دانشگاه مراغه
دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی

پایان‌نامه:

برای دریافت درجه ی کارشناسی ارشد در رشته ی ریاضی، گرایش آنالیز ریاضی

عنوان:

پایداری دنباله های قاب تحت آشفتگی ها

استاد راهنما:
دکتر اصغر رحیمی

استاد مشاور:
دکتر بیاض دارابی

پـژوهشگر:
زهرا صمدزاده

مرداد ماه ۱۳۹۰

تقدیم به:

پدر عزیزم و مادر مهربانم

خدایا...

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مُردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آنچنان که تو دوست می‌داری.
تو می‌دانی و همه می‌دانند که شکنجه دیدن بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگی من است، از شادی توست که من در دل می‌خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته‌ام می‌درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه‌هایم احساس می‌کنم. نمی‌توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله‌های ضعیف و افتاده، پنهان کرده‌ام دریاب، دریاب.
تو می‌دانی و همه می‌دانند که زندگی از تحمیل لبخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از برانگیختن موج شعفی در دل من، عاجز است.
تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت.

اگر تنهاترین تنها شوم، باز خدا هست

او جانشین همه نداشتن هاست...

سپاس گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.
در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر اصغر رحیمی، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی رسید.
همچنین ازکلیه اساتید دوران تحصیلم، به ویژه آقای دکتر بیاض دارابی که زحمت مطالعه و مشاوره این رساله را تقبل فرمودند، کمال امتنان را دارم.
در خاتمه، تشکر می کنم از پدر عزیزم و مادر مهربانم که با حمایت و محبت بی دریغ شان، در تمام دوران زندگی و تحصیلم، پشتیبان این حقیر بودند و این تحفه ی ناچیز را تقدیم به وجود مقدس شان می دارم.

زهرا صمدزاده

مرداد ماه ۱۳۹۰

نام خانوادگی: صمدزاده نام: زهرا

عنوان پایان‌نامه: پایداری دنباله های قاب تحت آشفتگی

استاد راهنما: دکتر اصغر رحیمی
استاد مشاور: دکتر بیاض دارابی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی محض
گرایش: آنالیز ریاضی

دانشگاه: مراغه دانشکده: علوم پایه
تاریخ فارغ‌التحصیلی: تابستان ۱۳۹۰ تعداد صفحه: ۹۱

کلیدواژه‌ها: زاویه‌ی بین زیرفضاها، قاب، مازاد قاب، کسری قاب، تابع اندازه‌ی قاب، دنباله‌های موضعی، آشفتگی، آشفتگی پالی-واینر، قاب‌های گابور، موجک

چکیده
این پایان نامه روابط دقیقی که قضیه آشفتگی پالی-واینر برای دنباله‌های قاب بیان کرده، مورد بررسی قرار می دهد. همچنین نشان می دهد که ویژگی‌های اصلی دنباله‌های قاب از قبیل: مازاد، کسری و رتبه، تحت آشفتگی پالی-واینر تغییر نمی‌کند. ولی این ویژگی‌ها تحت آشفتگی فشرده لزوماً پایدار نیستند. همچنین نشان داده می‌شود که تابع اندازه قاب، مربوط به قاب‌های موضعی تحت آشفتگی پالی-واینر ثابت می‌ماند و تغییری نمی‌کند.

فهرست مطالب

مقدمه

قابها نخستین بار در سال ۱۹۵۲ توسط دافین [۱] و شیفر [۲] در مطالعه‌ی مسائلی از آنالیز غیرهارمونیک مطرح شدند. آنها قاب‌ها را به عنوان ابزاری برای مطالعه‌ی سری‌های فوریه غیرهارمونیک یعنی دنباله‌ای به شکل $\{e^{i\lambda_n x}\}_{n\in\mathbb{Z}}$، که $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ خانواده‌ای از اعداد حقیقی یا مختلط است، استفاده می کردند.

در سال ۱۹۸۰، یانگ [۳] کتابش را که شامل مطالب اساسی در مورد قاب‌ها بود، نوشت. در سال ۱۹۸۶، قاب‌ها توسط دابوشی [۴]، گراسمان [۵] و مایر [۶] مجدداً معرفی و گسترش یافتند. آن‌ها قاب‌هایی را مشاهده کردند که می توانند برای پیدا کردن بسط سری‌های توابع در $L^2(\mathbb{R})$ مورد استفاده قرار گیرند به طوری که مشابه بسط مورد استفاده‌ی پایه های متعامد یکه می باشند.

قاب‌ها در پردازش سیگنال‌ها، تراکم اطلاعات و نظریه‌ی نمونه‌برداری، سیستم مدل‌سازی، اندازه‌گیری کوانتوم، پردازش تصویر، کدگذاری و ارتباطات مورد استفاده قرار می گیرد.

در ایران، به ویژه در سالهای اخیر مطالعاتی در زمینه‌ی قاب‌ها انجام گرفته که از آن جمله می‌توان به کارهای جناب آقای دکتر کامیابی (دانشگاه فردوسی مشهد) آقای دکتر رجبعلی‌پور (دانشگاه شهید باهنر کرمان)، آقای دکتر دهقان (دانشگاه ولیعصر رفسنجان)، آقای دکتر فاروقی- آقای دکتر نژاددهقان (دانشگاه تبریز)، آقای دکتر نجاتی- آقای دکتر نریمانی (دانشگاه محقق اردبیلی)و جناب آقای دکتر رحیمی در دانشگاه مرا غه اشاره نمود.

---

[۱] Duffin
[۲] Schaeffer
[۳] Young
[۴] Daubechies
[۵] Grassmanian
[۶] Meyer

فصل ۱

پیشینه ی پژوهش، تعاریف و قضایای مقدماتی

در این فصل تعاریف و قضایای مقدماتی و همچنین برخی از نمادهایی که در سه فصل آتی مورد نیاز است را معرفی می کنیم. این فصل شامل شش بخش است که در بخش اول به معرفی قاب [۱] و عملگرهای مربوط به آن، در بخش دوم شکاف بین زیرفضاها [۲] ،در بخش سوم به معرفی عملگر شبه وارون [۳] و در بخش چهارم به کمترین و بیشترین زاویه‌ی بین زیر فضاها و در بخش پنجم به معرفی پایه‌های ریس می‌پردازیم. در بخش آخر نیز مثالی درمورد قاب‌ها آورده می شود .

۱.۱ قاب و عملگرهای مربوط به آن

در این بخش پس از آشنایی با فضای هیلبرت ، به معرفی قاب‌ها و عملگرهای مربوط به آن می‌پردازیم و در ادامه قضایا و لم های مقدماتی مربوط به قاب‌ها را می آوریم.

تعریف ۱.۱.۱. فضای برداری $\mathcal{X}$ را در نظر گرفته و نرم زیر را به ازای هر $x \in \mathcal{X}$ تعریف می کنیم:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}\ .$$

اگر فضای برداری $\mathcal{X}$ با این نرم به یک فضای باناخ تبدیل شود، در این صورت $\mathcal{X}$ را فضای هیلبرت می‌نامیم. فضای هیلبرت را با $\mathcal{H}$ نمایش می‌دهیم. دنباله $\{e_k\}_{k\in I}$ را یک پایه‌ی متعامد یکه برای $\mathcal{H}$ می‌نامیم، اگر در شرایط زیر صدق کند:

الف) $\mathcal{H} = span\{e_k\}_{k\in I}$؛

[۱] Frame
[۲] Gap
[۳] Pseudp-invers

ب) به ازای هر $k, j \in I$ ، $\langle e_j, e_k\rangle = \delta_{j,k}$.

$\delta_{j,k}$ را دلتای کرونر می‌نامند که اگر $j = k$ باشد، دلتای کرونر برابر یک و در غیر این صورت، برابر صفر خواهد بود.

تعریف ۲.۱.۱. یک خانواده شمارش پذیر از اعضای $\{f_k\}_{k\in I}$ رایک قاب برای فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ می نامیم اگر ثابتهای $A, B > ۰$ وجود داشته باشند به طوری که به ازای هر $f \in \mathcal{H}$ داشته باشیم:

$$A\|f\|^۲ \leq \sum_{k\in I} \mid \langle f, f_k\rangle \mid^۲ \leq B\|f\|^۲ \ .$$

A را کران پائین و B را کران بالای قاب می نامیم. بزرگ ترین کران پائین و کوچکترین کران بالا را که در نامساوی اخیر صدق می کنند، به ترتیب کران پائین بهین و کران بالای بهین قاب می گوئیم. به عبارتی دیگر کران های بهین [۷] عبارت اند از:

$$A = \inf_{\|f\|=۱} \sum_{k\in I} \mid \langle f, f_k\rangle \mid^۲ \quad , \quad B = \sup_{\|f\|=۱} \sum_{k\in I} \mid \langle f, f_k\rangle \mid^۲ \ .$$

دنباله ی $\{f_k\}_{k\in I}$ یک قاب تنگ [۴] است اگر $A = B$ و یک قاب نرمال است اگر برای هر $k \in I$:

$$\|f_k\| = ۱ \ .$$

تعریف ۳.۱.۱. دنباله $\{f_k\}_{k\in I}$ را در $\mathcal{H}$ ، دنباله ی بسل [۵] می گوئیم اگر ثابت $B > ۰$ ای وجود داشته باشد، طوری که:

$$\sum_{k\in I} \mid \langle f, f_k\rangle \mid^۲ \leqslant B\|f\|^۲ \ .$$

ثابت B را کران بسل می نامند.

تعریف ۴.۱.۱. اگر دنباله ی $\{f_k\}_{k\in I}$ یک قاب برای فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد و عملگر T را به این صورت تعریف کنیم:

$$T : l^۲(I) \longrightarrow \mathcal{H}; \qquad T\{c_k\}_{k\in I} = \sum_{k\in I} c_k f_k \ ;$$

که عملگری کراندار است [۸] را عملگر پیش قاب یا عملگر ترکیبی [۶] مربوط به دنباله ی $\{f_k\}_{k\in I}$ می نامند. عملگر الحاقی T^* رانیز عملگر تحلیلی [۷] می نامند که به صورت زیر تعریف می شود.

$$T^* : \mathcal{H} \longrightarrow l^۲(I); \qquad T^* f = \{\langle f, f_k\rangle\}_{k=۱}^{\infty} \ .$$

[۴] Tight frame
[۵] Bessel sequence
[۶] Pre- frame operator or synthesis operator
[۷] Analysis operator

با ترکیب دو عملگر T, T^* داریم:

$$S : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}; \qquad Sf = TT^*f = \sum_{k\in I} \langle f, f_k\rangle f_k \ ;$$

S را عملگر قاب [8] مربوط به دنباله ی $\{f_k\}_{k\in I}$ می نامیم.

قضیه ۱.۱.۵. *اگر $B(\mathcal{H})$ مجموعه ی همه ی عملگرهای خطی و کراندار روی $\mathcal{H}$ باشد و $U_1, U_2 \in B(\mathcal{H})$. در این صورت $U_1 \le U_2$ ، اگر و تنها اگر:*

$$\langle U_1 x, x\rangle \le \langle U_2 x, x\rangle; \quad x \in \mathcal{H}.$$

تعریف ۱.۱.۶. به ازای هر نگاشت $f : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ از فضای هیلبرت $\mathcal{H}$، محمل [9] f را به این صورت تعریف می کنیم:

$$Suppf = \overline{\{x \in \mathcal{H}; \quad f(x) \neq 0\}}.$$

تعریف ۱.۱.۷. اگر $\mathcal{E}$ زیر مجموعه ای از فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد، تابع مشخصه $X_{\mathcal{E}}$ را به این صورت تعریف می کنیم:

$$\chi_{\mathcal{E}}(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathcal{E} \\ 0 & x \notin \mathcal{E} \end{cases}$$

تعریف ۱.۱.۸. به ازای هر $f \in L^1(\mathbb{R})$، تبدیل فوریه ی $\hat{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$\hat{f}(\gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x\gamma} dx; \quad \gamma \in \mathbb{R} \ .$$

تبدیل فوریه ی تابع f را به طور معمول با $\mathcal{F}f$ نمایش می دهیم. همچنین به ازای هر $f \in L^1(\mathbb{R})$، داریم $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$، که این تساوی به اتحاد پلانشرال [10] معروف است.

در ادامه به چند قضیه مقدماتی در مورد قاب ها اشاره می کنیم:

قضیه ۱.۱.۹. *فرض می کنیم دنباله $\{f_k\}_{k\in I}$ یک قاب برای فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد و S عملگر قاب مربوط به آن و A, B کرانهای آن باشند. آنگاه داریم:*

$$AI \le S \le BI \ ,$$

که در آن I عملگر همانی است.

برهان. رجوع شود به [۸].

[8] Frame operator
[9] Support
[10] Plancherel

قضیه ۱۰.۱.۱. *اگر $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک قاب برای فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد و سری $\sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k$ به ازای هر $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in l^2(I)$ همگرا باشد، در این صورت عملگر*

$$T : l^2(I) \longrightarrow \mathcal{H}; \qquad T\{c_k\}_{k\in I} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k \ ;$$

عملگری خطی و کراندار است و عملگر الحاقی آن به صورت زیر تعریف می شود:

$$T^* : \mathcal{H} \longrightarrow l^2(I); \qquad T^* f = \{\langle f, f_k\rangle\}_{k=1}^{\infty} \ .$$

بعلاوه به ازای هر $f \in \mathcal{H}$ داریم:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mid \langle f, f_k\rangle \mid^2 \leqslant \|T\|^2 \|f\|^2 \ .$$

برهان. رجوع شود به [۸].

قضیه ۱۱.۱.۱. *اگر $\mathcal{K}, \mathcal{H}$ فضاهای هیلبرت باشند و $U : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{H}$ عملگری کراندار باشد، آنگاه عبارات زیر برقرارند:*

الف) $\|UU^*\| = \|U\|^2 \quad , \quad \|U\| = \|U^*\|$؛

ب) $\mathcal{R}_U$ *در $\mathcal{H}$ بسته است اگر و تنها اگر $\mathcal{R}_{U^*}$ در $\mathcal{K}$ بسته باشد؛*

پ) U *عملگری پوشاست اگر و تنها اگر ثابت $C > 0$ وجود داشته باشد، طوری که:*

$$\|U^* y\| \geq C\|y\|; \quad \forall y \in \mathcal{H} \ .$$

ت) *اگر $\mathcal{K}, \mathcal{H}$ فضاهایی با بعد متناهی باشند، آنگاه U یک به یک است اگر و تنها اگر U^* پوشا باشد.*

برهان. رجوع کنید به [۸].

قضیه ۱۲.۱.۱. *اگر $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ دنباله ای در $\mathcal{H}$ باشد و ثابت $B > 0$ داده شده باشد، آنگاه $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک دنباله بسل با کران B است اگر و تنها اگر:*

$$T : \{c_k\}_{k=1}^{\infty} \longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k \ ,$$

عملگری کراندار از $l^2(\mathbb{N})$ به $\mathcal{H}$ باشد و نیز داریم: $\|T\| \leq \sqrt{B}$.

برهان. رجوع شود به [۸].

قضیه ۱۳.۱.۱. *فرض کنیم $\{f_k\}_{k\in I}$ یک قاب در $\mathcal{H}$ با عملگر قاب S باشد. آنگاه عبارات زیر برقرارند:*

الف) S *معکوس پذیر و خود الحاق است.*

ب) *هر* $f \in \mathcal{H}$ *را می توانیم به صورت های زیر نمایش دهیم:*

$$f = \sum_{k\in I}\langle f, S^{-1} f_k\rangle f_k \quad , \quad f = \sum_{k\in I}\langle f, f_k\rangle S^{-1} f_k \ .$$

دنباله $\{S^{-1} f_k\}_{k\in I}$ *را* ***قاب دوگان متعارف*** *قاب* $\{f_k\}_{k\in I}$ *می نامند.*

برهان. رجوع شود به [۸].

حال قضیه ی مهمی را که به قضیه **نیومن** [11] [۸] مشهور است بیان می کنیم:

قضیه ۱.۱.۱۴. *فرض کنیم* U *عملگری کراندار به روی فضای هیلبرت* $\mathcal{H}$ *باشد به طوری که* $\|I-U\| < 1$ *. آنگاه* U *معکوس پذیر است و داریم:*

$$U^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty} (I-U)^k \ .$$

بعلاوه:

$$\|U^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|I-U\|} \ .$$

همچنین U^{-1} *باید در رابطه ی زیر صدق کند:*

$$\|U^{-1} - \sum_{k=0}^{N} (I-U)^k\| \longrightarrow 0 \quad , N \longrightarrow \infty \ ;$$

قضیه ۱.۱.۱۵. *فرض کنیم* U_1, U_2, U_3 *عملگرهای خود الحاق باشند به طوری که:*

$$U_1 \leq U_2 \quad , \quad U_3 \geq 0 \ ;$$

همچنین U_3 *قابل جابجا شدن با* U_1, U_2 *باشد. آنگاه داریم،* $\quad U_1U_3 \leq U_2U_3$ *.*

برهان. رجوع شود به [۸].

قضیه ۱.۱.۱۶. *اگر* U *عملگری خطی روی* $\mathcal{H}$ *باشد و همچنین ثابت های* $\lambda_1, \lambda_2 \in [0,1[$ *وجود داشته باشند به طوری که:*

$$\|Ux - x\| \leq \lambda_1\|x\| + \lambda_2\|Ux\| \quad , \quad x \in \mathcal{H}$$

در این صورت U *کراندار و معکوس پذیر است و به ازای هر* $x \in \mathcal{H}$ *داریم:*

$$\frac{1-\lambda_1}{1+\lambda_2}\|x\| \leq \|Ux\| \leq \frac{1+\lambda_1}{1-\lambda_2} \ .$$

[11] Neumann

و همچنین:

$$\frac{۱-\lambda_۲}{۱+\lambda_۱}\|x\| \leq \|U^{-۱}x\| \leq \frac{۱+\lambda_۲}{۱-\lambda_۱}\|x\| \ .$$

برهان. رجوع شود به [۱۱].

قضیه ۱۷.۱.۱. *فرض کنیم $\{f_k\}_{k=۱}^{\infty}$ یک قاب با کران های A, B و عملگر قاب S باشد در این صورت عبارات زیر برقرارند:*

الف) *عملگر S کراندار، معکوس پذیر، خود الحاق و مثبت است.*

ب) *$\{S^{-۱}f_k\}_{k=۱}^{\infty}$ یک قاب با کران های $B^{-۱}, A^{-۱}$ و عملگر قاب $S^{-۱}$ است.*

پ) *اگر A, B کران های بهین قاب $\{f_k\}_{k=۱}^{\infty}$ باشند، آنگاه $B^{-۱}, A^{-۱}$ نیز کران های بهین قاب $\{S^{-۱}f_k\}_{k=۱}^{\infty}$ خواهند بود.*

برهان. **الف)** چون S از ترکیب دو عملگر کراندار T, T^* بدست می آید پس طبق قضیه ۱۱.۱.۱ داریم:

$$\|S\| = \|T\|^۲ \leq B \ ;$$

لذا S کراندار است. همچنین تساوی $S^* = TT^*$ نشان می دهد که S خود الحاق نیز است. از تعریف می دانیم که $A > ۰$. بنابراین طبق قضیه ی ۹.۱.۱، $S > ۰$. لذا S عملگری مثبت است.

دوباره از قضیه ی ۹.۱.۱:

$$۰ \leq I - B^{-۱}S \leq \frac{B-A}{B} I \ ;$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \|I - B^{-۱}S\| &= \sup_{\|f\|=۱} | \left\langle (I - B^{-۱}S)f, f \right\rangle | \\ &\leq \frac{B-A}{B} \\ &< ۱ \ . \end{aligned}$$

پس طبق قضیه نیومن، $B^{-۱}S$ و در نتیجه S معکوس پذیر خواهد بود.

ب) چون S خودالحاق است، پس:

$$(S^{-۱})^* = (S^*)^{-۱} = S^{-۱} \ .$$

لذا $S^{-۱}$ نیز خود الحاق است و به ازای هر $f \in \mathcal{H}$ داریم:

$$\begin{aligned}\sum_{k=۱}^{\infty} \mid \langle f, S^{-۱} f_k \rangle \mid^{۲} &= \sum_{k=۱}^{\infty} \mid \langle S^{-۱} f, f_k \rangle \mid^{۲} \\ &\leq B \| S^{-۱} f \|^{۲} \\ &= B \| S^{-۱} \|^{۲} \| f \|^{۲} .\end{aligned}$$

در نتیجه $\{S^{-۱} f_k\}$ یک دنباله ی بسل و لذا عملگر قاب برای آن خوش تعریف است. طبق تعریف عملگر قاب و قضیه ۱۳.۱.۱ داریم:

$$\begin{aligned}\sum_{k=۱}^{\infty} \langle f, S^{-۱} f_k \rangle S^{-۱} f_k &= S^{-۱} \sum_{k=۱}^{\infty} \langle S^{-۱} f, f_k \rangle f_k \\ &= S^{-۱} \left(S S^{-۱} f \right) \\ &= S^{-۱} f .\end{aligned}$$

لذا $S^{-۱}$ عملگر قاب دنباله $\{S^{-۱} f_k\}_{k=۱}^{\infty}$ خواهد بود. حال از قضیه ۹.۱.۱ داریم:

$$S \leq BI \quad \Rightarrow \quad S S^{-۱} \leq B S^{-۱} \quad \Rightarrow \quad B^{-۱} I \leq S^{-۱} .$$

و به همین ترتیب:

$$S^{-۱} \leq A^{-۱} I .$$

در نتیجه طبق قضیه مذکور ،به ازای هر $f \in \mathcal{H}$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}& B^{-۱} \| f \|^{۲} \leq \langle S^{-۱} f, f \rangle \leq A^{-۱} \| f \|^{۲} \\ \Rightarrow \quad & B^{-۱} \| f \|^{۲} \leq \sum_{k=۱}^{\infty} \mid \langle f, S^{-۱} f_k \rangle \mid^{۲} \leq A^{-۱} \| f \|^{۲} .\end{aligned}$$

پس $\{S^{-۱} f_k\}_{k=۱}^{\infty}$ یک قاب با کران های $B^{-۱}, A^{-۱}$ است.

پ) A کران پائین بهین دنباله ی $\{f_k\}_{k=۱}^{\infty}$ است. فرض کنیم که C کران بالای بهین دنباله ی $\{S^{-۱} f_k\}_{k=۱}^{\infty}$ باشد، طوری که $C < A^{-۱}$. طبق قسمت قبل، چون $\{S^{-۱} f_k\}_{k=۱}^{\infty}$ یک قاب است، لذا دنباله ی $\{f_k\}_{k=۱}^{\infty} = \{(S^{-۱})^{-۱} S^{-۱} f_k\}_{k=۱}^{\infty}$ یک قاب با کران پائین $C^{-۱}$ است، طوری که : $C^{-۱} < A$.
در حالی که این با بهین بودن A به عنوان کران پائین متناقض است. پس $A^{-۱}$ کران بهین بالای دنباله ی $\{S^{-۱} f_k\}_{k=۱}^{\infty}$ است. در مورد بهین بودن $B^{-۱}$ به عنوان کران پائین نیز، برهان به همین ترتیب است.

$\square$

۲.۱ شکاف بین دو زیر فضا

در این بخش به معرفی مبحثی تحت عنوان شکاف بین دو زیر فضا می پردازیم و پس از ارائه تعریفی مختصر در مورد تصویر متعامد، قضیه ای در مورد شکاف بین دو زیر فضا می آوریم که کاربرد زیادی در بخش ها و فصل های آتی دارد.

تعریف ۱.۲.۱. اگر V, W دو زیر فضای بسته از فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد، طوری که $V \neq \{0\}$. در این صورت شکاف بین دو زیر فضا را با $\delta(V,W)$ نمایش داده و بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$\begin{aligned}\delta(V,W) &= \sup_{x\in V, \|x\|=1} dist(x,W) \\ &= \sup_{x\in V, \|x\|=1} \inf_{y\in W} \|x-y\| \ .\end{aligned}$$

به وضوح از تعریف می توان نتیجه گرفت:

لم ۲.۲.۱. *اگر V, W دو زیر فضا از $\mathcal{H}$ باشند در این صورت داریم:*

الف) $\delta(V,W) = 0 \iff V \subseteq W$؛

ب) $\delta(V,W) = \delta(W,V)$.

برهان. رجوع شود به [۱۳].

تعریف ۳.۲.۱. اگر V زیر فضای بسته ای از فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد در این صورت تصویر متعامد [۱۲] P به روی V عبارت است از عملگر:

$$P : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H} \ ;$$

طوری که :

$$Px = x \quad , \quad x \in V$$

$$Px = 0 \quad , \quad x \in V^{\perp} \ .$$

و اگر $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک پایه ی متعامد یکه برای زیر فضای V باشد ،تصویر متعامد P به این صورت تعریف می شود:

$$P_V x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle e_k \quad , \quad \forall x \in \mathcal{H} \ .$$

[۱۲] Orthogonal projection

قضیه ۴.۲.۱. *اگر $\{f_k\}_{k=1}^{m}$ یک قاب برای فضای $\mathcal{H}$ با کران های A, B و P ، تصویر متعامد $\mathcal{H}$ به روی W باشد، در این صورت $\{Pf_k\}_{k=1}^{m}$ نیز یک قاب با کران های A, B برای زیر فضای W خواهد.*

برهان. رجوع شود به [۸].

قضیه ۵.۲.۱. *اگر $\{f_k\}_{k=1}^{m}$ یک قاب برای زیر فضای W از فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد، آنگاه تصویر متعامد $\mathcal{H}$ به روی W به این صورت خواهد بود:*

$$P_W f = \sum_{k=1}^{m} \langle f, S^{-1} f_k \rangle f_k \ .$$

برهان. رجوع شود به [۸].

قضیه ۶.۲.۱. *اگر W, V دو زیر فضا از $\mathcal{H}$ باشند به طوری که $V \neq \{0\}$ ، آنگاه:*

$$\delta(V, W) = \|P_V P_{W^\perp}\| \ .$$

برهان. طبق تعریف شکاف بین دو زیر فضا داریم:

$$\begin{aligned} \delta(V, W) &= \sup_{x \in V, \|x\|=1} \inf_{y \in W} \|x - y\| \\ &= \sup_{x \in V, \|x\|=1} \|x - P_W x\| \\ &= \sup \|P_{W^\perp} x\| \ . \end{aligned}$$

چون $x \in V$، پس طبق تعریف تصویر متعامد، تساوی $x = P_V x$ را می توان نوشت. لذا داریم:

$$\begin{aligned} \delta(V, W) &= \sup \|P_{W^\perp} P_V x\| \\ &= \|P_{W^\perp} P_V\| \\ &= \|P_V P_{W^\perp}\| \ . \end{aligned}$$

□

۳.۱ شبه وارون

شبه وارون یا وارون کاذب یکی از مباحث مهم و کاربردی در نظریه قاب ها است. همیشه توابعی وجود دارند که معکوس پذیر نیستند، لذا با استفاده از این مبحث، تغییراتی روی دامنه این نوع توابع انجام می دهیم، تا بدین وسیله عملگر وارونی برای چنین توابعی تقریب بزنیم.

در این بخش پس از ارائه‌ی تعریفی در مورد شبه وارون، قضایایی در این خصوص آورده می‌شود که پیش نیازی برای فصل های بعدی می‌باشد.

تعریف ۱.۳.۱. اگر $\mathcal{H},\mathcal{K}$ فضاهای هیلبرت باشند و $U:\mathcal{K}\longrightarrow\mathcal{H}$ عملگری خطی و کراندار باشد، طوری که $\mathcal{R}_U$ بسته است.تعریف می کنیم:

$$\tilde{U}=U|_{\mathcal{N}_U^{\perp}}:\mathcal{N}_U^{\perp}\longrightarrow\mathcal{H}$$

نگاشت $\tilde{U}:\mathcal{N}_U^{\perp}\longrightarrow\mathcal{R}_U$ نگاشتی یک به یک و پوشا و در نتیجه معکوس پذیر می باشد:

$$\tilde{U}^{-1}:\mathcal{R}_U\longrightarrow\mathcal{N}_U^{\perp}\ .$$

حال اگر $U^{\dagger}:\mathcal{H}\longrightarrow\mathcal{K}$ را به این صورت تعریف کنیم:

$$U^{\dagger}x=\begin{cases}\tilde{U}^{-1}x & x\in\mathcal{R}_U\\ \\ 0 & x\in\mathcal{R}_U^{\perp}\end{cases}$$

عملگر $U^{\dagger}$ را عملگر شبه وارون یا وارون کاذب U می نامیم.

تذکر: در تعریف قبل چون U خطی و کراندار است پس $\tilde{U}$ نیز خطی و کراندار خواهد بود. $\tilde{U}$ یک به یک نیز است، چون که اگر $x\in\mathcal{N}_{\tilde{U}}$ ، آنگاه داریم:

$$\tilde{U}=0\quad\Rightarrow\quad x\in\mathcal{N}_U,x\in\mathcal{N}_U^{\perp}\ ;$$

آنگاه:

$$x\in\mathcal{N}_U\cap\mathcal{N}_U^{\perp}=0\quad\Rightarrow\quad x=0\quad\Rightarrow\quad\mathcal{N}_{\tilde{U}}=\{0\}\ .$$

چون $\tilde{U}$ تحدید شده ی U است پس $\mathcal{R}_{\tilde{U}}\subseteq\mathcal{R}_U$;. حال فرض می کنیم y عضو دلخواهی از $\mathcal{R}_U$ باشد پس:

$$\exists x\in\mathcal{K}\quad s.t\quad Ux=y\quad\Rightarrow\quad x\in\mathcal{N}_U\oplus\mathcal{N}_U^{\perp}\ ;$$

بنابراین $x_1\in\mathcal{N}_U,x_2\in\mathcal{N}_U^{\perp}$ وجود دارند به طوری که:

$$x=x_1+x_2\ ;$$

پس خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\tilde{U}x_2&=Ux_2\\&=U(x_1)+U(x_2)\\&=U(x_1+x_2)\\&=Ux\\&=y\quad\Rightarrow\quad y\in\mathcal{R}_{\tilde{U}}\quad\Rightarrow\quad\mathcal{R}_U=\mathcal{R}_{\tilde{U}}\ .\end{aligned}$$

بنابراین $\tilde{U}:\mathcal{N}_U^{\perp}\longrightarrow\mathcal{R}_U$ نگاشتی یک به یک و پوشا و در نتیجه معکوس پذیر می باشد.

لم ۱.۳.۲. *اگر $U:\mathcal{K}\longrightarrow\mathcal{H}$ عملگری خطی و کراندار باشد و $U^\dagger, U^*$ به ترتیب عملگرهای الحاقی و شبه وارون آن باشند، در این صورت عبارات زیر برقرارند:*

الف) $\mathcal{N}_{U^\dagger}=\mathcal{R}_U^{\perp}=\mathcal{N}_{U^*}$؛

ب) $\mathcal{R}_{U^\dagger}=\mathcal{N}_U^{\perp}=\mathcal{R}_{U^*}$.

برهان. رجوع شود به [۸].

قضیه ۱.۳.۳. *فرض کنیم $\mathcal{K},\mathcal{H}$ فضاهای هیلبرت و $U:\mathcal{K}\longrightarrow\mathcal{H}$ عملگری کراندار باشد، طوری که $\mathcal{R}_U$ بسته است. آنگاه عبارات زیر برقرارند:*

الف) $UU^\dagger$ *تصویر متعامد از $\mathcal{H}$ به توی $\mathcal{R}_U$ است؛*

ب) $U^\dagger U$ *تصویر متعامد از $\mathcal{K}$ به توی $\mathcal{R}_{U^\dagger}$ است؛*

پ) U^* *دارای برد بسته است و $(U^*)^\dagger=(U^\dagger)^*$؛*

ت) عملگر $U^\dagger$ روی $\mathcal{R}_U$ به صورت $U^\dagger=U^*(UU^*)^{-1}$ خواهد بود.

برهان. رجوع شود به [۸].

قضیه ۱.۳.۴. *اگر دنباله $\{f_k\}_{k\in I}$ یک قاب برای فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ با عملگر قاب S باشد، آنگاه داریم:*

$$T^\dagger f=\{\langle f,S^{-1}f_k\rangle\}_{k\in I}\quad,\quad\forall f\in\mathcal{H}$$

برهان. رجوع شود به [۷].

لم ۱.۳.۵. *اگر T عملگری پوشا با برد بسته باشد، آنگاه داریم:*

$$\frac{1}{\|T^\dagger\|^2}\|f\|^2\leq\sum_{k\in I}|\langle f,f_k\rangle|^2\quad,\quad\forall f\in\mathcal{H}$$

برهان. رجوع شود به [۷].

قضیه ۱.۳.۶. *فرض می کنیم $\{f_k\}_{k\in I}$ دنباله ای در فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد و T عملگر ترکیبی وابسته به آن باشد. آنگاه عبارات زیر برقرارند:*

الف) *دنباله بسل $\{f_k\}_{k\in I}$ یک دنباله قاب است اگر و تنها اگر $\mathcal{R}_T$ بسته باشد؛*

ب) *دنباله بسل $\{f_k\}_{k\in I}$ برای $\mathcal{H}$ یک قاب است اگر و تنها اگر $\mathcal{R}_T = \mathcal{H}$؛*

پ) *اگر دنباله $\{f_k\}_{k\in I}$ یک قاب باشد، آنگاه کران های بهین آن به صورت زیر تعریف می شوند:*

$$A = \frac{1}{\|T^{\dagger}\|^2} \quad , \quad B = \|T\|^2.$$

برهان. الف) فرض کنیم $\{y_k\}_{k\in I}$ دنباله ای در $\mathcal{R}_T$ باشد که به y همگراست. ثابت می کنیم که $y \in \mathcal{R}_T$. چون $\{y_k\}_{k\in I} \in \mathcal{R}_T$، لذا:

$$\exists\{c_k\}_{k\in I} \quad s.t \quad Tc_k = y_k \quad \Rightarrow \quad lim(Tc_k) = lim y_k \ ;$$

و چون T پیوسته است، پس داریم:

$$y = T(lim c_k) \quad \Rightarrow \quad y \in \mathcal{R}_T \ ;$$

بنابراین $\mathcal{R}_T$ بسته است.

برعکس: حال فرض کنیم که T خوش تعریف و $\mathcal{R}_T$ بسته است. می دانیم که:

$$Span\{f_k\}_{k\in I} \subseteq \mathcal{R}_T \subseteq \overline{Span}\{f_k\}_{k\in I} \ ;$$

چون $\mathcal{R}_T$ بسته است، پس $\mathcal{R}_T = \overline{Span}\{f_k\}_{k\in I}$. بنابراین T عملگری پوشاست و طبق لم ۵.۳.۱ داریم:

$$\frac{1}{\|T^{\dagger}\|^2}\|f\|^2 \leq \sum_{k\in I} |\langle f, f_k\rangle|^2 \ .$$

پس کران پائین برقرار است ونیز چون طبق فرض $\{f_k\}_{k\in I}$ یک دنباله بسل است، در نتیجه $B > 0$ ای وجود دارد به طوری که:

$$\sum_{k\in I} |\langle f, f_k\rangle|^2 \leq B\|f\|^2 \ ;$$

و لذا $\{f_k\}_{k\in I}$ یک قاب با کران پائین $\frac{1}{\|T^{\dagger}\|^2}$ و کران بالای B است.

ب) فرض کنیم که $\{f_k\}_{k\in I}$ یک قاب ،با عملگر قاب و پیش قاب

$$S : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H} \quad , \quad T : l^2(I) \longrightarrow \mathcal{H} \ ;$$

باشد. طبق قضیه ۱۷.۱.۱، S معکوس پذیر و در نتیجه پوشاست، لذا پوشا بودن T نیز از تساوی $S = TT^*$ واضح است. پس: $\mathcal{R}_T = \mathcal{H}$.

برعکس: فرض کنیم که $\{f_k\}_{k\in I}$ یک دنباله بسل باشد، پس طبق قضیه ۱۲.۱.۱ داریم:

$$\|T\| \leq \sqrt{B} \ ;$$