بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه سیستان و بلوچستان
تحصیلات تکمیلی

پایان نامه کارشناسی ارشد در ریاضی محض گرایش هندسه

عنوان:

گروه های پیراتوپولوژیکی و نیم توپولوژیکی در تقابل گروه های توپولوژیکی

استاد راهنما:
دکتر غلام رضا رضایی

استاد مشاور:
دکتر محمد رضا مولایی

تحقیق و نگارش:
احمد امین

(این پایان نامه از حمایت مالی معاونت پژوهشی دانشگاه سیستان و بلوچستان بهره مند شده است)

شهریور ۱۳۸۸

مدیریت آموزشی تحصیلات تکمیلی
دانشگاه سیستان و بلوچستان

بسمه تعالی

این پایان نامه با عنوان گروه های پیراتوپولوژیکی و نیم توپولوژیکی در تقابل گروه های توپولوژیکی قسمتی از برنامه آموزشی دوره کارشناسی ارشد ریاضی محض گرایش هندسه توسط دانشجو احمد امین تحت راهنمایی استاد پایان نامه دکتر غلام رضا رضایی تهیه شده است. استفاده از مطالب آن به منظور اهداف آموزشی با ذکر مرجع و اطلاع کتبی به حوزه تحصیلات تکمیلی دانشگاه سیستان و بلوچستان مجاز می باشد.

احمد امین

این پایان نامه ...... واحد درسی شناخته می شود و در تاریخ ۸۸/۶/۲۷ توسط هیئت داوران بررسی و درجه عالی به آن تعلق گرفت.

	نام و نام خانوادگی	**امضاء**	**تاریخ**
استاد راهنما:	دکتر غلام رضا رضایی		
استاد مشاور:	دکتر محمدرضا مولایی		
داور ۱:	دکتر نصر الله گرامی		۸۸/۶/۲۷
داور ۲:	دکتر رحمت الله لشکری پور		
نماینده تحصیلات تکمیلی:	دکتر اکبر گلچین		

دانشگاه سیستان و بلوچستان

تعهدنامه اصالت اثر

اینجانب احمد امین تأیید می کنم که مطالب مندرج در این پایان نامه حاصل کار پژوهشی اینجانب است و به دستاوردهای پژوهشی دیگران که در این نوشته از آن استفاده شده است مطابق مقررات ارجاع گردیده است. این پایان نامه پیش از این برای احراز هیچ مدرک هم سطح یا بالاتر ارائه نشده است.

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به دانشگاه سیستان و بلوچستان می باشد.

نام و نام خانوادگی دانشجو: احمد امین

امضاء

یاد

ماناترین مانا

مانای بی همتا

تقدیم به

آنان که صادقانه زیستن را به من آموختند، و صبورانه بودن را فدایم نمودند.

به تمامی شعله شدند و شعله شدن را نشانم دادند.

مویشان سپیدی گرفت، تا رویم سپید بماند.

توانشان رفت، تا به توانایی رسم.

رنج بر خویشتن ستاندند، تا گنج سعادت یابم.

تقدیم به بهترین های وجود:

پدر گرانقدرم و مادر مهربانم

و تقدیم با عشق به خواهرم و برادرانم.

سپاس و تقدیر

....بر آنانی که مرا نکته ای آموخته، سخن و جمله و معرفتی تعلیم کرده، تجربه و اندیشه و اندوخته دانشی در اختیارم نهاده اند، درود خویش را نثار آنان می کنم.

شایسته است، اساتید فرزانه ام دکتر غلام رضا رضایی و دکتر محمد رضا مولایی که در این مهم از راهنمایی و مشاوره ایشان بهرمند بوده ام، سپاس فراوان نهم. از اساتید ارجمند، دکتر رحمت الله لشکری پور و دکتر نصر الله گرامی که این نوشته را مورد نقد و بررسی قرار دادند و دکتر اکبر گلچین نماینده تحصیلات تکمیلی قدردارنی می نمایم. همچنین مراتب امتنان خود را به همگی دوستانی که در این دوره مرا یاری نموده اند، ابراز می نمایم.

چکیده

در این پایان‌نامه، ابتدا با گروه‌های توپولوژیکی، نیم‌توپولوژیکی و پیراتوپولوژیکی و مفاهیمی چند از آن‌ها، آشنا می‌شویم و سپس با بررسی ویژگی‌های گروه‌های توپولوژیکی، در پی شرایطی خواهیم بود که اگر یک گروه پیراتوپولوژیکی دارای آن‌ها باشد، خود یک گروه توپولوژیکی شود. در ادامه به ناورداهای عدد اصلی در گروه‌های نیم‌توپولوژیکی و پیراتوپولوژیکی نظر می‌افکنیم و اثر شمارایی نوع اول را بر گروه‌های پیراتوپولوژیکی بررسی می‌کنیم. در آخر، مترپذیری را در گروه‌های نیم‌توپولوژیکی به طور ضعیف فشرده‌نما برقرار می‌کنیم.

واژگان کلیدی: گروه‌های پیراتوپولوژیکی، گروه‌های نیم‌توپولوژیکی، فضاهای متقارن‌پذیر، خاصیت بئر، شبکه شمارا، $P-$ فضای پیرافشرده، فضای به طور ضعیف فشرده‌نما.

فهرست مندرجات

پیش‌گفتار

ایده تعریف گروه‌های توپولوژیکی با بررسی گروه‌های پیوسته از تبدیلات، که خواستگاه آن مطالعات کلین[1] بر هندسه‌ها و گروه‌های تبدیل مرتبط با آن‌ها و همچنین بر نظریه لی[2] در مورد گروه‌های پیوسته به‌وجود آمده از حل معادلات دیفرانسیل بوده، کلید زده شد. اما گروه‌های توپولوژیکی مجرد برای اولین بار توسط اشریر[3] در سال ۱۹۲۶ معرفی گردید. در سال‌های پس از آن اهمیت موضوع برای مطالعه در زمینه آنالیز همساز(هارمونیک)، ریاضیدانان را به گسترش مطالعات خود بر روی گروه‌های توپولوژیکی واداشت. همچنین تحقیقاتی بر روی مفاهیم قوی‌تر از گروه‌های توپولوژیکی انجام شد، حال آنکه مدت زیادی از معرفی گروه‌های نیم‌توپولوژیکی و پیراتوپولوژیکی با این نام نمی‌گذرد.

متن حاضر بیشتر مبتنی بر مطالعات و تحقیقات توپولوژیدان بزرگ معاصر، آرهانگلسکی[4] در زمینه‌های توپولوژی و گروه‌های نیم‌توپولوژیکی و پیراتوپولوژیکی می‌باشد([۳]). این پایان‌نامه شامل چهار فصل است. در فصل اول برخی تعاریف و قضایای اولیه گرد آمده است. در فصل دوم با گروه‌های توپولوژیکی، نیم‌توپولوژیکی و پیراتوپولوژیکی آشنا می‌شویم. در فصل سوم تقابل بین گروه‌های توپولوژیکی و پیراتوپولوژیکی، برخی از شرایط لازم برای پیوستگی نگاشت معکوس در گروه‌های پیراتوپولوژیکی را آشکار می‌سازد. در فصل آخر، توجه خود را معطوف به ناورداهای عدد اصلی در گروه‌های پیراتوپولوژیکی و نیم‌توپولوژیکی می‌کنیم.

---

[1] Klein
[2] Lie's theory
[3] schreier
[4] Arhangel'skii

فصل ۱

تعاریف و قضایای مقدماتی

۱—۱ مقدمه

در این فصل برخی از واژگان، علائم، مفاهیم و قضایایی را که در فصول بعدی به کار خواهیم برد، گرد آورده‌ایم. با توجه به آشنایی قبلی با تعاریف و مفاهیم اساسی نظریه گروه‌ها و توپولوژی عمومی، از بیان آن‌ها در اینجا صرف نظر می‌کنیم. مطالب این فصل برگرفته از کتاب توپولوژی عمومی نوشته انگلکینگ[۱] ([۸]) هستند. برخی از تعاریف ارائه شده در این فصل با تعاریف متداول در کتب توپولوژی عمومی اندکی تفاوت دارند.

۱—۲ مجموعه‌های چگال، هیچ‌جاچگال، فضای بئر و G_δ— مجموعه‌ها

تعریف ۱.۲.۱: فرض کنید X یک فضای توپولوژیکی باشد.

(۱) مجموعه $Y \subseteq X$ را در X چگال می‌گوییم، هرگاه $\overline{Y} = X$.

(۲) مجموعه $Y \subseteq X$ هم‌چگال در X گفته می‌شود، اگر $X \setminus Y$ در X چگال باشد.

(۳) مجموعه $Y \subseteq X$ را هیچ‌جاچگال در X گوییم، در صورتی که $\overline{Y}$ در X هم‌چگال باشد.

قضیه ۲.۲.۱([۸]): اگر زیرمجموعه Y از فضای توپولوژیکی X، هیچ‌جاچگال در X باشد، آنگاه $Int\ \overline{Y} = \phi$.

قضیه ۳.۲.۱([۸]): اجتماع متناهی از مجموعه‌های هیچ جاچگال، هیچ‌جاچگال است.

تعریف ۴.۲.۱: فضای توپولوژیکی X را فضای بئر[۲] یا فضایی با خاصیت بئر گوییم، هرگاه برای خانواده شمارای $\{A_i\}_{i\in I}$ از زیرمجموعه‌های هیچ‌جاچگال در X، مجموعه $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$ یک مجموعه هم‌چگال در X باشد. این معادل است با اینکه، برای خانواده شمارای $\{A_i\}_{i\in I}$ از زیرمجموعه‌های باز چگال

[۱] Engelking

[۲] Baire space

در X، مجموعه $\bigcap_{i\in I} A_i$ نیز در X چگال باشد.

ثابت می‌شود که هر تصویر پیوسته از یک فضای بئر خود یک فضای بئر می‌باشد.

تعریف ۱.۲.۵: زیرمجموعه Y از فضای X را یک $G_\delta-$ مجموعه گوییم، هرگاه بتوان آن را به صورت اشتراک شمارایی از زیرمجموعه‌های باز X نشان دهیم.

تعریف ۱.۲.۶: نقطه x از فضای X یک $G_\delta-$ نقطه خوانده می‌شود، هرگاه مجموعه تک عنصری $\{x\}$ یک $G_\delta-$ زیرمجموعه از X باشد.

تعریف ۱.۲.۷: زیرمجموعه Y از فضای X یک $F_\sigma-$ مجموعه گفته می‌شود، هرگاه نمایشی به صورت اجتماع شمارایی از زیرمجموعه‌های بسته X داشته باشد.

تعریف ۱.۲.۸: زیرمجموعه Y از فضای توپولوژیکی X را $G_\delta-$ چگال در X گوییم، هرگاه هر G_δ — زیرمجموعه از X مجموعه Y را قطع کند.

۱—۳ اصول جداسازی

ذیلاً پنج اصل جداسازی T_0، T_1، T_2، T_3 و T_4 و همچنین فضای تیخونوف [۳] را معرفی می‌کنیم.

تعریف ۱.۳.۱: فضای توپولوژیکی X را یک فضای T_0 گوییم، هرگاه برای هر دو نقطه متمایز از آن مجموعه بازی موجود باشد که یک و تنها یکی از آن‌ها را شامل شود.

تعریف ۱.۳.۲: فضای توپولوژیکی X فضای T_1 گفته می‌شود، اگر برای هر دو نقطه متمایز x و y از آن مجموعه بازی همچون U موجود باشد که x را شامل شود، اما y را شامل نباشد.

[3] Tychonoff space

تعریف ۳.۳.۱: فضای توپولوژیکی X یک فضای $T_۲$ یا هاوسدورف[۴] است، هرگاه برای هر دو نقطه متمایز x و y از آن، مجموعه‌های باز U و V موجود باشند که دارای اشتراک تهی هستند و $x \in U$ و $y \in V$.

تعریف ۴.۳.۱: فضای توپولوژیکی X را منظم گوییم، هرگاه X فضای $T_۱$ باشد و علاوه بر آن، برای $x \in X$ و زیرمجموعه بسته F از X که x را شامل نمی‌شود، زیرمجموعه‌های باز جدا از هم U و V موجود باشند به قسمی که $x \in U$ و $F \subseteq V$.

تعریف ۵.۳.۱: فضای توپولوژیکی X فضای $T_{۳\frac{۱}{۲}}$ یا فضای تیخونوف گفته می‌شود، اگر X فضای $T_۱$ باشد و برای هر $x \in X$ و هر زیرمجموعه بسته $F \subseteq X$ که x را شامل نمی‌شود، تابع پیوسته $f : X \to [۰, ۱]$ موجود باشد چنان که $f(x) = ۰$ و $f(F) = ۱$.

تعریف ۶.۳.۱: فضای تیخونوف X را فشرده‌نما گوییم، هرگاه هر تابع حقیقی‌مقدار تعریف شده روی آن کراندار باشد.

تعریف ۷.۳.۱: فضای توپولوژیکی X را نرمال گوییم، هرگاه X فضای $T_۱$ باشد و علاوه بر آن، برای زیرمجموعه‌های بسته جدا از هم F و K از آن، بتوان زیرمجموعه‌های باز جدا از هم U و V را یافت چنان که $F \subseteq U$ و $K \subseteq V$.

قضیه ۸.۳.۱([۸]): برای هر فضای تیخونوف X، شرایط زیر با یکدیگر معادلند.

(۱) برای هر فشرده‌سازی cX از فضای X، باقیمانده $cX \setminus c(X)$، یک $F_\sigma-$ مجموعه در cX است.

(۲) باقیمانده $\beta X \setminus \beta(X)$، یک $F_\sigma-$ مجموعه در βX می‌باشد، که در آن βX بزرگ‌ترین عنصر از خانواده تمام فشرده‌سازی‌های فضای تیخونوف X می‌باشد.

[۴] Hausdorff space

(۳) یک فشرده‌سازی cX از فضای X وجود دارد چنان که باقیمانده $cX \setminus c(X)$، یک $F_\sigma-$ مجموعه در cX است.

تعریف ۹.۳.۱: فضای توپولوژیکی X را چک[5] — کامل گوییم، هرگاه X فضای تیخونوف باشد و در یکی از شرایط قضیه قبل صدق کند.

۱—۴ اصول شمارایی

تعریف ۱.۴.۱: نقطه x از فضای X یک نقطه تنها گفته می‌شود، هرگاه مجموعه تک عنصری $\{x\}$ در X باز باشد. در این صورت زیرمجموعه Y از X که تمام عناصر آن نقاط تنهای X هستند را زیرمجموعه گسسته گوییم.

تعریف ۲.۴.۱: کوچک‌ترین عدد اصلی $m \geq \aleph_0$ به قسمی که هر زیر مجموعه بسته گسستهٔ از فضای X دارای عدد اصلی کوچک‌تر یا مساوی m باشد را دامنه X گوییم و با $e(X)$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۳.۴.۱([۸]): اگر Y زیرمجموعه‌ای بسته از فضای X باشد، آنگاه $e(Y) \leq e(X)$.

تعریف ۴.۴.۱: هر مجموعه از اعداد اصلی با رابطه $(\leq)$، خوش‌ترتیب است. بنابراین مجموعه‌ای از تمام اعداد اصلی به شکل $|\mathcal{B}|$، که در آن $\mathcal{B}$ پایه‌ای از فضای توپولوژیکی X است، دارای کوچک‌ترین عضو است. این عدد اصلی وزن فضای توپولوژیکی X گفته می‌شود و با $w(X)$ نمایش داده می‌شود.

تعریف ۵.۴.۱: یک خانواده $\mathcal{A}$ از زیرمجموعه‌های فضای توپولوژیکی X را یک شبکه

---

[5] Cech

برای X گوییم، هرگاه برای هر نقطه $x \in X$ و هر همسایگی باز U از x یک $A \in \mathcal{A}$ وجود داشته باشد چنان که $x \in A \subseteq U$.

به آسانی می‌توان نشان داد که هر پایه فضای توپولوژیکی X، یک شبکه برای X می‌باشد.

تعریف ۶.۴.۱: فرض کنید X یک فضای توپولوژیکی باشد و $x \in X$.

(۱) مشخصه X در x، اینگونه تعریف می‌شود:

$$\chi(x, X) = \min \{|\mathcal{A}| \ : \ \text{یک پایه } X \text{ در نقطه } x \text{ باشد } \mathcal{A}\}.$$

(۲) مشخصه X را مانند زیر تعریف می‌کنیم:

$$\chi(X) = \sup \{\chi(x, X) \ : \ x \in X\}.$$

تعریف ۷.۴.۱: اگر برای فضای توپولوژیکی X داشته باشیم $\chi(X) \leq \aleph_0$، آنگاه گوییم X در اولین اصل شمارایی صدق می‌کند، یا اینکه X شمارای نوع اول است.

تعریف ۸.۴.۱: فرض کنید X یک فضای توپولوژیکی باشد. اگر $w(X) \leq \aleph_0$، آنگاه گوییم X در دومین اصل شمارایی صدق می‌کند، یا اینکه X شمارای نوع دوم است.

تعریف ۹.۴.۱: چگالی فضای توپولوژیکی X، کوچک‌ترین عدد اصلی به شکل $|A|$ تعریف می‌شود که در آن A یک زیرمجموعه چگال از X است. این عدد اصلی را با $d(X)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱۰.۴.۱: اگر X یک فضای توپولوژیکی باشد چنان که $d(X) \leq \aleph_0$، آنگاه X را تفکیک‌پذیر گوییم.

تعریف ۱۱.۴.۱: فضای X را لیندلوف [۶] گوییم، هرگاه هر پوشش باز X دارای یک

[۶] Lindeloff

زیرپوشش شمارا باشد.

۱—۵ همسان‌ریختی‌ها و نگاشت‌های تام

قضیه ۱.۵.۱ ([۸]): فرض کنید X و Y دو فضای توپولوژیکی باشند و $f : X \to Y$ یک تناظر ۱ - ۱ باشد. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند:

(۱) f باز است.

(۲) f بسته است.

(۳) f^{-1} پیوسته است.

تعریف ۲.۵.۱: نگاشت دوسویی پیوسته f که در یکی از شرایط قضیه قبل صدق کند را یک همسان‌ریختی گوییم.

تعریف ۳.۵.۱: فرض کنید X و Y دو فضای توپولوژیکی باشند. نگاشت $f : X \to Y$ را یک نگاشت تام می‌نامیم، هرگاه

(۱) f نگاشتی بسته و پیوسته باشد.

(۲) X هاوسدورف باشد.

(۳) برای تمام $y \in Y$، تارهای $f^{-1}(y)$ زیرمجموعه‌های فشرده از X باشند.

۱—۶ فضاهای پیرافشرده

خانواده موضعاً متناهی از مجموعه‌ها ما را به تعریف دسته‌ای از فضاهای توپولوژیکی رهنمون می‌سازد که در هندسه چندگونا تعریفی پایه‌ای است.

تعریف ۱.۶.۱: خانواده $\{A_i\}_{i\in I}$ از زیرمجموعه‌های فضای توپولوژیکی X را موضعاً

متناهی باشد.

تعریف ۲.۶.۱: فرض کنید $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i\in I}$ و $\mathcal{B} = \{B_j\}_{j\in J}$ دو پوشش باز برای فضای توپولوژیکی X باشند. پوشش $\mathcal{B}$ یک تظریف پوشش $\mathcal{A}$ است، هرگاه به ازای هر $j \in J$ یک $i \in I$ موجود باشد به قسمی که $B_j \subseteq A_i$.

تعریف ۳.۶.۱: فضای توپولوژیکی X را پیرافشرده می‌نامیم، هرگاه هر پوشش باز آن دارای تظریف باز موضعاً متناهی باشد.

قضیه ۴.۶.۱([۸]): هر فضای فشرده، پیرافشرده است.

قضیه ۵.۶.۱([۸]): هر فضای پیرافشرده، نرمال است.

تعریف ۶.۶.۱: خانواده $\{A_i\}_{i\in I}$ از زیرمجموعه‌های فضای توپولوژیکی X گسسته گفته می‌شود، هرگاه هر نقطه $x \in X$ دارای همسایگی بازی در X باشد که حداکثر با یکی از مجموعه‌های خانواده داده شده اشتراک داشته باشد.

تعریف ۷.۶.۱: یک خانواده از زیرمجموعه‌های یک فضای توپولوژیکی $\sigma-$ گسسته گفته می‌شود، اگر بتوان آن را به شکل اجتماع شمارایی از خانواده‌های گسسته نمایش داد.

تعریف ۸.۶.۱: فضای توپولوژیکی X با این خاصیت که هر پوشش باز از آن دارای یک تظریف بسته $\sigma-$ گسسته باشد را زیرپیرافشرده گوییم.

در آخر این فصل، مثالی از یک فضای توپولوژیکی آورده شده است که بارها به آن رجوع خواهیم کرد.

مثال: قرار دهید

$$\mathcal{B} = \{[a,b) \ : \ a<b \text{ و } b \text{ و } a \text{ اعداد حقیقی باشند چنان که}\}.$$

در این صورت فضای توپولوژیکی تولید شده توسط این مجموعه روی خط اعداد حقیقی را توپولوژی حد پایینی می‌گوییم و این فضای توپولوژیکی را خط سورجنفری [۷] می‌نامیم.

خط سورجنفری یک فضای توپولوژیکی شمارای نوع اول، تفکیک‌پذیر، لیندلوف، نرمال و پیرافشرده دارای خاصیت بئر می‌باشد که شمارای نوع دوم، چک — کامل و متریپذیر نیست([۸]).

مربع خط سورجنفری، به عنوان یک فضای توپولوژیکی حاصل‌ضربی، شمارای نوع اول است. اما نرمال نیست و بنابراین پیرافشرده نمی‌باشد. در عین حال مربع خط سورجنفری زیرپیرافشرده است([۵]).

---

[۷] Sorgenfrey line

فصل ۲

آشنایی با گروه‌های توپولوژیکی، پیراتوپولوژیکی و نیم‌توپولوژیکی