بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه سیستان و بلوچستان

تحصیلات تکمیلی

پایان نامه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی محض گرایش آنالیز

عنوان:

قضیه های نقطه ثابت درفضای متری فازی شهودی

استاد راهنما:

دکتر رحمت الله لشکری پور

تحقیق و نگارش:

روح الله چوبین

(این پایان نامه از حمایت مالی معاونت پژوهشی دانشگاه سیستان وبلوچستان بهره مند شده است)

۸۷/۶/۳۰

بسمه تعالی

این پایان نامه با عنوان قضیه های نقطه ثابت در فضای متری فازی شـهودی قـسمتی از برنامـه آموزشـی دوره کارشناسی ارشد ریاضی محض توسط دانشجو روح الله چوبین تحت راهنمایی استاد پایان نامـه دکتـر رحمـت الله لشکری پور تهیه شده است. استفاده از مطالب آن به منظور اهداف آموزشی با ذکر مرجع و اطلاع کتبی بـه حوزه تحصیلات تکمیلی دانشگاه سیستان و بلوچستان مجاز می باشد.

روح الله چوبین

این پایان نامه ...۶.. واحد درسی شناخته می شود و در تاریخ ...۳۰/۶/۸۷... توسط هیئت داوران بررسـی و درجـه ...عالی...... به آن تعلق گرفت.

	نام و نام خانوادگی	امضاء	تاریخ
استاد رهنما	دکتر رحمت الله لشکری پور		
استاد راهنما:			
استاد مشاور:			
داور ۱:	دکتر حسن میش مست نهی		
داور ۲:	دکتر غلامرضا رضایی		
نماینده تحصیلات تکمیلی:	دکتر حسن رضایی		

دانشگاه سیستان و بلوچستان

تعهدنامه اصالت اثر

اینجانب رو ح الله چوبین تأیید می کنم که مطالب مندرج در این پایان نامه حاصل کار پژوهشی اینجانب است و به دستاوردهای پژوهشی دیگران که در این نوشته از آن استفاده شده است مطابق مقررات ارجاع گردیده است. این پایان نامه پیش از این برای احراز هیچ مدرک هم سطح یا بالاتر ارائه نشده است.

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به دانشگاه سیستان و بلوچستان می باشد.

نام و نام خانوادگی دانشجو: روح الله چوبین

امضاء

چوبین

تقدیم به:

پدر فداکار

و

مادر مهربانم

سپاسگزاری

منت خدای را که بالطف بیکران خویش مرا در به پایان رساندن این دوره یاری نمود، که اول اوست و دانش بر گرفته از ذات بی همتا اوست
بر خود لازم می دانم که از کلیه دوستان و عزیزانی که در این دوره از راهنمایی، همکاری و مصاحبت بهرمند شدم، قدرانی نمایم. از جناب آقای **دکتر رحمت الله لشکری پور** بعنوان استاد راهنمای این پایان نامه که همواره در این مدت از راهنمایی و بذل توجه ایشان بهره بردم، صمیمانه تشکر نموده و موفقیت روز افزون ایشان را آرزومندم.
از آقایان **دکتر حسن میش مست نهی** و **دکتر غلامرضا رضایی** که داوری این پایان نامه را قبول نمودند، کمال تشکر را دارم.

فهرست مندرجات

چکیده

در این پایان نامه، مجموعه‌های فازی و مجموعه‌های فازی شهودی معرفی شده‌اند. سپس فضای متری فازی شهودی نسبت داده شده به میشالک و کراموسیل معرفی و قضیه باناخ و ادلشتین را به فضای متری فازی شهودی توسعه می دهیم. در نهایت قضیه‌های نقطه ثابت را برای فضای متری فازی شهودی کامل را معرفی و اثبات می کنیم.

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

۱—۱ مقدمه

با توجه به اینکه مجموعه‌ها بصورت گردایه ای معین از اشیاء تعریف می شوند، هر مجموعه با یک ویژگی خوش تعریف مشخص می شود. اگر یک شیء مفروض دارای آن ویژگی باشد، عضوِ مجموعهٔ متناظر است و در غیر اینصورت، عضو آن نیست. مثلاً اگر مجموعهٔ مرجع E، مجموعه اعداد حقیقی فرض شود و P ویژگی « بزرگتر از ده بودن » باشد، آنگاه P یک ویژگی خوش تعریف است که یک مجموعه مثل A با آن متناظر می شود، زیرا برای هر عدد از مجموعه اعداد حقیقی می توان با قاطعیّت گفت که آیا آن عدد بزرگتر از ده است یا خیر و بنابراین عضو A است یا خیر.

حال فرض کنید بخواهیم دربارهٔ آن دسته از مجموعهٔ اعداد حقیقی صحبت کنیم که « بزرگ » باشند. در اینجا با یک ویژگی ناخوش تعریف و مبهم یعنی « بزرگ » سروکار داریم. اینکه چه اعدادی بزرگ هستند و چه اعدادی بزرگ نیستند، بسته به نظر افراد مختلف، فرق می کند. بعبارت دیگر عضویت و یاعدم عضویت اعداد مختلف در گردایه‌ای با ویژگی « بزرگ بودن » قطعی نیست. بعنوان مثال آیا ۱۰۰ عددی « بزرگ » است و عضو گردایهٔ اعداد حقیقی بزرگ است یا خیر؟ ۱۰۰۰ چطور؟ ۱۰۰۰۰ چطور؟ می بینیم که ویژگی « بزرگ بودن » برای اعداد حقیقی یک ویژگی دقیق و معین نیست و بنابراین جامهٔ نظریهٔ معمولی مجموعه‌ها بر تن اینگونه مفاهیم راست نمی آید و این نظریه از صورتبندی این مفاهیم و ویژگی‌ها ناتوان است. از قضا بیشتر مفاهیم و ویژگی هایی که در زندگی روزمرّه و واقعی و نیز در شاخه‌های مختلف علوم، بویژه علوم انسانی و اجتماعی با آن سروکار داریم اینگونه‌اند، یعنی مفاهیمی منعطف و مجموعه‌هایی با کران‌های نادقیق می باشند. برای مثال، در زندگی واقعی کمتر از کودکان بلندقدتر از ۱۱۰ سانتیمتر، زمین های بزرگتر از ۱۰ هکتار و ... صحبت می کنیم، بلکه فهم و زبان طبیعی ما بیشتر با مفاهیمی مانند کودکان بلندقد(یا کوتاه‌قد، خیلی کوتاه و ...) ، زمین های وسیع (کوچک، خیلی وسیع و ...) سروکار دارد. همچنین در علوم، بویژه علوم انسانی و اجتماعی بجای صحبت از کشورهای دارای ۱۰۰۰ کارخانه به بالا ، شهرهای با جمعیت بیشتر از یک میلیون نفر و ... با مفاهیم و عباراتی مانند جوامع پیشرفتهٔ صنعتی، تراکم جمعیت زیاد و ... سروکار داریم. جالب تر اینکه در قرآن کریم مفاهیمی از قبیل تقوا، صبر، مراتب ایمان، درجهٔ توکل و ... مفاهیمی نسبی هستند و نیز از آنجا که خداوند در قرآن کریم با انسان‌ها سخن می گوید و مخاطبینش انسان‌ها هستند و عملاً نیز مشاهده می کنیم که برای مثال درجهٔ ایمان، تقوا و ... انسانها یکسان نیست و شاید بتوان ادعا کرد که حتی دو نفر از نظر درجهٔ ایمان، تقوا و ... انسان‌ها یکسان نمی باشند، در واقع ارزش راستی چنین مفاهیمی در مورد

انسان‌ها بسیار متفاوت است و در حقیقت ارزش راستی گزاره‌های مربوط به این مفاهیم در مورد انسان‌ها، گزاره‌های بی‌نهایت مقداره است. بنابراین منطق قرآن کریم نمی تواند دو ارزشی باشد و می توان گفت که بسیاری از مفاهیم قرآن، نسبی می باشند که مرز مشخص و معینی ندارند.

در قلمرو ریاضیات و نظریهٔ مجموعه‌های کلاسیک جایی برای این مفاهیم نیست و قالبی برای صورت‌بندی این مفاهیم و ابزاری برای تجزیه و تحلیل آنها وجود ندارد. نظریهٔ مجموعه‌های فازی یک قالب جدید ریاضی برای صورت‌بندی و تجزیه و تحلیل این مفاهیم و ویژگی‌هاست.

این نظریه، یک تعمیم و گسترش طبیعی نظریهٔ مجموعه‌های معمولی است، که موافق با زبان و فهم طبیعی انسانها نیز می باشد. اما قبل از ورود به بحث اصلی و معرفی ساختار ریاضی این نظریه، اساس کار پرفسور عسگرزاده، مبدّع ایرانی این نظریه را شرح می دهیم. این کار را با پیگیری مثال فوق دربارهٔ اعداد حقیقی بزرگ انجام می دهیم. همان‌طور که بیان شد، آنچه در مجموعه بودن « اعداد بزرگ » اشکال ایجاد می کند، معلوم نبودن عضویت و عدم عضویت اعداد مختلف در گردایهٔ« اعداد بزرگ » است. مثلاً اینکه آیا ۱۰۰ عددی بزرگ است ؟ ۱۰۰۰۰۰ چطور ؟ و همینطور برای سایر اعداد. بنابه پیشنهاد زاده، مناسب است که به هر عدد از اعداد حقیقی، عددی در بازهٔ $[۰, ۱]$ به عنوان درجهٔ بزرگی آن عدد نسبت دهیم. هر چه یک عدد، بزرگتر باشد عدد متناظر برای عضویت آن در A :« مجموعه اعداد بزرگ » به یک نزدیکتر است. بالعکس هر چه عدد مورد نظر کوچک باشد، عدد مربوط به عضویت آن در A ، به صفر نزدیکتر است. به این ترتیب بجای آنکه بگوییم عدد ۱۰۰۰ بزرگ است یا بزرگ نیست، می گوییم درجهٔ بزرگی آن، مثلاً ۰/۶ است. یا بعبارت دیگر بجای آن که بگوییم عدد ۱۰۰۰ عضو A هست یا عضو نیست، می گوییم با درجهٔ ۰/۶ عضو A است. مسلماً در این مورد باید برای هر عدد از R، عددی از $I = [۰, ۱]$ را به عنوان درجه و میزان عضویت و تعلّق از A نسبت دهیم. یعنی یک تابع در نظر بگیریم که قلمرو آن R و برد آن I باشد. لذا توانستیم به یک قالب ریاضی برای توصیف و تجزیه و تحلیل اعداد حقیقی بزرگ دست یابیم. به این ترتیب، می توان بسیاری از مفاهیم بیگانه با ریاضیات فعلی را وارد دنیای ریاضیات کرد و تفکرات و مفاهیم زبان و منطق بشری را دریک ساختار ریاضی نظم و ترتیب داد. در فصل حاضر، مفاهیم و تعاریف نظریهٔ مجموعه‌های فازی مطرح می شوند.

۱—۲ تعاریف مقدماتی از مجموعه فازی

فرض کنید E یک مجموعهٔ مرجع دلخواه باشد. تابع مشخصهٔ هر زیر مجموعهٔ معمولی A از E، یک تابع از E به $\{۰, ۱\}$ است که بصورت زیر تعریف می شود:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} ۱ & x \in A \\ ۰ & x \notin A. \end{cases}$$

حال اگر برد تابع مشخصه را از مجموعهٔ دو عضوی $\{۰, ۱\}$ به بازهٔ $[۰, ۱]$ توسعه دهیم، یک تابع خواهیم داشت که به هر x از E عددی از بازهٔ $[۰, ۱]$ نسبت می دهد. این تابع را تابع عضویت A می نامیم. اکنون A دیگر یک مجموعهٔ معمولی نیست، بلکه مجموعه‌ای است که آن را یک مجموعهٔ فازی می نامیم. بنابراین یک مجموعهٔ فازی A، مجموعه‌ای است که درجات عضویت اعضاء آن می تواند بطور پیوسته از $I = [۰, ۱]$ اختیار شود. این مجموعه بطور کامل و یکتا توسط یک تابع عضویت که آن را با $\mu_A(x)$ نمایش می دهیم، مشخص می شود. تابعی که به هرعنصر از E، یک عدد را از بازه $[۰, ۱]$ به عنوان درجهٔ عضویت آن عنصر در مجموعه فازی A نسبت می دهد.

لذا می توان گفت:

$$\mu_A(x) : E \to [۰, ۱]$$

نزدیکی مقدار $\mu_A(x)$ به عدد یک نشان دهندهٔ تعلّق بیشتر x به مجموعهٔ فازی A است و بالعکس نزدیکی آن به صفر نشان دهندهٔ تعلّق کمتر x به A است. به لحاظ شهودی $\mu_A(x)$ را می توان درجهٔ پذیرش ما در قبول x به عنوان عضوی از A در نظر گرفت. در حالت حدّی چنانچه x کاملاً در A باشد، $\mu_A(x) = ۱$ و چنانچه اصلاً در A نباشد، $\mu_A(x) = ۰$.

پس مجموعه‌های معمولی و توابع مشخصهٔ آنها، حالت های خاصی از مجموعه‌های فازی و توابع عضویت آنها هستند. دو مثال زیر را برای درک بهتر مجموعه‌های فازی مطرح می کنیم:

مثال ۱.۱: فرض کنید $E = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ مجموعهٔ مرجع باشد. یک زیرمجموعهٔ معمولی از X شامل اعداد کوچکتر از چهار را بصورت $A = \{۱, ۲, ۳\}$ در نظر می گیریم که تابع مشخصه آن

بصورت زیر می باشد:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} ۱ & x = ۱, ۲, ۳ \\ ۰ & x = ۴, ۵ \end{cases}$$

در اینجا مثلاً $\chi_A(۲) = ۱$، یعنی عدد دو عضو A است و $\chi_A(۴) = ۰$، یعنی عدد چهار عضو A نیست. بعبارت دیگر عدد دو ویژگی کوچکتر از چهار را دارد و عدد چهار ندارد. اکنون یک زیر مجموعهٔ فازی از E که « کوچک بودن » را نشان می دهد، می تواند بوسیلهٔ تابع عضویت زیر تعریف شود:

$$\mu_B(x) = \begin{cases} ۱ & x = ۱ \\ ۰/۶ & x = ۲ \\ ۰/۳ & x = ۳ \\ ۰/۱ & x = ۴ \\ ۰ & x = ۵ \end{cases}$$

در اینجا مثلاً $\mu_B(۲) = ۰/۶$، یعنی عدد دو، با درجهٔ ۰/۶ عضو مجموعه فازی B است و $\mu_B(۵) = ۰$، یعنی عدد پنج، اصلاً عضو مجموعه فازی B نیست و $\mu_B(۱) = ۱$، یعنی عدد یک، کاملاً عضو مجموعه فازی B است. بعبارت دیگر عدد دو، ویژگی « کوچک بودن » را با درجهٔ ۰/۶ داراست و عدد پنج، اصلاً دارا نیست و عدد یک، کاملاً داراست.

مثال ۲.۱: فرض کنید $E = [۰, ۱۰]$، یک زیر مجموعهٔ فازی از E که نشان‌دهندهٔ ویژگی « نزدیک دو » باشد، توسط تابع عضویت زیر تعریف شود:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \frac{۱}{۲}x & x \leq ۲ \\ -\frac{۱}{۲}x + ۲ & x \geq ۲. \end{cases}$$

در اینجا مثلاً $\mu_A(۳/۶) = \mu_A(۰/۴) = ۰/۲$، یعنی اعداد ۰/۴ و ۳/۶ هر دو با درجهٔ عضویت ۰/۲، عضو مجموعهٔ فازی A هستند و بعبارت دیگر با درجهٔ ۰/۲، ویژگی « نزدیک به دو » را دارا می باشند.
نکته‌ای که باید توجه بیشتری به آن داشت، این است که افراد مختلف ممکن است نظرات مختلفی دربارهٔ ویژگی هایی مانند « کوچک بودن » یا « نزدیک بودن » و مانند این ها داشته باشند و در نتیجه توابع عضویت مختلفی برای مجموعه‌های فازی که بیانگر این ویژگی ها باشد، در نظر خواهند گرفت. بنابراین در تعیین تابع

عضویت یک مجموعهٔ فازی، جنبه‌های ذهنی و شخصی، بسیار مؤثر است.

تعریف ۱.۳: مجموعهٔ نقاطی از E که برای آن نقاط $\mu_A(x) > ۰$، تکیه‌گاه A نامیده و با $Supp\ A$ نمایش می دهیم، بعبارت دیگر

$$Supp\ A = \{x \in E : \mu_A(x) > ۰\}$$

تعریف ۱.۴: مقدار $M = Sup\ \mu_A(x)$ را ارتفاع مجموعه نامیده و با $hgt(A)$ نمایش می دهیم. اگر ارتفاع مجموعهٔ فازی A برابر یک باشد، آنگاه A یک مجموعهٔ فازی نرمال و در غیر اینصورت A یک مجموعهٔ فازی زیرنرمال نامیده می شود.

بدیهی است که هر مجموعهٔ زیرنرمال A را می توان با تقسیم $\mu_A(x)$ ها بر ارتفاع A، نرمال کرد.

۱—۳ نمادگذاری مجموعه‌های فازی

برای نشان دادن یک مجموعهٔ فازی روشهای مختلفی رایج است. یک روش بکاربردن مستقیم تابع عضویت مجموعهٔ فازی است که در مثال‌های ذکر شده استفاده شد. روش متداول دیگر توصیف یک مجموعهٔ فازی بصورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب به گونهٔ زیر است:

$$A = \{(x, \mu_A(x)) \ : \ x \in E\}.$$

هنگامی که E یک مجموعهٔ متناهی (یانامتناهی شمارا) بصورت $\{x_۱, x_۲, ..., x_n\}$ باشد، یک زیرمجموعهٔ فازی A از E بصورت های زیر نشان داده می شود:

$$A = \{ \frac{\mu_A(x_۱)}{x_۱}, \frac{\mu_A(x_۲)}{x_۲}, \ ..., \ \frac{\mu_A(x_n)}{x_n}. \}$$

$$A = \frac{\mu_A(x_۱)}{x_۱} + \frac{\mu_A(x_۲)}{x_۲} + \ ... \ + \frac{\mu_A(x_n)}{x_n} = \sum_{i=۱}^{n} \frac{\mu_A(x_i)}{x_i}.$$

در عبارت فوق منظور از $+$، اجتماع است نه جمع حسابی.

هنگامی که E یک مجموعهٔ پیوسته باشد، نماد زیر بکار برده می شود:

$$A = \int \frac{\mu_A(x)}{x},$$

که در آن منظور از علامت ($\int$)، اجتماع است.

۱—۴ α– برشها و تحدب

تعریف ۱.۵: مجموعهٔ مرجع E و زیر مجموعه فازی $\tilde{A}$ از آن را در نظر بگیرید. مجموعه عناصری از E که درجه عضویت آنها در مجموعه فازی $\tilde{A}$ حداقل به بزرگی ($0 < \alpha \leq 1$) باشد، α– برش $\tilde{A}$ (یا مجموعه تراز α) از $\tilde{A}$ گوییم و با A_α نشان می دهیم، یعنی

$$A_\alpha \;=\; \{x \in E \;\mid\; \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}.$$

در بعضی موارد از مفهوم α– برش قوی استفاده می شود که با $A_{\bar{\alpha}}$ نشان داده شده و بصورت زیر تعریف می شود:

$$A_{\bar{\alpha}} \;=\; \{x \in E \;\mid\; \mu_{\tilde{A}}(x) > \alpha\}.$$

در نظریه مجموعه‌های فازی مفهوم تحدب نقش مهمی دارد و زمینه‌های کاربردی زیادی را شامل می شود.

تعریف ۱.۶: مجموعه فازی $\tilde{A}$ را محدب گوییم، اگر هر α– برش $\tilde{A}$(برای تمام $0 < \alpha \leq 1$) محدب باشد.
تعریف دیگری معادل با تعریف فوق بصورت زیر نیز بیان می شود:

تعریف ۱.۷: مجموعه فازی $\tilde{A}$ محدب است اگر و فقط اگر برای هر $x_1, x_2 \in \tilde{A}$ و هر $\lambda \in [0, 1]$ داشته باشیم:

$$\mu_{\tilde{A}}[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] \;\geq\; \min[\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2)].$$

۱—۵ نظریه اعداد فازی

اعداد فازی یک تعمیم طبیعی برای اعداد معمولی می باشند. یک عدد معمولی مانند a را می توان با تابع عضویت زیر نشان داد:

$$\mu_a(x) = \begin{cases} ۱ & x = a \\ ۰ & x \neq a. \end{cases}$$

تعریف ۱.۸: یک مجموعه فازی $\widetilde{N}$ از R را یک عدد فازی گوییم، اگر

(۱) محدب باشد.

(۲) $\widetilde{N}(x)$ نرمال و تک نمایی باشد، یعنی دقیقاً یک $x_۰ \in R$ وجود داشته باشد که $\widetilde{N}(x_۰) = ۱$.

(۳) $\widetilde{N}(x)$ قطعه به قطعه پیوسته باشد.

مجموعه تمام اعداد فازی را با $F(R)$ نشان می دهیم.

مثال ۱.۹: مجموعه فازی $\widetilde{N}$ با تابع عضویت زیر یک عدد فازی است:

$$\mu_{\widetilde{N}}(x) = \begin{cases} |۱ - x| & x \in [-۱, ۱] \\ ۰ & x \notin [-۱, ۱], \end{cases}$$

می توان $\widetilde{N}$ را عدد فازی تقریباً صفر تعبیر کرد.

تعریف ۱.۱۰: عدد فازی $\widetilde{N}$ را مثبت(منفی) گوییم، اگر برای هر $x < ۰$ ($x > ۰$) داشته باشیم: $\widetilde{N}(x) = ۰$.

مثال ۱.۱۱: عدد فازی مثال ۱.۹ نه یک عدد فازی مثبت است و نه یک عدد فازی منفی، اماعدد فازی با تابع عضویت زیر یک عدد فازی مثبت است:

$$\mu_{\widetilde{N}}(x) = \begin{cases} \frac{x-۳}{۲} & ۳ \leq x < ۵ \\ \frac{۷-x}{۲} & ۵ \leq x \leq ۷ \\ ۰ & \text{در غیراینصورت}. \end{cases}$$

۱—۶ مباحثی از فضاهای توپولوژی

در این بخش به ذکر برخی از قضایای مقدماتی و تعاریفی که در فصل های بعد مورد استفاده قرار خواهند گرفت می پردازیم.

تعریف ۱.۱۲: یک توپولوژی روی مجموعه X گردایه ای مانند τ از زیر مجموعه های X است که در شرایط زیر صدق می کند:

(۱) $\emptyset$ و X به τ متعلق اند،

(۲) اجتماع اعضای هرزیر گردایه از τ متعلق به τ است،

(۳) اشتراک اعضای هر زیر گردایه متناهی از اعضای τ متعلق به τ است.

مجموعه X همراه با توپولوژی τ را یک فضای توپولوژی گویند و آن را به صورت (X,τ) نشان می دهند.
اگر X فضای توپولوژی با توپولوژی τ باشد، زیر مجموعه U از X را یک مجموعه باز گوییم هرگاه U متعلق به τ باشد. همچنین مجموعه V بسته است، هرگاه مجموعه $X \setminus V$ باز باشد.
اگر $x \in X$ و U یک مجموعه باز شامل x باشد، آن‌گاه U را یک همسایگی x می نامیم.

تعریف ۱.۱۳: فرض کنید X یک مجموعه باشد. یک پایه توپولوژیکی در X گردایه ای از زیر مجموعه های X(موسوم به اعضای پایه) است به طوری که

(۱) به ازای هر $x \in X$، حداقل یک عضو پایه مانند B شامل x موجود است،

(۲) اگر x متعلق به اشتراک دو عضو پایه مانند B_1 و B_2 باشد، آن گاه عضوی از پایه مانند B_3 شامل x وجود دارد به طوری که $B_3 \subset B_1 \bigcap B_2$.

تعریف ۱.۱۴: فرض کنید $x \in X$ و $N(x)$ گردایه‌ای از همسایگی های x باشد. $N(x)$ یک پایه موضعی در x است اگر به ازای هر همسایگی V از x، عضوی مانند $u \in N(x)$ موجود باشد به قسمی که $u \in V$.

تعریف ۱.۱۵: بستار A که با نماد $\overline{A}$ نمایش داده می شود با نماد $\overline{A} = \bigcap\limits_{A \subset F} F$ تعریف می

گردد، که F مجموعه‌های بسته اند. همچنین درون مجموعهA که آن را با نماد A° نشان می دهیم با نماد $\bigcup\limits_{O\subset A} O = A^\circ$، که O مجموعه های باز هستند تعریف می شود.

تعریف ۱.۱۶: فرض کنید X فضای توپولوژی، $A \subseteq X$ و $x \in X$ باشد. در این صورت x را چسبیده به A نامیم در صورتی که هر همسایگی از x دست کم حاوی یک نقطه از A باشد.

تعریف ۱.۱۷: اگر A زیر مجموعه ای از فضای توپولوژی X و x نقطه ای ازA باشد، x را یک نقطه انباشتگی (نقطه حدی) مجموعهA گویند در صورتی که هر همسایگی S، مجموعه را در نقطه‌ای غیر از خود x قطع کند.

تعریف ۱.۱۸: فرض کنید (X, τ) یک فضای توپولوژی و $\{x_n\}$ دنباله ای در X باشد. دنباله $\{x_n\}$ به نقطهx درX همگراست، اگر برای هر همسایگی U از x عدد صحیح و مثبت $n_\circ$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $n \geqslant n_\circ$، $x_n \in U$، در این صورت می نویسیم $x_n \longrightarrow x$.

تعریف ۱.۱۹: فضای توپولوژی X را فضای هاسدورف گوییم، در صورتی که به ازای هر دو نقطه متمایز x_1 و x_2 همسایگی هایی جدا از هم مانند U_1 و U_2 به ترتیب از x_1 و x_2 یافت شوند یا به عبارتی دیگر اگر x_1 و x_2 درX باشند و $x_1 \neq x_2$، آن گاه همسایگی های U_1 از x_1 و U_2 از x_2 وجود داشته باشد به طوری که $U_1 \bigcap U_2 = \emptyset$.

قضیه۱.۲۰: فرض کنید X یک فضای هاسدورف و A زیر مجموعه‌ای از X باشد. در این صورت x نقطه انباشتگی A است اگر و فقط اگر هر همسایگی x شامل بی نهایت نقطه از A باشد.

برهان : به [۱۸] مراجعه شود.

تعریف ۱.۲۱: یک متر روی مجموعه X تابعی است مانند

$$d : X \times X \longrightarrow R,$$

که دارای خواص زیر است:

(۱) به ازای هر x و y از X، $d(x,y) \geq 0$ اگر و فقط اگر $x = y$.

(۲) به ازای هر x و y از X، $d(x,y) = d(y,x)$.

(۳) به ازای هر x و y و z از X، $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ (نامساوی مثلث).

فرض کنید d یک متر روی X باشد، $d(x,y)$ را معمولا فاصله بین x و y با متر d گویند. مجموعه X با متر d را یک فضای متری می نامیم و با (X,d) نشان می دهیم. برای هر $\epsilon > 0$ مجموعه $B_d(x,\epsilon) = \{y \mid d(x,y) < \epsilon\}$ را ϵ—گوی به مرکز x می‌نامیم.

تعریف ۲۲.۱: هرگاه d یک متر روی X باشد، آن‌گاه گردایه همه‌ی ϵـگوی‌های $B_d(x,\epsilon)$ به ازای $x \in X$ و $\delta > 0$ پایه‌ای برای یک توپولوژی در X است که به این توپولوژی القاء شده به وسیله متر d گویند.

تعریف ۲۳.۱: اگر X یک فضای توپولوژی باشد، X را متر پذیر گوییم هرگاه متری مانند d روی X وجود داشته باشد که توپولوژی X را القاء کند.

تعریف ۲۴.۱: فرض کنید X فضای متری با متر d باشد. زیر مجموعه A از X را d—کراندار گوییم هرگاه عددی مانند m وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر زوج x و y از نقاط A،

$$d(x,y) \leqslant m.$$

تعریف ۲۵.۱: اگر d_1 و d_2 دو متر روی فضای X باشند در این صورت این دو متر معادلند اگر و فقط اگر α و β بزرگتراز صفر موجود باشند به طوری که $\alpha d_1 \leqslant d_2 \leqslant \beta d_1$.

تعریف ۲۶.۱: فرض کنید (X,d) یک فضای متری و $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای در X باشد. دنباله $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ همگرا به x است و به صورت $x_n \longrightarrow x$، نمایش می دهیم، هرگاه برای هر $\epsilon > 0$ عدد طبیعی n_0 وجود داشته باشد به طوری که برای $n \geqslant n_0$ داشته باشیم $d(x_n,x) < \epsilon$.