وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه دامغان

دانشکده فیزیک

پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد

فیزیک (گرایش نجوم و اخترفیزیک)

انقباض گرانشی یک ستاره‌ی ناهمگن، باردار و تابشی با شار حرارتی

توسط:

محمد عرب

استادان راهنما:

دکتر صمد خاکشورنیا

دکتر مسعود جعفری

شهریور ماه ۱۳۹۰

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه دامغان
دانشکده فیزیک

پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد
فیزیک (گرایش نجوم و اخترفیزیک)

انقباض گرانشی یک ستاره‌ی ناهمگن، باردار و تابشی با شار حرارتی

توسط:
محمد عرب

استادان راهنما:
دکتر مسعود جعفری
دکتر صمد خاکشورنیا

شهریور ماه ۱۳۹۰

تقدیم به روح پدر بزرگوارم
و تقدیم به مادر مهربانم

سپاسگزاری

چیست این سقف بلند ساده‌ی بسیار نقش　　　*زین معما هیچ دانا در جهان آگاه نیست*

ستایش، تنها مخصوص پروردگاریست که دم به دم می‌آفریند گیتی را و هرآنچه در آن است، خداوند صمد که هستی تجلی ذات اوست، پروردگاری که در اوصاف نیاید و در اوهام نگنجد، یاوری که او را یاوری نیست و او نزدیک تر از من به من است ...

وظیفه‌ی خود می‌دانم که از زحمات بی‌دریغ و دلسوزانه‌ی اساتید فرزانه، جناب آقای دکتر جعفری و جناب آقای دکتر خاکشورنیا، که مرا در به اتمام رساندن این مرحله از تحصیل، راهنما و روشن‌گر بودند، صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم.

همچنین از زحمات اساتید دانشکده‌ی فیزیک دانشگاه دامغان بویژه جناب آقای دکتر عباسی کمال تشکر و قدردانی را دارم.

از جناب آقای دکتر فاقعی و جناب آقای دکتر غفارنژاد که زحمت داوری پایان‌نامه‌ی اینجانب را پذیرفتند بسیار سپاسگزارم.

در پایان با اندوه از فراق پدر مهربان و بزرگوارم، حامی و پشتیبانم، او را هزاران بار سپاس می‌گویم و خدایش رحمت کند، رحمتی پایان ناپذیر.

بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگار مهر و عطوفت، مادر عزیزتر از جانم که هرچه دارم از دعای اوست.

تشکر می‌کنم از برادران و خواهران عزیز و دلسوزم.

چکیده

انقباض گرانشی یک ستاره‌ی ناهمگن، باردار و تابشی با شار حرارتی

به‌وسیله‌ی:

محمد عرب

در این پایان‌نامه با استفاده از حل معادلات میدان و شرایط اتصال در نسبیت عام، به بررسی تأثیر همزمان میدان الکترومغناطیسی، ثابت کیهان‌شناسی و شار حرارتی بر رمبش گرانشی یک ستاره‌ی ناهمگن، باردار و تابشی پرداختیم و با تعیین علامت معادله‌ی افق ظاهری بر تعداد، ترتیب و چگونگی این افق‌ها در شرایط مختلف فیزیکی بحث کردیم. همچنین با حل عددی معادلات دیفرانسیل بدست آمده از معادلات میدان به بررسی دینامیک رمبش در یک معادله‌ی حالت خاص پرداخته و سازگاری این حل را با رصدهای فوران گاما نشان دادیم.

فهرست مطالب

فهرست جدول‌ها

فهرست شکل‌ها

قراردادها

نشان	بیان
x^μ	یک مختصات دلخواه روی مانیفولد M
$g_{\mu\nu}$	متریک روی مانیفولد M
h_{ij}	متریک در مختصات سه بعدی در ابر سطح Σ
$\psi_{,\mu} = \partial_\mu \psi$	مشتق پاره‌ای نسبت به x^μ
$A^\mu_{;\nu} = \nabla_\nu A^\mu$	مشتق هموردا
$A^i_{\|j}$	مشتق همورداي ذاتی بر روی ابر سطح

نشانگان بکار رفته $(-\,-\,-\,+)$ است و اندیسهای یونانی $\alpha, \beta, \ldots$ از ۰ تا ۳ واندیسهای لاتین $i, j, \ldots$ از ۱ تا ۳ می‌باشند. تانسور ریمان با $R^\beta{}_{\nu\rho\sigma} = \Gamma^\beta{}_{\nu\sigma,\rho} - \Gamma^\beta{}_{\nu\rho,\sigma} - \Gamma^\alpha{}_{\nu\sigma}\Gamma^\beta{}_{\alpha\rho} - \Gamma^\alpha{}_{\nu\rho}\Gamma^\beta{}_{\alpha\sigma}$ و تانسور ریچی توسط $R_{\nu\rho} = R^\mu{}_{\nu\rho\mu}$ تعریف می‌شود. و همچنین واحدهای هندسی شده‌ی ثابت گرانش وسرعت نور برابر یک $(G = c = ۱)$ می‌باشند.

فصل ۱

معرفی معادلات میدان اینشتین و مروری بر متریک‌ها

در این فصل گذرا، به معرفی معادلات میدان اینشتین و بررسی متریک‌های رایج در نسبیت عام می‌پردازیم.

۱-۱ معادلات میدان گرانشی

معادلات میدان گرانشی معرفی شده توسط اینشتین به شکل زیر می‌باشند:

$$G_{\mu\nu} = -8\pi T_{\mu\nu} \qquad (۱-۱)$$

با در نظر گرفتن جمله‌ی ثابت کیهان‌شناسی این معادلات بدین صورت بیان می‌شوند:

$$G_{\mu\nu} = -8\pi T_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu}. \qquad (۱-۲)$$

در صورت وجود میدان الکترومغناطیس معادلات میدان اینشتین، به معادلات میدان اینشتین-ماکسول شناخته می‌شوند

$$G_{\mu\nu} = -8\pi T_{\mu\nu} - 8\pi E_{\mu\nu} \qquad (۱-۳)$$

که در آنها $G_{\mu\nu}$ تانسور اینشتین، $T_{\mu\nu}$ تانسور انرژی-تکانه، Λ ثابت کیهان‌شناسی و $E_{\mu\nu}$ تانسور انرژی-تکانه‌ی ماکسول بوده که به صورت زیر بیان شده است:

$$E_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}(-g^{\alpha\beta}F_{\alpha\mu}F_{\beta\nu} + \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}) \qquad (۱-۴)$$

و $F_{\alpha\beta}$ تانسور میدان الکترومغناطیسی می‌باشد

$$F_{\alpha\beta} = \Phi_{\beta,\alpha} - \Phi_{\alpha,\beta} \qquad (۱-۵)$$

که Φ_α چارپتانسیل می‌باشد.

معادلات ماکسول را می توان به شکل زیر نوشت:

$$F^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = -۴\pi J^\alpha \qquad (۶-۱)$$

$$F_{\alpha\beta,\sigma} + F_{\sigma\alpha,\beta} + F_{\beta\sigma,\alpha} = ۰ \qquad (۷-۱)$$

و همچنین J^α چارجریان می‌باشد [۱][۲].

۱-۲ متریک‌ها

۱-۲-۱ متریک شوارتزشیلد

کمتر از یک سال بعد از انتشار نظریه‌ی نسبیت عام توسط اینشتین، شوارتزشیلد[۱] اولین حل دقیق معادلات میدان خلاء اینشتین را با فرض تقارن کروی متریک ارائه داد. که نتیجه‌ی آن معرفی عنصر طول (یا متریک) شواتزشیلد بود.

$$ds^۲ = (۱ - \frac{۲m}{r})dt^۲ - (۱ - \frac{۲m}{r})^{-۱}dr^۲ - r^۲(d\theta^۲ + \sin^۲\theta d\varphi^۲) \qquad (۸-۱)$$

که در آن m ثابت انتگرال گیری و وابسته به جرم چشمه‌ی میدان گرانشی (M) است و به نام جرم هندسی شناخته می‌شود.

$$m = \frac{GM}{c^۲}$$

از ویژگی‌های حل شوارتزشیلد ایستا بودن متریک آن است. همچنین هنگامی که $r \to \infty$، متریک شوارتزشیلد به متریک فضای تخت نسبیت خاص در دستگاه مختصات کروی تبدیل می‌شود

$$ds^۲ = dt^۲ - dr^۲ - r^۲(d\theta^۲ + \sin^۲\theta d\varphi^۲). \qquad (۹-۱)$$

متریک شوارتزشیلد می‌تواند برای بیرون یک شیئ با تقارن کروی مانند یک ستاره بکار رود به‌طوری‌که شعاع ستاره بزرگتر از $۲m$ باشد؛ از این رو این حل به حل بیرونی شوارتزشیلد نیز معروف است [۱].

۱-۲-۲ دستگاه مختصات ادینگتون-فینکلشتاین

ژئودزیک‌های (کِهین‌ره‌های) نول با انتگرال گیری از معادله‌ی $ds = ۰$ بدست می‌آیند. از این رو با اعمال این فرایند در متریک شوارتزشیلد جهت یافتن این کِهین‌ره‌ها (ژئودزیک‌ها)، برای پرتوهای شعاعی نور

[۱] Schwarzschild

($d\theta = d\varphi = ۰$) داریم:

$$t = \pm(r + ۲m\ln(|\frac{r}{۲m} - ۱|)) + constant \qquad (۱۰-۱)$$

متریک شوارتزشیلد در $r = ۲m$ دارای تکینگی مختصاتی است که با تغییر دستگاه مختصات این تکینگی از بین می‌رود. بنابراین با توجه به معادله‌ی (۱-۱۰)، مختصه‌های جدید زیر را تعریف می‌کنیم:

$$u = t + r + ۲m\ln|\frac{r}{۲m} - ۱| \qquad (۱۱-۱)$$

$$v = t - r - ۲m\ln|\frac{r}{۲m} - ۱| \qquad (۱۲-۱)$$

در معادلات بالا کِهین‌ره نول یا نور ورودی با $u = constant$ و کِهین‌ره نول یا نور خروجی با $v = constant$ تعیین می‌شوند.

با جایگذاری u (زمان پیش‌افتاده) به جای زمان شوارتزشیلد (t)، دستگاه مختصات ادینگتون-فینکلشتاین[۲] ورودی، (u, r, θ, φ)، بدست می‌آید. متریک در این دستگاه به شکل زیر می‌باشد:

$$ds^۲ = (۱ - \frac{۲m}{r})du^۲ - dudr - r^۲(d\theta^۲ + \sin^۲\theta d\varphi^۲) \qquad (۱۳-۱)$$

این دستگاه مختصات، به ویژه برای توصیف رمبش گرانشی، در فضای خلاء (بدون تابش و یا ماده) مفید است.

با جایگذاری v (زمان پس‌افتاده) به جای زمان شوارتزشیلد (t)، دستگاه مختصات ادینگتون-فینکلشتاین خروجی، (v, r, θ, φ)، بدست می‌آید. متریک در این دستگاه به شکل زیر می‌باشد:

$$ds^۲ = (۱ - \frac{۲m}{r})dv^۲ + dvdr - r^۲(d\theta^۲ + \sin^۲\theta d\varphi^۲) \qquad (۱۴-۱)$$

همان طور که مشخص است این متریک‌ها، در $r = ۲m$ دیگر تکینگی ندارند [۳].

۱-۲-۳ متریک وایدیا

در آغاز عنصر طول شوارتزشیلد را در دستگاه مختصات ادینگتون-فینکلشتاین ورودی به شکل زیر می‌نویسیم:

$$ds^۲ = fdu^۲ - dudr - r^۲(d\theta^۲ + \sin^۲\theta d\varphi^۲) \qquad (۱۵-۱)$$

و اجازه می‌دهیم m تابعی از زمان پیش‌افتاده‌ی u باشد

$$f = ۱ - \frac{۲m(u)}{r}. \qquad (۱۶-۱)$$

در این صورت متریک بالا(۱-۱۵) به متریک وایدیای[۳] ورودی [۴] شناخته می‌شود.

تنها مولفه‌ی غیر صفر تانسور اینشتین این متریک عبارت است از:

---

[۲] Eddington-Finkelstein

[۳] vaidya

$$G_{00} = G_{uu} = -\frac{2\frac{dm(u)}{du}}{r^2}$$

وجود این مؤلفه بدان معناست که از حل معادلات میدان اینشتین(۱-۱)، باید تانسور انرژی-تکانه‌ای به شکل زیر وجود داشته باشد:

$$T_{\mu\nu} = \frac{\frac{dm(u)}{du}}{4\pi r^2} l_\mu l_\nu \qquad (۱-۱۷)$$

که در آن $l_\mu = u_{,\mu}$، بردار مماس بر کهین‌ره‌های نول شعاعی ورودی است. این تانسور انرژی-تکانه یک غبار نول و یا به عبارت دیگر، یک شار بدون فشار با چگالی انرژی $\frac{2\frac{dm(u)}{du}}{4\pi r^2}$ و چارسرعت l^μ می‌باشد. این متریک بیشتر برای بررسی ستاره‌ی تحت تابش (غبار نول ورودی) که جرم آن نسبت به زمان u افزایش می‌یابد بکار می‌رود.

حال به بررسی متریک وایدیای خروجی می‌پردازیم. در این مورد عنصر طول شوارتزشیلد را در دستگاه مختصات ادینگتون-فینکلشتاین خروجی به شکل زیر می‌نویسیم:

$$ds^2 = f dv^2 + dvdr - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \qquad (۱-۱۸)$$

که در آن m تابعی از زمان پس‌افتاده‌ی v می‌باشد؛ درنتیجه این بار تابع f بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$f = 1 - \frac{2m(v)}{r} \qquad (۱-۱۹)$$

مانند روش قبل از حل معادلات میدان اینشتین، تانسور انرژی-تکانه‌ای به شکل زیر بدست خواهد آمد:

$$T_{\mu\nu} = -\frac{\frac{dm(v)}{dv}}{4\pi r^2} l_\mu l_\nu \qquad (۱-۲۰)$$

که در آن $l_\mu = v_{,\mu}$ بردار مماس بر کهین‌ره‌های نول شعاعی خروجی است. این تانسور انرژی-تکانه یک شار بدون فشار با چگالی انرژی $\mu = -\frac{\frac{dm(v)}{dv}}{4\pi r^2}$ و با چارسرعت l^μ، و یا همان غبار نول خروجی، می‌باشد. می‌توان فهمید تابعیت $\frac{1}{r^2}$ در چگالی انرژی با پایستگی انرژی-تکانه همخوانی دارد. همچنین از شرط انرژی $\mu > 0$ می‌توان نتیجه گرفت که $\frac{dm(v)}{dv} < 0$ ، یعنی با افزایش زمان v جرم m کاهش می‌یابد [۵].

این متریک برای ستاره‌ی درحال رمبش با تقارن کروی، که مقدار قابل توجه‌ای از جرم آن توسط تابش الکترومغناطیس و یا تابش فراوان نوترینو (مثلاً مرکز اَبَرنواختر در حال رمبش) از دست می‌رود، بسیار مناسب است [۳][۶].

۱-۲-۴ حل رایسنر-نوردسترم

اگر معادلات میدان اینشتین-ماکسول (۲-۲) را با فرض تقارن کروی متریک برای فضای خالی از ماده حل کنیم، به حل رایسنر-نوردسترم[۴] خواهیم رسید

$$ds^2 = (1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2})dt^2 - (1 - \frac{2m}{r} + \frac{Q^2}{r^2})^{-1}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (۲۱-۱)$$

که در آن Q یک ثابت انتگرال گیری است و وابسته به بار چشمه می‌باشد، و m نیز همان جرم هندسی است.

متریک رایسنر-نوردسترم برای توصیف یک شئ کروی باردار مانند یک ستاره‌ی باردار بسیار مناسب است. این متریک مانند متریک شوارتزشیلد، یک متریک ایستاست و همچنین در صورتی که $r \to \infty$ به متریک فضای تخت در دستگاه مختصات کروی تبدیل می‌شود [۱].

۱-۲-۵ متریک FLRW

حل FLRW [۵]حل دقیقی از معادلات میدان اینشتین در نسبیت عام است. این حل جهان را فضایی همگن و همسانگرد فرض می‌کند و بر اساس تلاش چهار فیزیک‌دان به نام‌های فریدمان، لومتر، رابرتسون و واکر توصیف شد.

همگنی و همسانگردی فضا از اصل کیهان‌شناختی نتیجه می‌شود. این اصل می‌گوید که، بجز در ناهماهنگی‌های محلی، در هر زمان؛ از دید همه‌ی ناظرها، جهان شکل یکسان خواهد داشت [۱].

از طرفی در اصل موضوع وایل[۶]، جهان‌خط‌های زمان گونه‌ی ناظرهای بنیادی [۷] به صورت دسته مسیرهایی در فضازمان فرض می‌شود که از یک نقطه در گذشته (گذشته کران‌دار یا بی‌کران) آغاز می‌شوند و به نقطه‌ای در آینده (آینده‌ی کران‌دار یا بی‌کران) پایان می‌یابند. به عبارت دیگر بجز در نقاط تکین گذشته و یا آینده این جهان‌خط‌ها یکدیگر را قطع نمی‌کنند [۷] ؛ پس می‌توان فرض کرد ماده‌ی کیهانی مانند یک شاره‌ی کامل عمل می‌کند. در نتیجه‌ی این اصل موضوع، جهان‌خط‌ها بر اَبَرسطح‌های فضاگونه‌ی $t = constant$ (=زمان) عمود می‌باشند و دستگاه مختصات این ناظر یک دستگاه مختصات همراه ذره می‌شود. از این رو زمان t، زمان کیهانی یا زمان جهانی است.

در نهایت از اصل کیهان‌شناختی واصل موضوع وایل می‌توان متریک FLRW را بدست آورد

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\Big(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)\Big) \quad (۲۲-۱)$$

---

[۴] Reissner-Nordestrom

[۵] Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker

[۶] Weyl

[۷] ناظری که سرعت خاصّه‌ی آن صفر باشد، برای مثال، این ناظر هیچ گشتاور دوقطبی‌ای از تابش زمینه‌ی کیهانی نخواهد دید.

که در آن $a(t)$ ضریب مقیاس و k یک مقدار ثابت است و می‌تواند مقادیر $1, 0, -1$ را بگیرد. و با استفاده از تبدیل زیر:

$$r = \frac{\bar{r}}{1 + \frac{1}{4}k\bar{r}^2}$$

دستگاه مختصات به $(t, \bar{r}, \theta, \varphi)$ تغییر می‌یابد و شکل متریک به صورت زیر می‌شود:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\frac{d\bar{r}^2 - \bar{r}^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)}{(1 + \frac{1}{4}k\bar{r}^2)^2} \qquad (۲۳-۱)$$

و باز از اصل موضوع وایل می‌توان تانسور انرژی-تکانه را به صورت زیر نوشت (شاره‌ی کامل):

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu - pg_{\mu\nu} \qquad (۲۴-۱)$$

که در آن ρ و p به ترتیب چگالی و فشار و u_μ چارسرعت می‌باشند.

حال با استفاده از معادلات میدان اینشتین(۱-۱)، متریک FLRW و تانسور انرژی-تکانه، و با فرض $p = 0$ می‌توان معادله‌ی فریدمان را بدست آورد

$$\dot{a}^2 = \frac{C}{a} + \frac{1}{3}\Lambda a^2 - k \qquad (۲۵-۱)$$

که $C = \frac{8\pi}{3}\rho a^3$، نشان دهنده‌ی انرژی داخل حجم $V = \frac{4\pi}{3}a^3$ می‌باشد [۱].

این متریک علاوه بر توصیف کیهان گزینه‌ی خوبی برای توصیف درون یک ستاره‌ی ایده‌آل است. با این تفاوت که شاره‌ی کامل در این مورد شاره‌ی گاز درون ستاره می‌باشد.

۱-۲-۶ متریک شبه فریدمان

شکل کلی یک متریک همراه ذره به صورت زیراست [۸]:

$$ds^2 = dt^2 - B^2(r,t)(dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)) \qquad (۲۶-۱)$$

در صورت وجود همگنی باید، $B(r,t)$ برابر $a(t)b(r)$ باشد و متریک بالا به متریک FLRW تبدیل شود؛ در غیر این صورت متریک، در شکل عام‌تر، گویای یک جهان ناهمگن است. چون در این حالت اصل کیهان شناختی نقض می‌شود پس تنها ناظر در مرکز، جهان را همسانگرد می‌بیند. مطابق با حل فریدمان، در این مورد، تانسور انرژی-تکانه در معادلات میدان اینشتین فراتر از یک شاره‌ی کامل است.

برای یافتن شکل تابع $B(r,t)$، ابتدا آن را به صورت $a(t)A(r,t)$ می‌نویسیم؛ پس برای متریک همراه ذره داریم:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)A^2(r,t)\Big(dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)\Big) \qquad (۲۷-۱)$$

و یا:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)d\sigma^2 \qquad (۲۸-۱)$$

که $d\sigma^۲-$ عنصر طول فضاگونه‌ی زیرفضای سه‌بعدی متریک بالا می‌باشد. حال عدد ریچی [۸] را برای این زیرفضا بدست می‌آوریم

$$R=\frac{۲[A'^۲r-۴AA'-۲ArA'']}{A^۴r}. \qquad (۱-۲۹)$$

$A=A(r,t)$ و $A'=\frac{\partial A(r,t)}{\partial r}$ است. برای فضای همگن $A(r,t)=b(r)$ می‌باشد و خمش فضا یک مقدار ثابت می‌شود؛ در نتیجه R یک مقدار ثابت است

$$R=constant=۶K$$

که در آن K را عدد خمش می‌نامند. در این حالت با انتگرال گیری از معادله‌ی دیفرانسیل (۱-۲۹)، $b(r)$ به شکل زیر بدست می‌آید [۱]

$$b(r)=\frac{۱}{۱+\frac{۱}{۴}Kr^۲}. \qquad (۱-۳۰)$$

که متریک همان متریک FLRW می‌شود.

در مقایسه با فضای همگن می‌توان نتیجه گرفت، برای فضای ناهمگن، این بار با انتگرال گیری از معادله‌ی (۱-۲۹) عدد ریچی باید تابعی از زمان باشد

$$R=۶K(t).$$

پس در نهایت خواهیم داشت :

$$A(r,t)=\frac{۱}{۱+\frac{۱}{۴}K(t)r^۲} \qquad (۱-۳۱)$$

در نتیجه برای فضای ناهمگن متریک به صورت زیر می‌شود:

$$ds^۲=dt^۲-\frac{a(t)^۲}{۱+\frac{۱}{۴}K(t)r^۲}\Big(dr^۲+r^۲(d\theta^۲+\sin^۲\theta d\varphi^۲)\Big) \qquad (۱-۳۲)$$

و یا شکل دیگر آن [۱۰]:

$$ds^۲=dt^۲-a^۲(t)\Big(\frac{dr^۲}{۱-k(t)r^۲}+r^۲(d\theta^۲+\sin^۲\theta d\varphi^۲)\Big) \qquad (۱-۳۳)$$

در اصل، از لحاظ فیزیکی، آنچه که باعث تغییر یک متریک همگن فریدمان به متریک ناهمگن شبه‌فریدمان می‌شود، به عنصرهای تانسور انرژی-تکانه برمی‌گردد. در این مورد در فصل‌های بعدی بیشتر توضیح خواهیم داد [۱۱].

---

[۸] Ricci scalar

۱-۲-۷ فضازمان دوسیته

برای بدست آوردن این فضازمان کافی است معادله‌ی فریدمان (۱-۲۵) را با فرض $p = \rho = k = 0$ حل کنیم:

$$\frac{\dot{a}}{a} = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} \qquad (۱-۳۴)$$

حال با انتگرال گیری از دوطرف معادله‌ی بالا داریم:

$$a = C\exp(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t) \qquad (۱-۳۵)$$

که C ثابت انتگرال گیری می‌باشد. با انتخاب مرکز در $t = 0$ و $a(t) = 1$، C برابر یک خواهد شد. در نتیجه عنصر طول FLRW در فضازمان دوسیته[۹] به صورت زیر است:

$$ds^2 = dt^2 - \exp(2\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t)(dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)) \qquad (۱-۳۶)$$

با تغییر دستگاه مختصات FLRW، خواهیم داشت [۱]:

$$ds^2 = (1 - \frac{\Lambda}{3}r^2)dt^2 - (1 - \frac{\Lambda}{3}r^2)^{-1}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \qquad (۱-۳۷)$$

از طرفی با لحاظ کردن ثابت کیهان‌شناسی در روند حل شوارتزشیلد [۱]، از عنصر طول شوارتزشیلد به عنصر طول فضازمان دوسیته-شوارتزشیلد می‌رسیم [۸]

$$ds^2 = (1 - \frac{2m}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2)dt^2 - (1 - \frac{2m}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2)^{-1}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \qquad (۱-۳۸)$$

در صورتی که جرم هندسی m برابر صفر شود به عنصر طول فضا زمان دوسیته (۱-۳۷) خواهیم رسید. این متریک نشان دهنده‌ی تاثیر ثابت کیهان شناسی در فضازمان خلاء، با فرض تقارن کروی می‌باشد.

۱-۲-۸ متریک رایسنر-نوردستروم، دوسیته، وایدیا

در صورتی که بخواهیم متریک بیرون یک ستاره‌ی باردار وتابشی را با فرض وجود ثابت کیهان‌شناسی بررسی کنیم، با توجه به متریک‌های بیان شده در بخش های قبلی، مناسب است برای توصیف فضازمان این ستاره ترکیب این متریک‌ها را بکار بریم، از اینرو از متریک رایسنر-نوردستروم، دوسیته، وایدیا استفاده می‌کنیم

$$ds^2 = fdv^2 + dvdr - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \qquad (۱-۳۹)$$

[۹] de Sitter

که در آن

$$f = ۱ - \frac{۲m(v)}{r} + \frac{Q^۲}{r^۲} - \frac{\Lambda}{۳} r^۲. \qquad (۱-۴۰)$$

همان طور که قبلاً اشاره شد شکل عنصر طول نماینده‌ی تابشی بودن ستاره و پارامترهای Q و Λ نشان دهنده‌ی بار و ثابت کیهان‌شناسی می‌باشند. در فصل‌های بعد از این متریک برای توصیف فضازمان بیرون ستاره استفاده خواهیم کرد.

فصل ۲

سطوح مرزی و شرایط اتصال در نسبیت عام

در این فصل به معرفی شرایط اتصال خمینه‌های فضازمان در نسبیت عام می پردازیم.

۲-۱ معرفی شرایط اتصال

دو خمینه‌ی لورنتسی فضازمان M^+ و M^- مفروض است؛ مختصات چهار بعدی x^μ_+ و x^μ_- به طور مستقل روی خمینه‌های نظیر تعریف شده و همچنین متریک‌های دو خمینه به صورت $g^+_{\mu\nu}(x^\mu_+)$ و $g^-_{\mu\nu}(x^\mu_-)$ درنظر گرفته شده‌اند. درون هرکدام از دو خمینه‌ی M^+ و M^-، به ترتیب دو اَبَرسطح سه بعدی غیر نورگونه Σ^+ و Σ^- با متریک‌های $h^+_{ij}(\zeta^c_+)$ و $h^-_{ij}(\zeta^c_-)$ در مختصات سه بعدی ζ^c_+ و ζ^c_- تعریف نموده، به طوری که هریک از این دو خمینه را به دو بخش مجزا از یکدیگر تقسیم نمایند. دو بخش مجزا شده‌ی خمینه‌ی M^+ را به صورت M^+_1 و M^+_2 و همچنین خمینه‌ی M^- را به صورت M^-_1 و M^-_2 نام‌گذاری می‌کنیم. در هنر اتصال دو خمینه، با وصل کردن یکی از دو بخش مجزای M^+ به یکی از دو بخش جدا شده‌ی M^-، و بر روی هم نهادن مرزهای نظیر به صورت $\Sigma^+ = \Sigma^- \equiv \Sigma$ (با یکسان نمودن مختصات $\zeta^+ = \zeta^- \equiv \zeta$) خمینه‌ی جدید M به دست می‌آید. روشن است که در این فرایند، چهار نوع اتصال به صورت $M^+_1 \cup M^-_1$، $M^+_1 \cup M^-_2$، $M^+_2 \cup M^-_1$ و $M^+_2 \cup M^-_2$ می تواند ساخته شود [۱۲] (شکل ۲-۱).