دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

دانشکده علوم — گروه ریاضی

پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد

ریاضی کاربردی (آنالیز عددی)

موضوع:

معرفی چندجمله‌ای‌های متعامد لورانت و کاربرد آنها در حل معادلات انتگرالی

نگارش:

فاطمه طاهری

استاد راهنما:

دکتر محمود هادیزاده یزدی

استاد مشاور:

دکتر فریده قریشی

آذرماه ۱۳۹۰

تقدیم به:

روان پاک مادر مهربانم

نگاه مشتاقانه پدرم

خواهران و برادران عزیزم

و کلیه کسانی که سهمی در پرورش شخصیت بنده داشته و یا خواهند داشت چه در گذشته، چه در حال و چه در آینده.

تشکر و قدردانی

صمیمانه‌ترین سپاسگذاری‌ها و قدردانی‌ها را از استاد ارجمندم جناب آقای دکتر محمود هادیزاده یزدی به عمل می آورم، که روش درست تحقیق کردن را به من آموخت و تجربیات با ارزش خود را صادقانه در اختیارم نهاد.

لازم است از راهنماییهای ارزشمند خانم دکتر فریده قریشی به عنوان استاد مشاور تشکر کنم.

از اساتید ارجمند جناب آقای دکتر حسین آذری و جناب آقای دکتر علی ذاکری که زحمت مطالعه و داوری پایان‌نامه اینجانب را بر عهده گرفتند، کمال تشکر و قدردانی را دارم.

همچنین از مساعدت‌ها و حمایت‌های ارزشمند خانواده‌ام که همواره مشوق من بوده‌اند صمیمانه سپاس گذارم.

دوستان زیادی در این امر مرا یاری نمودند، از ایشان صمیمانه تشکر می کنم.

چکیده

در این پایان‌نامه حل عددی معادلات انتگرال فردهلم نوع دوم با هسته‌های هموار و منفرد ضعیف مورد بررسی قرار می‌گیرد. بدین منظور ابتدا توابع متعامد لورانت را معرفی و برخی خواص آنها را مورد بحث و بررسی قرار می‌دهیم. سپس با استفاده از این توابع متعامد به حل عددی معادلات انتگرالی با هسته هموار پرداخته می‌شود. قسمت پایانی رساله روش جدیدی مبتنی بر دستگاهی از چندجمله‌ای‌های معرفی شده، برای حل معادلات انتگرالی منفرد ضعیف به همراه مباحث مربوط به همگرایی روش ارائه شده، را بدست می‌دهد. نهایتاً روش حاصله در حل عددی تعدادی مسئله نمونه بکار رفته و نتایج عددی با مراجع مختلف مقایسه شده است.

کلمات کلیدی : معادله انتگرال فردهلم نوع دوم، چندجمله‌ای‌های متعامد لورانت، قاعده انتگرال‌گیری $L-$گاوسی، انتگرال‌گیری حاصل ضربی، روش نیستروم، همگرایی روش .

فهرست مندرجات

پیش‌گفتار

در این پایان‌نامه به حل عددی معادلات انتگرال فردهلم نوع دوم به صورت زیر می‌پردازیم:

$$u(x) = f(x) + \int_{۰}^{۱} K(x, s, u(s))ds, \quad x \in [۰, ۱].$$

که در آن $K(x, s, u(s))$ هسته‌ی معادله انتگرال بوده و در دو حالت هموار و منفرد ضعیف بررسی می‌شود.

معادلات انتگرال با هسته‌های منفرد ضعیف در برخی از مسائل ریاضی‌فیزیک، مکانیک کاربردی، مکانیک سیالات و بسیاری کاربردهای عملی دیگر مورد استفاده قرار می‌گیرد. از آنجا که روش‌های تحلیلی و عددی برای تعیین جوابهای این دسته از معادلات، دارای پیچیدگی‌های زیادی است و بررسی همگرایی روشهای عددی برای حل این معادلات دشوار است، در سالهای اخیر روشهای متفاوتی برای حل این نوع معادلات توسط محققان ارائه شده است. استفاده از چندجمله‌ایهای متعامد یکی از روشهای مهم برای حل معادلات انتگرال منفرد ضعیف می‌باشد. این روشها سرعت و دقت محاسبات را به نحو چشمگیر افزایش می‌دهد.

هدف اصلی نگارش این پایان‌نامه معرفی و کاربرد چندجمله‌ای‌های متعامد لورانت در حل عددی معادلات انتگرال فردهلم نوع دوم با هسته‌های هموار و منفرد ضعیف است.

پایان‌نامه حاضر در چهار فصل تهیه و تنظیم شده است. در فصل اول به بیان مفاهیم مقدماتی و پیش نیازهای اولیه می‌پردازیم.

در فصل دوم، چندجمله‌ای‌های متعامد لورانت معرفی شده و خواص آنها و ارتباطشان با سایر چندجمله‌ای‌های متعامد و قاعده انتگرال‌گیری نظیر آنها مورد بررسی قرار گرفته است.

در فصل سوم، ابتدا روش جدیدی مبتنی بر قاعده انتگرال‌گیری $L-$گاوسی برای حل عددی معادلات انتگرال فردهلم نوع دوم با هسته هموار ارائه شده‌است. ساختار روش به اندازه کافی ساده و در

عین حال کارا می‌باشد به قسمی‌که نتایج عددی بدست آمده حاکی از دقت قابل قبول روش ارائه شده را دارد.

در فصل آخر، برای حل معادلات انتگرال با هسته منفرد ضعیف روش جدیدی مبتنی بر چندجمله‌ای‌های لورانت با استفاده از انتگرال‌گیری حاصلضربی و روش نیستروم ارائه شده است. همچنین مباحث مربوط به همگرایی این روش مورد بررسی قرار می‌گیرد. نهایتاً به مقایسه نتایج عددی ارائه شده در این پایان‌نامه و نتایج عددی حاصل از سایر روشها می‌پردازیم.

فصل ۱

مفاهیم مقدماتی و پیش نیازهای اولیه

۱.۱ مختصری در مورد معادلات انتگرال

معادلات انتگرال در علوم کاربردی چون فیزیک، مکانیک، علوم ارتباطات، پتروشیمی، ساختمان و پل‌سازی، لیزر، نیروگاههای اتمی، رآکتورها و نظریه معادلات دیفرانسیل معمولی و جزئی کاربرد دارند.

به طور کلی یک معادله انتگرال، معادله‌ای است که در آن تابع مجهول در زیر یک یا چند نماد انتگرال ظاهر می‌شود. به طور طبیعی چنین معادلاتی می‌توانند به صورت‌های مختلف ظاهر شوند.

شکل کلی یک معادله انتگرال به صورت زیر است:

$$h(s)f(s) = g(s) + \lambda \int_a^{b(s)} K(s,t)G(t,f(t))dt, \qquad (۱)$$

که در آن $f(s)$ تابعی مجهول و $h(s)$، $g(s)$ و $K(s,t)$ توابعی معلوم هستند. تابع $K(s,t)$ را هسته معادله انتگرال می‌نامیم که می‌تواند تابعی حقیقی یا مختلط باشد. λ یک پارامتر حقیقی یا مختلط غیر صفر و a عددی حقیقی است. در حالتی که حد بالای انتگرال گیری ثابت، معادله را از نوع فردهلم و در غیر اینصورت ولترا می‌نامیم، معادلات ولترا حالت خاصی از معادلات فردهلم هستند زیرا می‌توانیم هسته معادله را در حالت $x < b$ ، مساوی صفر تعریف کنیم.

در حالتهای $h(s) = ۰$ و $h(s) \neq ۰$، معادله (۱) به ترتیب معادله ولترای نوع اول و نوع دوم می‌باشد. همچنین اگر $g(s) = ۰$، معادله (۱) معادله انتگرال همگن و در غیر اینصورت معادله انتگرال ناهمگن است.

معادلات انتگرال غیر خطی دسته مهمی از معادلات انتگرال را تشکیل می‌دهند و از آنجا که در عمل بسیاری از معادلات دیفرانسیل معمولی و جزئی به معادلات انتگرال غیر خطی تبدیل می‌شوند، لذا این دسته از معادلات از اهمیت ویژه ای برخوردار هستند.

به همین ترتیب معادلات دو بعدی فردهلم، ولترا و ولترا—فردهلم را می‌توانیم تعریف کنیم که در حالت کلی، معادلات ولترا—فردهلم به صورت زیر می‌باشد:

$$u(x,y) = f(x,y) + \int_a^y \int_\beta k(x,y,s,t)G(s,t,u(s,t))\, ds\, dt, \qquad (۲)$$

که در آن $u(x,y)$ تابع مجهول و $f(x,y)$ روی ناحیه $D = \beta \times [a,y]$ و هسته $k(x,y,s,t)$ توابعی معلوم بوده و هسته $k(x,y,s,t)$ روی مجموعه $E = \{(x,y,s,t) : x,s \in \beta, a \leq t \leq y \leq Y\}$ تعریف شده است به طوری‌که $\beta = [c,d]$.

اهمیت اصلی معادلات فوق، کاربرد آنها در مدلسازی برخی بیماریهای مسری و نظریه مسائل مقدار مرزی سهموی و برخی مدلهای فیزیکی و زیست شناختی است .

از آنجا که در حالت کلی حل دقیق بسیاری از معادلات انتگرالی امکان پذیر نیست، لزوم ارائه روشهای تقریبی و عددی جهت حل معادلات انتگرالی آشکار می‌گردد. همچنین به دلیل کاربردی بودن معادلات منفرد در تئوری پتانسیل، فیزیک مکانیک، تئوری امواج و الکترونیک، نیاز به نتایج و شیوه های عددی برای رسیدن به جواب احساس می‌شود.

۲.۱ چند جمله‌ای‌های متعامد و خواص آنها

یک دسته بسیار مهم از توابع ویژه، چند جمله‌ای‌های متعامد می‌باشند که در علوم کاربردی نقش برجسته ای ایفا می‌کنند. چند جمله‌ای‌های متعامد در حل معادلات دیفرانسیل معمولی و جزئی، روش کمترین مربعات، نظریه تقریب، مباحث مربوط به حل دستگاه‌ها و اساساً در جبر خطی عددی، مبحث درونیابی و تقریب توابع، روش‌های انتگرال‌گیری گاوسی و در بسیاری دیگر از زمینه‌های کاربردی ، ابزار فوق العاده قدرتمند و کارآمدی می‌باشد.

از نظر تاریخی، می‌توان پیدایش چندجمله‌ای‌های متعامد را در قرن هجدهم یافت، اما در قرنهای نوزدهم و بیستم پیشرفت‌های زیادی در این زمینه بوجود آمد و این چندجمله‌ای‌ها در حوزه‌های وسیعی از ریاضیات مورد استفاده قرار گرفتند.

۱.۲.۱ تعریف

انتگرالهایی به صورت

$$\int_a^b f(x)\omega(x)dx$$

را که در آن $\omega(x)$ تابع وزن نامیده می‌شود و $f(x)$ تابع دلخواهی است را در نظر می‌گیریم. $[a,b]$ می‌تواند بازه متناهی یا نامتناهی باشد و $\omega(x)$ در دو شرط زیر صدق می‌کند:

i) $\omega(x)$ تابعی نامنفی، اندازه پذیر و روی $[a,b]$ مخالف صفر است،

ii) همه گشتاورهای $k=0,1,\cdots$,$\mu_k=\int_a^b x^k\omega(x)dx$، موجود و متناهی هستند.

اگر Π فضای تمام چند جمله‌ای‌های از درجه حداکثر n باشد، می‌توان برای هر زوج از توابع $f(x)$ و$g(x)$ از Π ضرب داخلی را نسبت به تابع وزن ω به صورت زیر تعریف کرد:

$$(f(x), g(x)) = \int_a^b \omega(x) f(x) g(x)\, dx.$$

دنباله چندجمله‌ای‌های $\{P_n(x)\}$ را نسبت به تابع وزن ω روی بازه $[a,b]$ متعامد گوئیم هر گاه:

$$\int_a^b \omega(x) P_m(x) P_n(x) dx = 0, \qquad m \neq n.$$

همچنین دنباله $\{P_n(x)\}$ از چندجمله‌ای‌ها را نسبت به تابع وزن ω روی بازه $[a,b]$ متعامد یکه گوییم هرگاه داشته باشیم:

$$\| P_n \| = (\int_a^b \omega(x)(P_n)^2(x)dx)^{1/2} = 1, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

قضیه ۱.۲.۱ [۱۷] اگر چندجمله‌ای $P_n(x)$ روی $[a,b]$ نسبت به تابع وزن مثبت $\omega(x)$ متعامد باشد، همه ریشه‌های $P_n(x)$ حقیقی و مجزا هستند و درون بازه $[a,b]$ قرار دارند.

قضیه ۲.۲.۱ [۱۱] فرض کنید $\{P_1, P_2, ..., P_n\}$ مجموعه‌ای از چندجمله‌ای‌های متعامد روی بازه $[a,b]$ باشد. در این صورت

الف) تمام چندجمله‌ای‌های P_i که در آن $i = 0, 1, ..., n$، دو به دو مستقل خطی می‌باشند.

ب) هر چندجمله‌ای دلخواه $P(x) \in \Pi_n$ را می‌توان به‌طور منحصر بفردی به صورت

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k P_k(x)$$

نشان داد.

ج) برای هر چندجمله‌ای دلخواه $P(x) \in \Pi_{n-1}$ داریم $(P, P_n) = 0$ [۳۱].

اگر چندجمله‌ای متعامد P_n به صورت زیر نمایش داده شود:

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + x + 1, \quad n = 0, 1, 2, \cdots,$$

رابطه بازگشتی زیر برای چندجمله‌ای‌های متعامد $\{P_0, P_1, P_2, \cdots\}$ برقرار است [۱۷]:

$$P_0 = 1, \quad P_1 = x - \alpha_1,$$

$$P_{n+1} = (x - \alpha_{n+1}) P_n - \beta_{n+1} P_{n-1}, \quad n \geq 1,$$

که در آن

$$\alpha_{n+1} = \frac{\int_a^b x\omega(x) P_n^2(x) dx}{\int_a^b \omega(x) P_n^2(x) dx}, \quad \beta_{n+1} = \frac{\int_a^b x\omega(x) P_n(x) P_{n-1}(x) dx}{\int_a^b \omega(x) P_{n-1}^2(x) dx}.$$

از جمله روابط مهم در ارتباط با چندجمله‌ای‌های متعامد $\{P_0(x), P_1(x), ...\}$، روابط کریستوفل–داربوکس [۱] هستند که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{P_k(x) P_k(t)}{\rho_k} = \frac{P_{n+1}(x) P_n(t) - P_n(x) P_{n+1}(t)}{b_n \rho_n (x - t)},$$

به‌طوری‌که در آن داریم:

$$\rho_n = \int_a^b \omega(x) P_n^2(x) dx, \qquad b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n},$$

و a_n همان‌طور که اشاره شد ضریب جمله n ام P_n است.

۲.۲.۱ انواع چندجمله‌ای‌های متعامد

با توجه به اهمیت توابع متعامد به دلیل کاربرد فراوان آنها در محاسبات عددی و به منظور مقایسه این چندجمله‌ای‌ها با چندجمله‌ای‌های L–متعامد که در فصل (۲) معرفی می‌شوند، چند نمونه مهم آنها را در ادامه خواهیم آورد:

[۱] Christoffel-Darboux identity

• چندجمله‌ای‌های ژاکوبی[۲]

این چندجمله‌ای‌ها نسبت به تابع وزن $\omega(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$ روی بازه $[-1,1]$ متعامد می‌باشند. چندجمله‌ای‌های ژاکوبی فرم کلی‌تر چند جمله ای‌های لژاندر و چبیشف هستند. این چندجمله‌ای‌ها وابسته به پارامترهای α, β بوده و به صورت زیر نمایش داده می‌شوند:

$$P_n^{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{[n/2]}\binom{n+\alpha}{k}\binom{n+\beta}{n-k}(x-1)^{n-k}(x+1)^k \qquad (3)$$

در $x = \pm 1$ داریم:

$$P_n^{\alpha,\beta}(1) = \binom{n+\alpha}{\alpha}, \quad P_n^{\alpha,\beta}(-1) = \binom{n+\beta}{\beta} = (-1)^n P_n^{\alpha,\beta}(1).$$

$P_n^{\alpha,\beta}(x)$ چندجمله ای از درجه n است و ضریب جمله پیشرو در آن از رابطه

$$\frac{\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)}{2^n n!\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}$$

بدست می آید. چندجمله‌ای‌های ژاکوبی برحسب مقدار n، توابعی زوج یا فرد هستند.

این چندجمله‌ای‌ها به ازای مقادیر مختلف n، جواب معادله دیفرانسیل از مرتبه ۲ زیر هستند:

$$(1-x^2)y'' + [\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x]y' + n(n+\alpha+\beta+1)y = 0.$$

قضیه ۱.۲.۳ [۳۲] برای چندجمله‌ای‌های ژاکوبی روابط زیر برقرار هستند:

$$P_{2\nu}^{(\alpha,\alpha)}(x) = \frac{\Gamma(2\nu+\alpha+1)\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+\alpha+1)\Gamma(2\nu+1)}P_\nu^{(\alpha,-1/2)}(2x^2-1)$$

$$= (-1)^\nu\frac{\Gamma(2\nu+\alpha+1)\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+\alpha+1)\Gamma(2\nu+1)}P_\nu^{(-1/2,\alpha)}(1-2x^2),$$

$$P_{2\nu+1}^{(\alpha,\alpha)}(x) = \frac{\Gamma(2\nu+\alpha+2)\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+\alpha+1)\Gamma(2\nu+2)}xP_\nu^{(\alpha,+1/2)}(2x^2-1)$$

$$= (-1)^\nu\frac{\Gamma(2\nu+\alpha+2)\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+\alpha+1)\Gamma(2\nu+2)}xP_\nu^{(1/2,\alpha)}(1-2x^2).$$

---
[۲] Jacobi polynomials

اثبات قضیه فوق در [۳۲] آمده است.

به علاوه‌این چندجمله‌ای‌ها در روابط بازگشتی زیر صدق می‌کنند:

$$P_{0}^{(\alpha,\beta)}(x) = 1, \quad P_{1}^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{1}{2}(\alpha+\beta+2)x + \frac{1}{2}(\alpha-\beta),$$

$$(2n)(n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta-2)P_{n}^{(\alpha,\beta)}(x) =$$

$$(2n+\alpha+\beta-1)[(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta-2)x+\alpha^{2}-\beta^{2}]P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x)$$

$$-2(n+\alpha-1)(n+\beta-1)(2n+\alpha+\beta)P_{n-2}^{(\alpha,\beta)}(x), \quad n = 2, 3, \cdots.$$

همچنین فرمول رودریگرز[۳] برای این چندجمله‌ای‌ها به صورت زیر است [۳۲]:

$$(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}P_{n}^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^{n}}{2^{n}n!}(\frac{d}{dx})^{n}[(1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}], \quad \forall\alpha, \beta.$$

- چندجمله‌ای‌های چبیشف [۴]

چندجمله‌ای‌های چبیشف یکی از مهم‌ترین چندجمله‌ای‌های متعامد هستند که دو نوع آن از اهمیت بیشتری برخوردارند. این چندجمله‌ای‌ها روی بازه $[-1, 1]$ نسبت به تابع وزن $\omega(x) = (1-x^{2})^{-1/2}$ متعامد می‌باشند. چندجمله‌ای‌های چبیشف نوع اول به صورت $T_{n}(x) = \cos(n \arccos x), n = 0, 1, 2, \cdots$ تعریف و به صورت زیر نمایش داده می‌شوند:

$$T_{n}(x) = \frac{n}{2}\sum_{k=0}^{[n/2]}(-1)^{k}\frac{(n-k-1)!}{k!(n-2k)!}(2x)^{n-2k},$$

$T_{n}(x)$ چندجمله‌ای از درجه n بوده و ضریب جمله پیشروی آن 2^{n-1} است.

این چندجمله‌ای‌ها در رابطه بازگشتی زیر صدق می‌کنند:

$$T_{0}(x) = 1, \quad T_{1}(x) = x, \quad T_{k+1}(x) = 2xT_{k}(x) - T_{k-1}(x), \quad k = 1, 2, \cdots. \qquad (4)$$

---

[۳] Rodrigues' formula

[۴] Chebyshev polynomials

به راحتی ثابت می‌شود که:

$$\int_{-1}^{1} T_n(x)T_m(x)(1-x^2)^{\frac{-1}{2}}dx = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ \pi, & n = m = 0, \\ \pi/2, & n = m \neq 0. \end{cases}$$

تابع وزن $\omega(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ حالت خاص تابع وزن ژاکوبی برای $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$ است. بنابراین چندجمله‌ای چبیشف $T_n(x)$، حالت خاصی از چندجمله‌ای ژاکوبی $P_n^{(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})}$ است، یعنی داریم:

$$P_n^{(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})} = c_n T_n(x),$$

که در آن

$$c_n = \frac{\Gamma(2n)}{2^{2n-1}\Gamma(n)\Gamma(n+1)}.$$

علاوه بر این چندجمله‌ای‌های چبیشف نوع اول، توابع ویژه مساله اشتورم—لیوویل منفرد زیر هستند:

$$(\sqrt{1-t^2}T_k'(t))' + \frac{k^2}{\sqrt{1-t^2}}T_k(t) = 0.$$

همچنین فرمول رودریگرز برای این چندجمله‌ای‌ها به صورت زیر بیان می‌شود:

$$T_n(x) = \frac{(-1)^n(1-x^2)^{1/2}\sqrt{\pi}}{2^{n+1}\Gamma(n+\frac{1}{2})}\frac{d^n}{dx^n}[(1-x^2)^{n-1/2}]$$

چندجمله‌ای‌های چبیشف نوع دوم به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$U_n(\cos\theta) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}.$$

روابط زیر نمایش این چندجمله‌ای‌ها به صورت یک سری و فرمول رودریگرز هستند:

$$U_n(x) = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{(n+1)!x^{n-2k}(x^2-1)^k}{(2k+1)!(n-2k)!} = \frac{\sin[(n+1)\cos^{-1}(x)]}{\sqrt{(1-x^2)}},$$

$$U_n(x) = \frac{(-1)^n(n+1)\sqrt{\pi}}{2^{n+1}(1-x^2)^{1/2}\gamma(n+\frac{3}{2})}\frac{d^n}{dx^n}[(1-x^2)^{n+1/2}]$$

تابع وزن این چندجمله‌ای‌ها $\omega(x) = (1-x^2)^{+1/2}$ بوده و روی بازه $(-1,1)$ متعامد می‌باشند، یعنی:

$$\int_{-1}^{1} U_n(x)U_m(x)(1-x^2)^{\frac{1}{2}}dx = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ \pi/2, & n = m. \end{cases}$$

به علاوه این چندجمله‌ای ها از درجه n هستند و ضریب پیشرو آنها 2^n است.

روابط بازگشتی این چندجمله‌ای‌ها عبارت است از :

$$U_0(x) = 1, \quad U_1(x) = 2x, \quad U_n(x) = 2xU_{n-1}(x) - U_{n-2}(x), \quad n = 2, 3, \cdots.$$

تابع وزن $\omega(x) = (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ حالت خاص تابع وزن ژاکوبی برای $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ است و لذا چندجمله‌ای چبیشف $U_n(x)$، حالت خاصی از چندجمله‌ای ژاکوبی $P_n^{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}$ است به‌طوری‌که:

$$P_n^{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})} = e_n U_n(x),$$

که در آن ؛

$$e_n = \frac{(2n+1)!}{2^{2n} n!(n+1)!}.$$

چندجمله‌ای‌های چبیشف نوع اول و دوم توسط رابطه زیر با هم مرتبط هستند:

$$U_n(x) = \frac{T'_{n+1}(x)}{n+1}.$$

- چند جمله‌ای‌های لژاندر[5]

چندجمله‌ای‌های لژاندر توابع چندجمله‌ای متعامدی از درجه n می‌باشند که حالت خاصی از چندجمله‌ای‌های ژاکوبی به ازای $\alpha = \beta = 0$ هستند. این چند جمله ای‌ها به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$L_n(x) = \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^m (m+n)!}{2^m (m!)^2 (n-m)!}(1-x)^m, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

و در رابطه بازگشتی زیر صدق می‌کنند:

$$L_0(x) = 1, \quad L_1(x) = x, \quad L_{k+1}(x) = (\frac{2k+1}{k+1})L_k(x) - (\frac{k}{k+1})L_{k+1}(x).$$

[5] Legendre polynomials

شکل کلی این چند جمله‌ای‌ها که مستقیماً با استفاده از فرمول رودریگرز [۶] حاصل می‌شوند به صورت زیر است :

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d}{dx^n}[(x^2-1)^n], \quad n \geq 0.$$

چند جمله‌ای‌های لژاندر روی فاصله $[-1, 1]$ نسبت به تابع وزن $\omega(x) = 1$ متعامد هستند، یعنی:

$$\int_{-1}^{1} L_m(x)L_n(x)dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{mn},$$

که در آن δ_{mn} تابع دلتای کرونکر است. این چندجمله‌ای‌ها به‌دلیل تعامد نسبت به تابع وزن $\omega(x) = 1$، در محاسبه تقریبی انتگرال‌ها بطور گسترده کاربرد دارند.

به علاوه این چندجمله‌ای‌ها در شرایط زیر صدق می‌کنند:

$$L_k(x) \geq 1, \quad \int_0^1 L_k^2(x)\,dx = \frac{2}{2k+1}, \quad L_k'(x) \geq \frac{1}{2}k(k+1).$$

همچنین این چندجمله‌ای‌ها توابع ویژه مسئله استورم—لیوویل [۷] منفرد زیر هستند:

$$(1-t^2)L_k'(t) + k(k+1)L_k(t) = 0.$$

- چندجمله‌ای‌های لاگور [۸]

این چندجمله‌ای‌ها روی بازه $[0, \infty)$ نسبت به تابع وزن $\omega(x) = e^{-x}$ متعامد هستند و به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$L_n^{(\alpha)} = \binom{n+\alpha}{n}, \quad L_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n+\alpha}{n-k}\frac{(-x)^k}{k!},$$

همچنین این چندجمله‌ای‌ها در رابطه بازگشتی زیر صدق می‌کنند:

$$nL_n^{(\alpha)}(x) = (2n-1-x)L_{n-1}^{(\alpha)}(x) - (n-1)L_{n-2}^{(\alpha)}(x), \quad n \geq 2.$$

---

[۶] Rodrigues' formula

[۷] Strum-Lioville

[۸] Laguerre polynomials

فرمول رودریگرز برای این چندجمله‌ای‌ها به صورت زیر می‌باشد[۳۲]:

$$e^{-x}x^{\alpha}L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{۱}{n!}(\frac{d}{dx})^n(x^{n+\alpha}e^{-x}), \quad n \geq ۰$$

علاوه بر این چندجمله‌ای‌های لاگور، جواب معادله دیفرانسیل زیر هستند:

$$xy'' + (\alpha + ۱ - x)y' + ny = ۰.$$

برای چندجمله ای های لاگور $\{L_n^{\alpha}(x)\}$، خاصیت تعامد برای $\alpha > -۱$ به صورت زیر بیان می‌شود [۱۷]:

$$\int_۰^{\infty} e^{-x}x^{\alpha}L_n^{(\alpha)}(x)L_m^{(\alpha)}(x)dx = \begin{cases} ۰, & n \neq m \\ n!\Gamma(n+\alpha+۱), & n = m. \end{cases}$$

ارتباط بین این چندجمله‌ای ها و چندجمله‌ای‌های ژاکوبی به صورت زیر بیان می‌شود[۳۲]:

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \lim_{\beta\to\infty} P_n^{(\alpha,\beta)}(۱ - ۲\beta x). \qquad (۵)$$

قضیه ۴.۲.۱ چندجمله‌ای‌های لاگور برحسب توابع بسل به صورت زیر نمایش داده می‌شوند [۳۲]:

$$e^{-x}x^{\alpha/۲}L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{۱}{n!}\int_۰^{\infty} e^{-t}t^{n+\alpha/۲}J_{\alpha}[۲(tx)^{۱/۲}]dt, \quad n = ۰, ۱, ۲, ..., \alpha > -۱.$$

- چندجمله‌ای‌های هرمیت[۹]

این چندجمله‌ای‌ها روی بازه $(-\infty, +\infty)$ نسبت به تابع وزن $\omega(x) = e^{-x^۲}$ متعامدند و به صورت زیر تعریف می‌شوند[۱۷]:

$$H_n(x) = (-۱)^n e^{-x^۲}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^۲}.$$

به علاوه این چندجمله‌ای‌ها را می‌توان به صورت سری توانی به شکل زیر بسط داد:

$$H_n(x) = \sum_{i=۰}^{[n/۲]}(-۱)^n\frac{n!(۲x)^{n-۲i}}{i!(n-۲i!)}.$$

---

[۹] Hermite polynomials