دانشگاه تبریز
دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی کاربردی

رساله

برای دریافت درجه دکتری در رشته‌ی
ریاضی کاربردی، گرایش معادلات دیفرانسیل

عنوان

بررسی وجود جواب‌های سرتاسری برای معادلات انتگرال دیفرانسیل فازی غیرخطی و جواب‌های موضعی دستگاه‌های دیفرانسیل-جبری فازی خطی

استاد راهنما
دکترفریبا بهرامی

استاد مشاور
دکترصداقت شهمراد

پژوهشگر
رباب علی‌خانی

خرداد ۱۳۹۲

بسم الله الرّحمن الرّحیم

تقدیم به:

پدر و مادر بزرگوارم

که نه میتوانم موهایشان را که در راه عزت من سفید شد، سیاه کنم و نه برای دستهای پینه بسته شان که ثمره تلاش برای افتخار من است، مرهمی دارم.

بنام خدا

سپاسگزار کسانی هستم که سرآغاز تولد من هستند. از یکی زاده می‌شوم و از دیگری جاودانه. استادی که سپیدی را بر تخته سیاه زندگیم نگاشت و مادری که تار مویی از او بپای من سیاه نماند.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم تا صمیمانه‌ترین سپاس‌هایم را حضور استاد راهنمای فرهیخته و فرزانه‌ام، سرکار خانم دکتر فریبا بهرامی تقدیم نمایم که هرچه آموختم در مکتب او آموختم و هرچه بکوشم قطره‌ای از دریای بی‌کران مهربانی او را سپاس نتوانم گفت.
از استاد گرامی و صبورم، جناب آقای دکتر شهمراد کمال تشکر و قدردانی را دارم که زحمت مشاوره این رساله را متقبل شدند و در کمال سعه صدر، با حسن خلق و فروتنی، از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننمودند.
از اساتید ارجمندم، جناب آقای دکتر ایواز، جناب آقای دکتر صادقی و جناب آقای دکتر میرنیا که زحمت داوری این رساله را تقبل فرمودند و با نکته‌های دلاویز و گفته‌های بلند خود بر غنای آن افزودند، صمیمانه سپاسگزارم.
از ریاست محترم دانشکده علوم ریاضی جناب آقای دکتر حجتی و سایر اساتید محترم گروه ریاضی که در طول تحصیل از راهنمایی‌های ایشان بهره‌مند گردیده‌ام، تشکر و قدردانی می‌نمایم، باشد که این خردترین، بخشی از زحمات آنان را سپاس گوید.
بوسه می زنم بر دست های پاک پدر و مادر عزیزم...این دو معلم بزرگوارم...که همواره بر کوتاهی و درشتی من، قلم عفو کشیده و کریمانه از کنار غفلت‌هایم گذشته‌اند و در تمام عرصه‌های زندگیم یار و یاوری بی‌چشمداشت برای من بوده‌اند.
خالصانه‌ترین سپاس‌هایم، نثار خواهرهای عزیزم حبیبه و حمیده به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان که در این سردترین روزگاران بهترین پشتیبان من بودند.
صمیمانه‌ترین قدردانی خود را تقدیم دوستان نازنینم، خانم معصومه زینالی و خانم فرناز ماهان می‌نمایم که با حضور خواهرانه‌شان دشواری‌های این راه را بر من آسان‌تر نمودند.

رباب علی‌خانی
خرداد ۱۳۹۲

نام خانوادگی دانشجو: علی‌خانی نام: رباب

عنوان: بررسی وجود جواب‌های سرتاسری برای معادلات انتگرال دیفرانسیل فازی غیرخطی و جواب‌های موضعی دستگاه‌های دیفرانسیل-جبری فازی خطی

استاد راهنما : دکترفریبا بهرامی

استاد مشاور : دکترصداقت شهمراد

مقطع تحصیلی: دکتری رشته: ریاضی کاربردی گرایش: معادلات دیفرانسیل دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی تاریخ فارغ التحصیلی: خرداد ۱۳۹۲ تعداد صفحات: ۱۰۲

کلید واژه‌ها: معادلات انتگرال دیفرانسیل فازی، دستگاه دیفرانسیل-جبری فازی، معادلات انتگرال کسری فازی، معادلات دیفرانسیل کسری فازی

چکیده

برای قالب‌بندی پدیده‌های دنیای واقعی، در بسیاری موارد، اطلاعات درباره‌ی رفتار سیستم‌های دینامیکی مبهم و نامطمئن است و باید چنین ابهاماتی، برای دست یافتن به قالب دقیق‌تر، در نظر گرفته شوند. یک روش طبیعی برای قالب‌بندی سیستم‌های دینامیکی تحت مفروضات مبهم و نامطمئن، معادلات دیفرانسیل و انتگرال دیفرانسیل فازی است. دیدگاه‌های مختلفی برای تعبیر جواب معادلات دیفرانسیل فازی و در نتیجه برای معادلات انتگرال دیفرانسیل فازی تحت مشتق‌پذیری تعمیم‌یافته وجود دارند. دیدگاه ما در فصل سوم این رساله، بر اساس تعبیر جدیدی از جواب‌های معادلات دیفرانسیل فازی بنا نهاده شده است که در آن، جواب‌ها نوع متفاوتی از مشتق‌پذیری تعمیم‌یافته را روی زیربازه‌های افراز $[a, b]$ دارند. در ادامه‌ی فصل سوم، تحت این نوع تعبیر برای جواب، به بررسی جواب‌های سرتاسری مسئله‌ی مقدار اولیه‌ی فازی برای معادلات انتگرال دیفرانسیل غیرخطی از نوع ولترا پرداخته می‌شود.
در فصل چهارم این رساله، با به کار بردن روش جواب‌های بالایی و پایینی، قضیه‌های وجود و یکتایی مربوط به معادلات انتگرال کسری فازی بررسی می‌شوند. همچنین با استفاده از این روش، به اثبات

وجود جواب برای مسئله‌ی مقدار اولیه‌ی فازی از معادلات انتگرال دیفرانسیل خواهیم پرداخت که شامل مشتق‌های کسری ریمان-لیوویل هستند. اهمیت کار بر این حقیقت منطبق است که استفاده از روش جواب‌های بالایی و پایینی، ما را قادر می‌سازد تا تحت شرایط ضعیف‌تر به بررسی نتایج وجود و یکتایی برای مسئله‌ی مقدار اولیه فازی از معادلات انتگرال و انتگرال دیفرانسیل کسری فازی بپردازیم.
سیستم‌های دینامیکی مقید با شرایط اولیه‌ی مبهم با استفاده از مسایل مقدار اولیه فازی برای معادلات دیفرانسیل-جبری قالب‌بندی می‌شوند. در فصل پنجم این رساله، برای اولین بار نتایج وجود، یکتایی و یک روش برای حل مسایل مقدار اولیه‌ی فازی از معادلات دیفرانسیل-جبری خطی بیان خواهد شد.

فهرست مطالب

مقدمه

مفهوم مجموعه‌ی فازی اولین بار در سال ۱۹۶۵ توسط دانشمند ایرانی تبار، لطفی عسگرزاده معرفی شد [۵۴]. ایشان مجموعه فازی را به صورت دسته‌ای از اشیا که به هر عضو آن یک درجه عضویت نسبت داده می‌شود، معرفی نمودند. پس از آن مفهوم عدد فازی در سال ۱۹۷۸ توسط دوبوآ[۱] و پرید[۲] ارائه شد و اعمالی چون جمع و ضرب روی اعداد فازی مورد بررسی قرار گرفت [۲۴]. گوسچل[۳] و وکسمن[۴] در سال ۱۹۸۳ در تعریف پیشین عدد فازی، تغییرات جزئی اعمال کردند و یک متر برای این خانواده از مجموعه‌های فازی تعریف نمودند [۲۷]. پس از آن در چندین مقاله، حساب دیفرانسیل فازی به صورت مقدماتی بررسی شد [۲۸، ۲۵].

یک روش طبیعی برای مدل‌بندی سیستم‌های دینامیکی تحت فرض‌های مبهم و نامطمئن، معادلات دیفرانسیل فازی است. همچنین در مدل‌بندی پدیده‌های دنیای واقعی، مسائل مقدار اولیه فازی به طور طبیعی و ذاتی، نه به صورت مدل فازی شده از یک مسئله کلاسیک، نمایان می‌شوند [۲۲].

در بررسی معادلات دیفرانسیل فازی، چندین دیدگاه وجود دارد. اولین دیدگاه بر اساس مشتق هوکوهارا[۵] پایه‌گذاری شده است [۲۹]. در این دیدگاه، معادلات دیفرانسیل فازی برای اولین بار توسط کالوا[۶] در سال ۱۹۸۷ بررسی شد [۳۱]. در این مقاله نویسنده ابتدا به مفهوم انتگرال توابع فازی و خاصیت‌هایی

[۱] Dubois

[۲] Prade

[۳] Goetschel

[۴] Voxman

[۵] Hukuhara

[۶] Kaleva

از آن پرداخته است و سپس وجود و یکتایی جواب مسئله‌ی مقدار اولیه فازی

$$x'(t) = G(t, x(t)), \qquad x(0) = X_0 \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}},$$

را با این شرط که G پیوسته لیپ‌شیتز باشد، ثابت نموده است،که در آن $G : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ و مشتق ظاهر شده در مسئله به صورت H-مشتق تعبیر می‌شود. در دهه اخیر کارهای زیادی توسط چندین نویسنده در این راستا در زمینه تئوری و کاربردی انجام شده است و معادلات دیفرانسیل فازی در مقالاتی چون [۴۶, ۳۲, ۵۰, ۲۳, ۵۱] بررسی شده‌اند که در آنها به جنبه‌های مختلف معادلات دیفرانسیل فازی پرداخته شده است.

یکی از معایب تعبیر معادلات دیفرانسیل فازی بر اساس H-مشتق این است که طول تکیه‌گاه جواب معادله دیفرانسیل فازی نسبت به زمان صعودی است [۳۰, ۲۱, ۱۳]. این مشکل باعث می‌شود که این تعبیر از معادلات دیفرانسیل فازی، یک تعمیم مناسب برای نوع کلاسیک نباشد و فرمول‌بندی پیشین از معادلات دیفرانسیل فازی، معرف رفتار غنی و متنوعی از معادلات دیفرانسیل کلاسیک نباشد.

لذا دومین دیدگاه بررسی معادلات دیفرانسیل فازی پدیدار می‌شود. هولرمیر [۷] در سال ۱۹۹۷ فرمول‌بندی متفاوتی از معادلات دیفرانسیل فازی را پیشنهاد می‌کند که روی خانواده‌ی شمول‌های دیفرانسیل در هر α-برش، $0 \leq \alpha \leq 1$، پایه‌گذاری شده است [۳۰].

با تکیه بر این دیدگاه و رفع مشکلات دیدگاه قبلی، راه برای تحقیقاتی چون پایداری و متناوب بودن جواب‌های معادلات دیفرانسیل فازی باز می‌شود [۲۱, ۲۲]. اما این دیدگاه نیز دارای معایبی است که مهم‌ترین این معایب این است که درباره‌ی مشتق توابع فازی نمی‌توان صحبت کرد چون یک معادله دیفرانسیل فازی به طور مستقیم با کمک شمول‌های دیفرانسیل، بدون داشتن مشتق تعبیر می‌شود و بنابراین بدست آوردن جواب‌های عددی معادلات دیفرانسیل فازی کاری مشکل خواهد بود.

دیدگاه دیگری نیز وجود دارد که در آن از اصل تعمیم زاده[۸] به منظور تعمیم معادلات دیفرانسیل کلاسیک به نوع فازی استفاده می‌شود [۱۷، ۱۶]. در این روش که توسط بوکلی[۹] و فیورینگ[۱۰] بیان شده است،

[۷] Hullermeier

[۸] Zadeh

[۹] Buckley

[۱۰] Feuring

جواب معادلات دیفرانسیل کلاسیک با استفاده از اصل تعمیم زاده به جواب معادلات دیفرانسیل فازی تعمیم داده می‌شود. این دیدگاه نیز معایبی یکسان با دیدگاه قبلی، یعنی عدم وجود تعبیر مشتق‌پذیری جواب را دارد.
در این راستا دیدگاه چهارمی پدیدار می‌شود که در آن بده[۱۱] و گال[۱۲] در سال ۲۰۰۵ مفهوم مشتق تعمیم‌یافته را معرفی و بررسی کرده‌اند [۱۱]. در حقیقت این مفهوم در راستای تعمیم H-مشتق ظاهر شده است و معایب ذکر شده در بالا را برطرف می‌کند. با توجه به این دیدگاه، معادلات دیفرانسیل فازی می‌توانند جواب‌هایی داشته باشند که طول تکیه‌گاه جواب‌هایشان نسبت به زمان نزولی باشد که این خاصیت مهمی در انعکاس رفتار غنی جواب‌های معادلات دیفرانسیل کلاسیک است و جواب‌های مشابه با نوع کلاسیک می‌توانند خاصیت مجانبی داشته باشند. بده و همکارانش در سال ۲۰۰۷ تحت این مشتق‌پذیری، معادلات دیفرانسیل فازی خطی مرتبه اول را بررسی نموده‌اند [۱۲]. نویسنده این مقاله بیان کرده است که در ابتدا به نظر می‌رسد یکی از معایب مشتق‌پذیری تعمیم‌یافته یک تابع نسبت به H-مشتق این باشد که جواب معادله دیفرانسیل فازی یکتا نیست که این پدیده در مقالات [۱۲، ۱۱] ظاهر شده است. پس معادله دیفرانسیل ممکن است چندین جواب داشته باشد اما همانطورکه در [۱۳] بیان شده است، حتی تحت H-مشتق‌پذیری هم یکتایی نتیجه نمی‌شود. مزیت وجود چنین جواب‌هایی این است که می‌توان جوابی را انتخاب کرد که انعکاس بهتری از رفتار سیستم جهان واقعی را معرفی کند که به صورت معادله دیفرانسیل فازی مدل‌بندی شده است.
به دلیل متنوع بودن دیدگاه‌ها است که معادلات دیفرانسیل فازی موضوع جالبی برای تحقیقات به شمار می‌آید. با نگاهی عمیق به این دیدگاه‌ها، در چندین مقاله جواب‌های جدیدی از معادلات دیفرانسیل فازی خطی و غیرخطی مرتبه اول و بالاتر و مسائل مقدار مرزی فازی معرفی شده‌اند [؟].
دیدگاه ما در این رساله، بر اساس تعبیر جدیدی از جواب‌های معادلات دیفرانسیل فازی بنا نهاده شده است. در این تعبیر، جواب‌ها نوع متفاوتی از مشتق‌پذیری تعمیم‌یافته را روی زیربازه‌های افراز $[a,b]$ دارند. این جواب‌ها را جواب‌های مرکب نام نهاده‌ایم. این جواب‌ها به گونه‌ای هستند که در نقاطی که نوع مشتق تغییر می‌کند یا به عبارتی در نقاط تقاطع، تابع همواری خود را حفظ می‌کند. این مفهوم علاوه

[۱۱] Bede

[۱۲] Gal

بر اینکه تعمیمی از نتایج پیشین است، بلکه طول تکیه‌گاه جواب در بعضی از زیربازه‌ها نسبت به زمان صعودی و در بعضی دیگر نزولی است که ممکن است در مسایل کاربردی با آن‌ها روبرو شویم. اعتقاد ما بر این است که وجود مجموعه‌ی بزرگتری از جواب‌ها نه تنها یک عیب محسوب نمی‌شود بلکه از بین این جواب‌ها، می‌توان جوابی را انتخاب کرد که خاصیت‌های فیزیکی سیستم‌های تحت بررسی را به صورت بهتری انعکاس دهد.

قضیه وجودی برای معادله‌ی انتگرال فازی غیرخطی از نوع ولترا با استفاده از قضیه نگاشت انقباض در سال ۱۹۹۶ ثابت شد [۴۹]. سانگ[۱۳]، لیو[۱۴] و سو[۱۵] با استفاده از قضیه نقطه ثابت در فضای توابع پیوسته فازی، وجود جواب معادله‌ی انتگرال فازی ولترا را در سال ۱۹۹۹ ثابت نمودند [۴۸]. در این مقاله نویسندگان از قضیه جانشانی رادسترم[۱۶] در اثبات قضیه‌ها استفاده نموده‌اند.

در همان سال وجود و یکتایی جواب معادله انتگرال فازی ولترا و معادله انتگرال فازی فردهلم با استفاده از روش تکرارهای متوالی توسط پارک[۱۷] و جونگ[۱۸] ثابت شد [۳۹]. نویسندگان این مقاله یک سال بعد، وجود و یکتایی معادله انتگرال ولترا-فردهلم فازی را با استفاده از روش تکرارهای متوالی ثابت نمودند [۴۰]. آگارول[۱۹]، رگان[۲۰] و لکش‌میکنتام[۲۱] وجود جواب برای معادله انتگرال فازی از نوع ولترا را در سال ۲۰۰۴ به صورت خانواده‌ای از شمول‌های انتگرال بررسی نمودند [۶].

وجود و یکتایی جواب فازی به صورت موضعی برای معادلات انتگرال دیفرانسیل فازی غیرخطی به

[۱۳] Song

[۱۴] Liu

[۱۵] Xu

[۱۶] *Rådström*

[۱۷] Park

[۱۸] Jeong

[۱۹] Agarwal

[۲۰] O'regan

[۲۱] Lakshmikantham

شکل

$$\begin{aligned} x'(t) &= a(t)x(t) + \int_{\circ}^{t} k(t,s,x(s))ds + f(t,x(t)), \qquad t \in J = [\circ, T], \\ x(\circ) &= x_{\circ}, \qquad x_{\circ} \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}, \end{aligned}$$

در سال ۲۰۰۱ با کمک قضیه نقطه ثابت باناخ بررسی شد که در آن $a : J \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ ، $f : J \times \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ و $k : J \times J \times \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ توابعی پیوسته‌اند و f، k پیوسته لیپ‌شیتز در آخرین مولفه‌شان هستند [۹]. در این مقاله با به‌کارگیری روابط فازی نادرست، قضیه‌ها به صورت نادرست ثابت شده‌اند. همچنین نویسندگان این مقاله در سال ۲۰۰۴ در مورد وجود و یکتایی جواب موضعی معادلات انتگرال دیفرانسیل فازی با شرایط اولیه غیرموضعی صحبت نموده‌اند که اشکالاتی مشابه قبلی بر آن نیز وارد است [۱۰].

در این رساله، تحت تعبیر جدید از جواب‌ها، جواب‌های مرکب، به بررسی معادلات انتگرال دیفرانسیل فازی غیرخطی از نوع ولترا برای مرتبه‌های اول و دوم پرداخته می‌شود و قضیه‌های وجود و یکتایی این نوع جواب‌ها، برای مسئله‌ی مقدار اولیه‌ی فازی متناظر، بیان می‌شود. قضیه نقطه ثابت و روش تکرارهای متوالی، ابزاری هستند که در اینجا استفاده خواهند شد.

حساب دیفرانسیل و انتگرال مرتبه کسری دارای قدمتی به اندازه‌ی محاسبات کلاسیک، یعنی مشتق و انتگرال مراتب صحیح می‌باشد. اما اهمیت و توجه به آن در دهه‌های اخیر بیشتر شده است. مطالعات اولیه در این زمینه به اواخر قرن ۱۷ باز می‌گردد. اولین مطالعات کم و بیش هدفمند و منظم، در قرن نوزدهم توسط لیوویل[۲۲]، ریمان[۲۳] و هولمگرن[۲۴] انجام شد. اگرچه قبل از آن دانشمندان زیادی همچون اویلر[۲۵]، آبل[۲۶]، لاپلاس[۲۷] و فوریه[۲۸] تلاش‌های زیادی را برای توسعه‌ی این علم انجام دادند. بعدها

[۲۲] Liouville

[۲۳] Riemann

[۲۴] Holmgren

[۲۵] Euler

[۲۶] Abel

[۲۷] Laplace

[۲۸] Fourier

گلفاند[۲۹]، شیلوف[۳۰] و بابنکو[۳۱] رسالاتی را در زمینه‌ی کاربرد حساب و دیفرانسیل مراتب کسری به رشته تحریر درآوردند.

نظریه معادلات دیفرانسیل کسری شامل عملگر دیفرانسیل ریمان-لیوویل از مرتبه $0 < q < 1$، در چند سال اخیر توجهات زیادی را به دلیل خواص فیزیکی وکاربردهای منحصربه‌فردش، به‌خود جلب کرده است [۴۱، ۳۴] . بنابراین به نظر می‌رسد که این نظریه استحقاق مطالعه‌ی مستقل موازی با مطالعات انجام شده در زمینه نظریه معادلات دیفرانسیل معمولی را داشته باشد.
در سال‌های اخیر، افراد زیادی روی نتایج وجود جواب مسئله مقدار اولیه برای معادلات دیفرانسیل کسری تمرکز نموده‌اند [۳۴، ۴۷، ۱۴، ۲۰]. به هر حال، تا جایی‌که می‌دانیم، اگرچه تا به حال نتایج مختلفی برای معادلات دیفرانسیل و انتگرال دیفرانسیل فازی به‌دست آمده‌است [۱، ۴۵، ۳۳]، اما نتایج برای معادلات دیفرانسیل کسری فازی به‌ندرت دیده می‌شود [۵، ۴، ۷، ۸].
بخشی از این رساله به بررسی نتایج وجود ویکتایی جواب برای معادلات انتگرال دیفرانسیل کسری فازی، با استفاده از روش جواب‌های بالایی و پایینی اختصاص داده شده است. اهمیت این تحقیقات در این است که تعریف جواب‌های بالایی و پایینی و در نتیجه، روش ارائه شده، متفاوت از کارهای پیشین است که در آنها از این روش استفاده می‌شود. تعریف‌های جدید ما را قادر می‌سازند تا بتوان قضیه‌های وجود و یکتایی برای معادلات انتگرال کسری فازی را تحت شرایط ضعیف‌تر بررسی نماییم. ایده‌ی این رساله بدین صورت است که اگر بتوانیم یک جواب پایینی مانند $\underline{u}$ و یک جواب بالایی مانند $\overline{u}$ از معادله‌ی انتگرال کسری فازی را بیابیم به‌طوری‌که $\underline{u} \leq \overline{u}$، آنگاه جوابی مانند u از معادله‌ی مذکور موجود است که در رابطه‌ی زیر صدق می‌کند:

$$\underline{u} \leq u \leq \overline{u}.$$

در بخش دیگر این رساله، روش ارائه شده‌ی پیشین، برای اثبات وجود جواب مسئله‌ی مقدار اولیه‌ی فازی برای معادلات انتگرال دیفرانسیل کسری فازی به‌کار برده‌می‌شود که شامل مشتقات ریمان-لیویل هستند.

[۲۹] Gelfand

[۳۰] Shilov

[۳۱] Babenko

رفتار دینامیکی از پدیده‌های فیزیکی به طور معمول به صورت معادلات دیفرانسیل مدل‌بندی می‌شوند اما اگر حالت‌هایی از سیستم فیزیکی موجود باشند که در روش‌های مختلفی مقید شده باشند به عنوان مثال بوسیله قانون‌های بقا در شبکه‌های الکتریکی، آنگاه مدل ریاضی چنین پدیده‌ای شامل معادلات جبری خواهد بود تا تعبیری برای این قیود باشد. چنین سیستم‌هایی که شامل هم معادلات جبری و هم معادلات دیفرانسیل می‌باشند، دستگاه دیفرانسیل-جبری نامیده می‌شوند. مدل‌بندی با معادلات دیفرانسیل-جبری نقش مهمی را برای سیستم‌های مکانیکی مقید، سیستم‌های معادلات دیفرانسیل جزئی بازی می‌کند [۱۵]. خاصیت کلی دستگاه دیفرانسیل-جبری خطی مانند فرم کانونی، وجود و یکتایی در مقالاتی چون [۱۹] و [۳۵] بحث شده‌اند. از طرف دیگر، لازم است داده‌های مبهم را در مدل‌بندی بعضی از سیستم‌های دینامیکی، به حساب آوریم که این منجر به دستگاه دیفرانسیل-جبری فازی می‌شود. در فصل آخر این رساله، برای اولین بار مسئله‌ی مقدار اولیه‌ی معادلات دیفرانسیل-جبری فازی خطی معرفی می‌شود و قضیه وجودی و یک روش حل این مسئله ارائه می‌شود.

از این رساله سه مقاله با عناوین زیر، استخراج شده است:

1. R. Alikhani, F. Bahrami, A. Jabbari, *Existence of global solutions to nonlinear fuzzy Volterra integro-differential equations,* Nonlinear Analysis, **75** (2012) 1810-1821.

2. R. Alikhani, F. Bahrami, *Global solutions for nonlinear fuzzy fractional integral and integrodifferential equations,* Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, **18** (2013) 2007–2017.

3. R. Alikhani, F. Bahrami, T.G. Bhaskar *Linear Differential-Algebraic Equations with Uncertainties,* Fuzzy Sets and Systems, (Revised Paper).

فصل ۱

مفاهیم مقدماتی

۱.۱ مقدمه

فصل نخست رساله، به بیان مفاهیم پایه و مورد نیاز در فصلهای آتی اختصاص داده می‌شود. بنابراین در این فصل به بیان تعریف‌ها و قضیه‌های مورد نیاز از نظریه معادلات دیفرانسیل معمولی و کسری پرداخته می‌شود . مفاهیم و قضیه‌های اولیه بدون اثبات بیان خواهند شد، چرا که هدف یادآوری مفاهیمی است که در فصل‌های بعدی به آنها نیاز خواهیم داشت. مطالب این فصل بر اساس مراجع [۱۵، ۳۴، ۳۵، ۳۷، ۳۶، ۲۰، ۵۳] نوشته شده است.

۲.۱ قضیه‌هایی از آنالیز

در این بخش، به بیان چند لم از آنالیز خواهیم پرداخت که در اثبات قضیه‌های وجود ویکتایی جواب در فصل‌های سوم و چهارم نقش اساسی دارند.

لم ۱.۲.۱. *[۳۷](قضیه اشلی) فرض کنید X یک فضای متری فشرده و Y یک فضای متری باشد. یک زیرمجموعه $\mathcal{F}$ از $C(X,Y)$ دارای بستار فشرده است اگر و تنها اگر هم‌پیوسته باشد و برای هر $x \in X$، زیرمجموعه $\mathcal{F}_x = \{f(x) |\ f \in \mathcal{F}\}$ از Y به طور یکنواخت کران‌دار باشد.*

لم ۲.۲.۱. *[۳۷](قضیه نقطه ثابت شوادر) فرض کنید A یک زیرمجموعه کراندار، بسته و محدب از یک فضای باناخ V باشد و فرض کنید $T : A \to A$ یک نگاشت پیوسته باشد به‌طوریکه $T(A)$ به‌طور نسبی فشرده در V است. بنابراین T حداقل یک نقطه ثابت در A دارد.*

لم ۳.۲.۱. *[۳۶](نامساوی گرونوال) اگر r تابعی پیوسته و نامنفی روی بازه $J = [a, b] \subset \mathbb{R}$ باشد و δ، κ اعداد ثابت نامنفی باشند به‌طوری‌که*

$$r(t) \leq \delta + \int_a^t \kappa r(s) ds, \quad \forall t \in J,$$

آنگاه داریم

$$r(t) \leq \delta \exp[\kappa(t-a)], \quad \forall t \in J.$$

لم ۴.۲.۱. *[۵۳](نامساوی گرونوال تعمیم‌یافته) فرض کنید $J = (0, b] \subset \mathbb{R}$. فرض کنید توابع نامنفی $\beta(t) > 0$، $\delta(t)$ روی $\bar{J}$ به طور موضعی انتگرال‌پذیر باشند و $\kappa(t)$ تابع نامنفی، غیرنزولی و پیوسته روی $\bar{J}$، $\kappa(t) \leq M$ که در M عددی ثابت است و فرض کنید تابع نامنفی $r(t)$ به طور موضعی انتگرال‌پذیر روی J باشد به طوری‌که*

$$r(t) \leq \delta(t) + \kappa(t) \int_0^t (t-s)^{\beta-1} r(s) ds, \quad \forall t \in J,$$

آنگاه

$$r(t) \leq \delta(t) + \int_0^b \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\kappa(t)\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(n\beta)} (t-s)^{n\beta-1} \delta(s) \right] ds, \quad \forall t \in J.$$

۳.۱ توابع ویژه از حساب کسری

در این بخش، چند تابع ویژه معرفی می‌شوند که در مشتقات کسری و معادلات دیفرانسیل کسری نقش مهمی ایفا می‌کنند.
یکی از توابع اساسی از حساب کسری تابع گاما است که تعمیمی از تابع فاکتوریل $(n!)$ است که در آن n می‌تواند عدد غیر صحیح و مختلط نیز باشد.

تعریف ۱.۳.۱ (تابع گاما). تابع گاما $\Gamma(z)$ به شکل

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt,$$

تعریف می‌شود که در نیمه راست صفحه‌ی اعداد مختلط، $Re(z) > 0$، همگرا است.

تعریف ۲.۳.۱ (نمایش حدی تابع گاما). تابع گاما را می‌توان به صورت حد
$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^z}{z(z+1)...(z+n)},$$
نیز نمایش داد که در آن $Re(z) > 0$.

گزاره ۳.۳.۱ (خواصی از تابع گاما).

۱) $\Gamma(1) = 1$

۲) $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

۳) $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$

۴) $\Gamma(n+1) = n!$

۵) $\Gamma(z)\Gamma(z+1) = \frac{\pi}{sin\pi z}$

۶) $\Gamma(z) = \frac{z+n}{(z)_n}, \quad Re(z) > -n, n \in \mathbb{N}, \quad z \notin \{0, -1, -2, ...\}$

که در آن
$$(z)_0 = 1, \quad (z)_n = z(z+1)...(z+n-1), \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

در بسیاری از موارد، به جای ترکیب معینی از مقادیر تابع گاما بهتر است از تابع بتا تعریف شده به صورت زیر استفاده کنیم.

تعریف ۴.۳.۱ (تابع بتا).
$$B(z,w) = \int_0^1 \tau^{z-1}(1-\tau)^{w-1}d\tau, \quad (Re(z) > 0, \quad Re(w) > 0).$$

گزاره ۵.۳.۱ (خواصی از تابع بتا).

۱) $B(z,w) = B(w,z)$

۲) $B(z,w) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2z-1}\theta \cos^{2w-1}\theta d\theta$

۳) $B(z,w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}$

۴) $B(z,z) = 2^{1-2z}B(z,\frac{1}{2})$.

تابع نمایی که نقش مهمی در نظریه‌ی معادلات دیفرانسیل معمولی دارد، توسط دانشمندی به نام میتاگ-لفلر [1] به صورت یک پارامتری تعمیم داده شده است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

تعریف ۶.۳.۱ (تابع میتاگ-لفلر یک پارامتری).

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad \alpha > 0.$$

تابع میتاگ-لفلر دو پارامتری که نقش مهمی در حساب دیفرانسیل مرتبه کسری دارد، به صورت زیر تعریف می‌شود:

تعریف ۷.۳.۱ (تابع میتاگ-لفلر دو پارامتری).

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \alpha, \beta > 0.$$

گزاره ۸.۳.۱ (حالت‌های خاصی از تابع میتاگ-لفلر).

۱) $E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = e^z$

۲) $E_{1,2}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+2)} = \frac{e^z - 1}{z}$

۳) $E_{2,1}(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \cosh(z)$

۴) $E_{2,2}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+2)} = \frac{\sinh(z)}{z}$.

۴.۱ مشتقات و انتگرال‌های کسری

حساب کسری، نامی برای نظریه‌ی انتگرال ومشتق از مرتبه دلخواه است که یک مفهوم تعمیم داده شده و یکسان‌سازی شده از مشتقات مرتبه صحیح و انتگرال‌های n گانه است. دنباله‌ی نامتناهی از انتگرال‌های n گانه و مشتقات مرتبه nام را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\ldots, \int_a^t d\tau_2 \int_a^{\tau_2} f(\tau_1)d\tau_1, \int_a^t f(\tau_1)d\tau_1, f(t), \frac{df(t)}{dt}, \frac{d^2 f(t)}{dt^2}, \ldots$$

[1] Mittag-Leffler

مشتق مرتبه‌ی حقیقی دلخواه را می‌توان به صورت درونیابی از این دنباله از عملگرها در نظر گرفت که برای آن از نماد ${}_aD_t^{\alpha}f(t)$ استفاده می‌شود. مشتقات مرتبه‌ی حقیقی به اختصار به مشتقات کسری معروف هستند و کلمه‌ی انتگرال کسری به معنی انتگرال از مرتبه‌ی دلخواه و متناظر با مقادیر منفی α است. انتگرال کسری از مرتبه‌ی $\beta > ۰$ به صورت ${}_aD_t^{-\beta}f(t)$ نشان داده می‌شود. انتگرال مرتبه کسری را با نمادهای ${}_aI_t^{\beta}f(t)$ و ${}_aJ_t^{\beta}f(t)$ نیز نمایش می‌دهند.

۱.۴.۱ یکسان سازی مشتقات و انتگرال‌های مرتبه‌ی صحیح

برای تعریف مشتقات و انتگرال‌های کسری، در این بخش ابتدا به یکسان‌سازی دو مفهوم مشتق مرتبه‌ی صحیح n و انتگرال n-گانه می‌پردازیم که معمولاً در آنالیز کلاسیک به صورت جداگانه معرفی می‌شوند.

تابع پیوسته‌ی f را در نظر بگیرید. با استقرا می‌توان ثابت کرد که مشتق مرتبه‌ی $n \in \mathbb{N}$ به صورت

$$f^{(n)}(t) = \lim_{h\to ۰}\frac{۱}{h^n}\sum_{r=۰}^{n}(-۱)^r \begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} f(t-rh),$$

است که در آن

$$\begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} = \frac{n(n-۱)(n-۲)...(n-r+۱)}{r!}.$$

حال برای مقدار دلخواه $p \in \mathbb{N}$، کسر زیر را در نظر می‌گیریم:

$$f_h^{(p)}(t) = \frac{۱}{h^p}\sum_{r=۰}^{n}(-۱)^r \begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix} f(t-rh). \qquad (۱.۱)$$

به ازای $p \geq n$ داریم:

$$\lim_{h\to ۰} f_h^{(p)}(t) = f^{(p)}(t) = \frac{d^p f}{dt^p},$$