x\ \partial y}$ به ترتیب می نویسیم u_x ، u_{xx} ، u_{xy} و غیره.

معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی را می توان از نظر مرتبه، خطی بودن و همگن بودن مانند معادلات دیفرانسیل معمولی دسته بندی کرد.

۱-۲-۲ تعریف

مرتبه یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی ، مرتبه ی بالاترین مشتق جزئی است که در معادله ظاهر می شود.

۱-۲-۳ مثال

معادله

$$x u_x^2 - y u_y = 0,$$

یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبه اول، معادله

$$u_{xx} + 2x u_{xy} + u_{xy} + u_{yy} = e^y,$$

یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبه دوم و معادله

$$u_{xxy} + x u_{yy} + 8u = 7y,$$

یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبه سوم است. در این معادلات x و y متغیرهای مستقل هستند و $u(x, y)$ متغیر وابسته‌ای است که از حل معادله به دست می‌آید.

۱-۲-٤ تعریف

یک معادله ی دیفرانسیل جزئی را خطی گوییم، اگر تابع مجهول و همه مشتق های موجود در آن فقط از درجه یک باشند و جمله‌هایی شامل حاصلضرب تابع مجهول و مشتق های آن در معادله وجود نداشته باشد و اگر نسبت به بالاترین مشتق مرتب شده تابع مجهول خطی باشد، شبه خطی گویند. معادله دیفرانسیلی که خطی نباشد، غیرخطی نامیده می شود.

۱-۲-٥ مثال

معادلات زیر را در نظر می گیریم

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0, \qquad (۱-۲-۲)$$

$$u_x u_{xx} + x u_{yy} = \sin y, \qquad (۱-۲-۳)$$

$$u\, u_{xx} + u_y^2 = u^2 + y, \qquad (۱-۲-۴)$$

معادله ی (۱-۲-۲)، معادله دیفرانسیل جزئی خطی مرتبه دو، معادله ی (۱-۲-۳)، معادله دیفرانسیل جزئی شبه خطی مرتبه دو و معادله (۱-۲-۴) معادله دیفرانسیل جزئی غیرخطی مرتبه دو است.

۱-۲-٦ تعریف

یک معادله ی دیفرانسیل جزئی را همگن گویند در صورتی که هر جمله ی آن شامل متغیر وابسته و یا یکی از مشتق های آن باشد به عنوان مثال معادله ی لاپلاس در دو بعد (یعنی با دو متغیر مستقل)

$$\nabla^2 u = 0,$$

که در آن ∇^2 عملگر دو بعدی لاپلاس است (که در مختصات دکارتی (x, y) به شکل $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ تعریف می شود.) یک معادله همگن است اما معادله ی دوبعدی پواسون

$$\nabla^2 u = f(x, y),$$

که در آن $f(x, y)$ تابع (غیر صفر) مفروضی است، معادله ی نا همگن نامیده می شود.

۱-۲-۷ تعریف

منظور از یک جواب برای یک معادله دیفرانسیل جزئی در ناحیه ی D، از متغیرهای مستقل، تابعی است که در D، دارای همه ی مشتقات جزئی موجود در معادله و صادق در آن باشد. این جواب را می توان از نظر هندسی به عنوان یک رویه در فضای متغیرهای مستقل تعبیر نمود. همچنین مشابه معادلات دیفرانسیل معمولی، ترکیب خطی هر دو جواب یک معادله دیفرانسیل جزئی و خطی همگن نیز یک جواب معادله خواهد بود. در حالت کلی اگر شرایط اولیه و مرزی را در نظر نگیریم، تعداد جواب های یک معادله دیفرانسیل جزئی بسیار زیاد و متنوع می باشد. مثلاً توابع زیر همگی جواب های معادله ی $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ می باشند

$$u=e^x \sin y, \qquad u=\cos x \ \cosh y, \qquad u=\sin x \ \cosh y,$$

$$u=x^3-3xy^2, \qquad u=Arctg\,\frac{y}{x}, \qquad u=Ln\left(x^2+y^2\right),$$

اما اگر شرایط مرزی و اولیه ی خاصی را در نظر بگیریم، آنگاه جواب یکتایی برای هر معادله به دست می آید. [۲۵]

به طور کلی حل معادلات دیفرانسیل جزئی خیلی مشکل تر از حل معادلات دیفرانسیل معمولی است و به جز در انواع خاصی از معادلات دیفرانسیل جزئی خطی، هیچ راه حل عمومی برای حل آنها در دست نیست. معادلات دیفرانسیل جزئی خطی و غیرخطی در اغلب رشته‌های فیزیک، شیمی و مهندسی کاربردهای بسیار متنوعی دارند برای این که علت وقوع معادلات دیفرانسیل جزئی در توصیف پدیده‌ها در طبیعت را درک کنیم، یادآور می‌شویم که بیشتر رویدادها و فرآیندهای فیزیک با توابعی شامل دو متغیر مستقل و یا بیشتر توصیف می‌شوند. متغیرهای معمول عبارتند از x، y و z مربوط به فضا و t برای زمان. در نتیجه هر رابطه‌ای بین تابعی مانند $u(x,y,z,t)$ با مشتق‌های آن نسبت به یک یا چند متغیر مستقل، یک معادله دیفرانسیل جزئی نامیده می شود.

بررسی ریاضی معادلات دیفرانسیل جزئی، در جهت شناخت آن دسته از معادلاتی بوده است که عموماً به عنوان معادلات دیفرانسیل جزئی ریاضی فیزیک شناخته می‌شوند. حیطه ی ریاضی فیزیک در این زمینه را باید به مفهوم وسیع کلمه، یعنی توصیف پدیده های طبیعی به زبان ریاضی تعبیر کرد. بنابراین نه تنها معادلات مهم فیزیک نظری نوین (مانند، معادلات شرودینگر و دیراک در نظریه ی کوانتومی) بلکه معادلات مهم ریاضیات کاربردی و مهندسی (مانند، معادله ی رسانش گرمایی یا معادله ی پخش، معادلات شار چسبنده و معادلات دیگر) نیز در زمره ی این معادلات اند. غالباً یک معادله در شرایط فیزیکی مختلف به صورتهای متنوعی ظاهر می شود. با این حال این امر که بسیاری از معادلات مهم ریاضی فیزیک نه تنها خطی بلکه از نوع دوم اند هم جالب

توجه است و هم رضایت بخش. اما این مطلب به این معنی نیست که بگوییم انواع دیگر معادلات پیش نمی آیند.برای مثال معادله ی دیراک در مکانیک کوانتومی خطی ولی از مرتبه ی اول است در حالی که معادلات نسبیت عام که میدان گرانشی را توصیف می کنند از مرتبه دوم ولی خطی هستند.به همین ترتیب معادله مهمی در کشسانی (معادله ی دو هماهنگ) معادله ای خطی ولی از مرتبه ی چهارم است. پیچیدگی حل یک معادله ی خطی، علاوه بر بستگی به مرتبه ی معادله، بستگی زیادی به تعداد متعییرهای مستقل معادله دارد. از نظر پیچیدگی ریاضی، معادلات دیفرانسیل جزئی دومتغییره در حد وسط بین معادله دیفرانسیل معمولی و معادلات دیفرانسیل جزئی، با سه متغییر مستقل یا بیشتر قرار دارند.

مهم ترین اختلاف بین جواب معادلات دیفرانسیل جزئی وجواب معادلات دیفرانسیل معمولی از آن جا ناشی می شود که جواب کلی یک معادله دیفرانسیل معمولی خطی شامل ثابتهای اختیاری است در حالی که جواب یک معادله دیفرانسیل جزئی خطی شامل توابع دلخواه است. برای نشان دادن این مطلب، معادله ی زیر را در نظر می گیریم

$$u = y f(x), \qquad (۱-۲-۵)$$

که در آن $f(x)$ تابع دلخواهی از x است. آنگاه با مشتق گیری از آن نسبت به y خواهیم داشت

$$\frac{\partial u}{\partial y} = f(x), \qquad (۱-۲-۶)$$

اکنون با حذف $f(x)$ بین (۱-۲-۵) و (۱-۲-۶)، به دست می آوریم

$$y\frac{\partial u}{\partial y} = u. \qquad (۱-۲-۷)$$

که یک معادله دیفرانسیل جزئی مرتبه ی اول است و جواب عمومی آن معادله ی (۱-۲-۵) است. در این جا نکته ی مهم این است که جواب معادله ی(۱-۲-۷) که به صورت (۱-۲-۵) داده شده، یک تابع دلخواه است. به همین ترتیب اگر داشته باشیم

$$u = f(x+y) + g(x-y), \qquad (۱-۲-۸)$$

که در آن $f(x+y)$ و $g(x-y)$ به ترتیب توابع دلخواهی از $(x+y)$ و $(x-y)$ هستند، آن گاه خواهیم داشت

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f'(x+y)+g'(x-y), \tag{۱-۲-۹}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f''(x+y)+g''(x-y), \tag{۱-۲-۱۰}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f'(x+y)+g'(x-y), \tag{۱-۲-۱۱}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f''(x+y)+g''(x-y), \tag{۱-۲-۱۲}$$

از مساوی قرار دادن (۱-۲-۱۰) و (۱-۲-۱۲)، و در نتیجه با حذف توابع دلخواه، یک معادله دیفرانسیل جزئی مرتبه دوم به دست می آوریم

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \tag{۱-۲-۱۳}$$

بنابراین تابع u که به وسیله ی (۱-۲-۸) تعریف شده است، صرف نظر از صورت های تابعی $f(x+y)$ و $g(x-y)$، در (۱-۲-۱۳) صدق می کند، البته به شرطی که f و g توابع دست کم دو بار مشتق پذیر باشند. برای مثال معادلات زیر

$$u=\sin(x+y)+e^{x-y}, \qquad u=(x+y)^3+\tan(x+y), \tag{۱-۲-۱۴}$$

هر دو جوابهای (۱-۲-۱۳) هستند. مانند مثال قبل، جواب عمومی (۱-۲-۱۳) که به صورت (۱-۲-۸) داده شده، شامل توابع دلخواهی است.

در اکثر موارد جواب عمومی یک معادله دیفرانسیل جزئی ، کابرد چندانی ندارد، زیرا این جواب باید در شرایط دیگری موسوم به شرایط مرزی یا اولیه نیز که از فیزیک مسأله ناشی می شود، صدق کند.

۱-۳ شرایط اولیه و مرزی برای معادله دیفرانسیل جزئی

برای به دست آوردن جواب هر معادله دیفرانسیل جزئی شرایط اضافی دیگری نیز باید در دست باشد و معمولاً این شرایط به صورت مقدار مرزی روی تمام یا قسمتی از ناحیه‌ای که جواب را در آن جستجو می‌کنیم بیان خواهند شد. این شرایط ممکن است شرایط اولیه و یا شرایط مرزی باشد. شرایط مرزی، تابع را در نقطه ی مرزی تعیین شده توصیف می کنند و شرایط اولیه ی تابع مجهول را در سراسر ناحیه ی مفروض در زمان آغازی معین می کنند.

۱-۳-۱ مثال

معادله ی زیر را با شرایط داده شده در نظر می‌گیریم [۲۸]

$$u_t - u_{xx} = 0, \qquad 0 < x < l, \qquad t > 0,$$

$$u(x,0) = \cos x, \qquad 0 \le x \le l,$$ شرط اولیه

$$u(0,t) = 0, \qquad t \ge 0,$$ شرط مرزی

$$u(l,t) = 0, \qquad t \ge 0,$$ شرط مرزی

معادله فوق، هدایت حرارت در میله ای به طول l را توصیف می کند و شامل یک معادله با مشتقات جزئی وسه شرط حاکم شده است.این گونه مسائل به مسأله مقدار مرزی موسوم هستند.

از نقطه نظر ریاضی، زمان و مختصات فضایی به عنوان متغیرهای مستقل در نظر گرفته می‌شوند. بدین ترتیب در این مثال شرط اولیه مقدار تابع در $t = 0$ و شرایط مرزی مقدار تابع در دو نقطه روی محور x در زمان t می باشد. شرایط اولیه معمولاً در زمان مشخص $t = t_0$ و یا $t = 0$ تعیین می‌شوند و در نظر گرفتن شرایط در نقطه ی انتهایی دیگر بازه ی زمانی مفروض، مرسوم نیست. در موارد بسیاری علاوه بر شرایط اولیه و مرزی، شرایط دیگری نظیر مشتقات تابع بر روی مرز نیز در نظر گرفته شده است. معمولاً ویژگی‌های مرزی، عوامل تعیین کننده‌ای هستند که با توجه به آن می‌توان روش عددی مناسبی برای یافتن جواب تقریبی معادله انتخاب کرد.