دانشگاه بیرجند

دانشکده علوم ریاضی و آمار

گروه ریاضی

**پایان‌نامه کارشناسی ارشد**

**ریاضی کاربردی، گرایش آنالیزعددی**

**عنوان**

# تجزیه‌ی شبه-*LDU*ی ماتریس‌های جمعاً نامثبت نامنفرد

استاد راهنما

**دکتر مهدی پناهی**

استاد مشاور

**دکتر مسعود امان**

نگارنده

**سیده ملیحه موسوی**

شهریور ۱۳۹۳

تقدیم به

پدر بزرگوارم،

مادر مهربانم،

همسر عزیزم

و به همه ی کسانیکه مرا در نگارش این پایان نامه یاری دادند.

## خدایا...[1]

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مُردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آنچنان که تو دوست می‌داری.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که شکنجه دیدن بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگی من است، از شادی توست که من در دل می‌خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته‌ام می‌درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه‌هایم احساس می‌کنم. نمی‌توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله‌های ضعیف و افتاده، پنهان کرده‌ام دریاب، دریاب.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که زندگی از تحمیل لبخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از برانگیختن موج شعفی در دل من، عاجز است.

تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت.

به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی‌همراه، جهاد بی‌سلاح، کار بی‌پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی‌دنیا، مذهب بی‌عوام، عظمت بی‌نام، خدمت بی‌نان، ایمان بی‌ریا، خوبی بی‌نمود، گستاخی بی‌خامی، قناعت بی‌غرور، عشق بی‌هوس، تنهایی در انبوه جمعیت، و دوست داشتن بی‌آنکه دوست بداند، روزی کن.

*اگر تنهاترین تنها شوم، باز خدا هست*

*او جانشین همه نداشتن‌هاست...*

[1] مناجاتی از دکتر علی شریعتی.

# سپاس‌گزاری

نخستین سپاس و ستایش از آن خداوندی است که بنده کوچکش را در دریای بیکران اندیشه، قطره‌ای ساخت تا وسعت آن را از دریچه‌ی اندیشه‌های ناب آموزگارانی بزرگ به تماشا نشیند. لذا اکنون که در سایه سار بنده نوازی‌هایش پایان‌نامه حاضر به انجام رسیده است، برخود لازم می‌دانم تا مراتب سپاس را از بزرگوارانی به جا آورم که اگر دست یاری‌گرشان نبود، هرگز این پایان‌نامه به انجام نمی‌رسید.

از استاد گرانقدرم جناب آقای دکتر مهدی پناهی که با راهنمایی‌ها و هدایت‌های گرانبهایشان مرا در تدوین این پایان‌نامه یاری فرمودند، کمال سپاس را دارم .

همچنین از استاد عالی‌قدرم جناب آقای دکتر مسعود امان که زحمت مشاوره این پایان‌نامه را متحمل شدند، صمیمانه تشکر می‌کنم.

از اساتید بزرگوار جناب آقای دکتر اسداله محمود زاده وزیری و سرکار خانم دکتر نسیم نصرآبادی که قبول زحمت فرمودند و داوری این پایان‌نامه را به عهده گرفتند، کمال تشکر را دارم.

از جناب آقای دکتر حسین فضائلی مقیمی نماینده محترم تحصیلات تکمیلی که در جلسه‌ی دفاع این‌جانب حضور داشتند تشکر می‌کنم.

سپاس آخر را به مهربانترین همراهان زندگیم، به پدرم ، مادرم و همسر عزیزم تقدیم می‌کنم که حضورشان در فضای زندگیم مصداق بی ریای سخاوت بوده است.

سیده ملیحه موسوی

شهریور ۱۳۹۳

# چکیده


فرض کنید $A=(a_{ij})\in\mathbb{R}^{n\times n}$ یک ماتریس جمعاً نامثبت نامنفرد باشد. در این تحقیق برخی خواص این رده از ماتریس‌ها وقتی $a_{11}=0$ ارائه می‌شوند و مشخص‌سازی بر حسب تجزیه‌ی شبه-$LDU$ی $A$، که در آن $L$ یک ماتریس پایین مثلثی بلوکی، $D$ یک ماتریس قطری و $U$ ماتریسی بالا مثلثی واحد می‌باشد، به دست می‌آید.



واژگان کلیدی: تجزیه‌ی $LDU$، ماتریس مثلثی، ماتریس جمعاً نامثبت


تعداد صفحات پایان نامه: ۵۳

# فهرست مطالب

# پیش گفتار

برای $k,n \in \mathbb{N}$، که $1 \leq k \leq n$، $Q_{k,n}$ به صورت مجموعه‌ای از همه‌ی دنباله‌های اکیداً صعودی از $k$ عدد طبیعی کوچکتر یا مساوی $n$ تعریف می‌شود.
برای $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k), \beta = (\beta_1, \dots, \beta_k) \in Q_{k,n}$ زیرماتریس $k \times k$ از ماتریس $n \times n$، حقیقی $A$، شامل سطرهای $\alpha_1$، ...، $\alpha_k$ و ستون‌های $\beta_1$، ...، $\beta_k$ را با $A[\alpha|\beta]$ نشان داده و دترمینان آن را یک مینور $A$ می‌نامیم .
ماتریس $n \times n$، حقیقی مقدار $A$، جمعاً نامنفی (مثبت) نامیده می‌شود، هرگاه

$$\det A[\alpha|\beta] \geq 0 (> 0), \quad \forall \alpha, \beta \in Q_{k,n}, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

و آن را با $TP$ نشان می‌دهند. این نوع ماتریس‌ها کاربرد وسیعی در علوم مختلف مانند آمار، اقتصاد، کامپیوتر و سایر رشته‌ها دارند [۷، ۱۱]. این ماتریس‌ها در [۱، ۷] مطالعه شده‌اند.
همچنین ماتریس $n \times n$، حقیقی مقدار $A$، جمعاً نامثبت (جمعاً منفی) نامیده می‌شود، هرگاه

$$\det A[\alpha|\beta] \leq 0 (< 0), \quad \forall \alpha, \beta \in Q_{k,n}, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

و آن را با $t.n.p.$ ($t.n.$) نشان می‌دهند.
برای ماتریس‌های $t.n.$، ویژگی‌های طیفی و تجزیه‌ی $LDU$ی آن‌ها، در [۱۲] بررسی شده است.
یک مشخص‌سازی برای ماتریس‌های $t.n.p.$ نامنفرد با درایه‌های $(1, 1)$ و $(n, n)$ صفر برحسب علامت مینورهایی که از سطرها یا ستون‌های متوالی ماتریس تشکیل شده و به ترتیب شامل سطر یا ستون اول آن می‌باشند، در [۱۰] به دست آمده است. علاوه بر این مشخص‌سازی به وسیله‌ی مینورها برای ماتریس‌های $t.n.p.$ مستطیلی با استفاده از تجزیه‌ی رتبه کامل به شکل پلکانی واحد آن‌ها در [۳]، بررسی شده است.
در این تحقیق ابتدا روش حذفی گاوس بیان می‌شود، سپس مشخص‌سازی‌هایی برای ماتریس‌های جمعاً نامثبت نامنفرد برحسب تجزیه‌ی $LDU$ی (شبه–$LDU$ی) آن‌ها و به وسیله‌ی مینورها ارائه می‌شوند. در پایان برخی خواص این نوع ماتریس‌ها بررسی می‌شود.
این تحقیق به صورت زیر سازمان‌دهی شده است.
در فصل اول نمادها، تعاریف اولیه و قضایایی را که در روند تحقیق به کار گرفته شده و آشنایی با آن‌ها برای مطالعه و درک مطالب مؤثر است، بیان می‌کنیم.
در فصل دوم ابتدا تجزیه‌ی $LDU$ و سپس مشخص‌سازی ماتریس‌های جمعاً نامثبت نامنفرد بر

حسب این تجزیه بیان می‌شود، در پایان این فصل مشخص‌سازی دیگری از این رده از ماتریس‌ها به وسیله‌ی مینورها ارائه می‌گردد.
در فصل سوم تجزیه شبه-$LDU$ی ماتریس‌های جمعاً نامثبت نامنفرد و مشخص‌سازی‌هایی از این نوع ماتریس‌ها بر حسب این تجزیه ارائه شده‌اند.
در پایان برخی از ویژگی‌های ماتریس‌های جمعاً نامثبت نامنفرد در فصل چهارم بیان شده است.
در سراسر این تحقیق تجزیه‌ی $LDU$ تجزیه‌ی حاصل از روش حذفی گاوس بدون محورگیری است، که $L$ ماتریس پایین مثلثی واحد، $D$ ماتریس قطری و $U$ ماتریس بالا مثلثی واحد است.

# فصل ۱
# تعاریف و نتایج مقدماتی

.

## ۱.۱ نمادها، تعاریف اولیه و قضایای مقدماتی

در این بخش برخی نمادها، تعاریف و قضایای مقدماتی که برحسب نیاز در فصل‌های بعدی مورد استفاده قرار خواهند گرفت را بیان می‌کنیم.
مجموعه‌ی همه‌ی ماتریس‌های حقیقی $m \times n$ را با $\mathbb{R}^{m\times n}$ و مجموعه‌ی همه‌ی ماتریس‌های حقیقی مربعی مرتبه‌ی $n$ را با $\mathbb{R}^{n\times n}$ نشان می‌دهیم.

**تعریف ۱.۱.۱.** ماتریس‌های $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ و $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ را در نظر بگیرید. در این صورت

۱. ترانهاده‌ی $B$ ماتریسی $n \times m$ است که آن را با $B^T$ نشان داده و به صورت

$$B^T = (b_{ji}),$$

تعریف می‌شود.

۲. ماتریس $A$ بالا مثلثی (پایین مثلثی) نامیده می‌شود هرگاه برای هر $i > j$ ( $j > i$ )، $a_{ij} = 0$.

۳. ماتریس $A$ متقارن است هرگاه

$$a_{ij} = a_{ji}, \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

۴. ماتریس $A$ منفرد نامیده می‌شود هرگاه $\det A = 0$، در غیر این صورت آن را نامنفرد می‌نامند.

**تعریف ۲.۱.۱.** ماتریس $n \times n$، قطری $D$، با $D = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$، نشان داده می‌شود که در آن $d_1$، $d_2$، $\ldots$، $d_n$ درایه‌های قطری و سایر درایه‌های آن صفر هستند.

**تعریف ۳.۱.۱.** ماتریس $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ که از تعویض سطرهای (یا ستون‌های) ماتریس همانی به دست می‌آید، یک ماتریس جایگشت نامیده می‌شود.

ضرب ماتریس جایگشت $P$ از چپ (از راست) در ماتریس $A$ باعث تعویض سطرهای (ستون‌های) آن می‌شود. اگر $P$ یک ماتریس جایگشت باشد، آن‌گاه $P^T P = I$.

**مثال ۴.۱.۱.** فرض کنید ماتریس جایگشت $P$ و ماتریس $A$ به صورت

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 9 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

باشند. در این صورت

$$AP = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 9 & -2 & 0 \end{pmatrix}, PA = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 9 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**تعریف ۵.۱.۱.** برای $k, n \in \mathbb{N}$، که $1 \leq k \leq n$، $Q_{k,n}$ به صورت مجموعه‌ای از همه‌ی دنباله‌های اکیداً صعودی از $k$ عدد طبیعی کوچکتر یا مساوی $n$، تعریف می‌شود، یعنی

$$Q_{k,n} = \{\alpha | \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k), 1 \leq k \leq n, \alpha_i \in \mathbb{N} \;\; \forall i, 1 \leq \alpha_1 < \ldots < \alpha_k \leq n\}.$$

وقتی اعداد طبیعی دنباله‌های فوق متوالی نیز باشند، مجموعه‌ی فوق با $Q^{\circ}_{k,n}$ نمایش داده می‌شود [۳].

تعداد اعضای مجموعه‌ی $Q_{k,n}$ برابر است با

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

و تعداد اعضای مجموعه‌ی $Q^{\circ}_{k,n}$ برابر است با $n - (k-1)$.

**مثال ۶.۱.۱.** برای $n = 5$ و $k = 1, 4$، داریم

$$Q_{1,5} = \{1, 2, 3, 4, 5\},$$

$$Q_{4,5} = \{(1, 2, 3, 4), (1, 2, 3, 5), (1, 2, 4, 5), (1, 3, 4, 5), (2, 3, 4, 5)\},$$

تعداد اعضای مجموعه‌های $Q_{۱,۵}$ و $Q_{۴,۵}$ به ترتیب برابر است با $۵ = \binom{۵}{۱}$ و $۵ = \binom{۵}{۴}$. همچنین

$$Q^{\circ}_{۳,۵} = \{(۱,۲,۳), (۲,۳,۴), (۳,۴,۵)\},$$

و تعداد اعضای $Q^{\circ}_{۳,۵}$ برابر است با $۳ = (۱ - ۳) - ۵$.

**تعریف ۷.۱.۱.** برای هر $\alpha \in Q_{k,n}$ عدد پراکندگی آن را با $d(\alpha)$ نشان داده و به صورت

$$d(\alpha) = \sum_{i=۱}^{k-۱}(\alpha_{i+۱} - \alpha_i - ۱) = \alpha_k - \alpha_۱ - (k-۱).$$

تعریف می‌کنیم، با این قرار داد که برای $\alpha \in Q_{۱,n}$، $d(\alpha) = ۰$.

مشاهده می‌کنیم که $d(\alpha) = ۰$، به این معنی است که $\alpha$ شامل $k$ عدد صحیح متوالی است.

**مثال ۸.۱.۱.** فرض کنید $\alpha = (۱,۳,۵), \beta = (۲,۳,۴) \in Q_{۳,۵}$. در این صورت

$$d(\alpha) = ۲, \quad d(\beta) = ۰.$$

**تعریف ۹.۱.۱.** برای $\alpha = (\alpha_۱, \ldots, \alpha_k), \beta = (\beta_۱, \ldots, \beta_k) \in Q_{k,n}$ و $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$، زیرماتریس $k \times k$، از $A$ شامل سطرهای $\alpha_۱$، ...، $\alpha_k$ و ستون‌های $\beta_۱$، ...، $\beta_k$ را با $A[\alpha|\beta]$ نشان داده و دترمینان آن را یک مینور $A$ می‌نامیم. اگر $\alpha = \beta$ آن‌گاه $A[\alpha|\beta]$ را با $A[\alpha]$ نشان داده و آن را یک زیر ماتریس اصلی $A$ می‌گوییم [۸].

زیر ماتریس‌های اصلی $A[۱,۲,\ldots,k]$، $k = ۱,۲,\ldots,n$، زیر ماتریس‌های اصلی پیشروی $A$ نامیده می‌شوند. مینوری به صورت $\det A[۱,۲,\ldots,k]$، $k = ۱,۲,\ldots,n$ را مینور اصلی پیشرو از مرتبه‌ی $k$ برای ماتریس $A$ می‌نامند.

**مثال ۱۰.۱.۱.** فرض کنید

$$A = \begin{pmatrix} ۱ & ۳ & ۴ & ۵ \\ ۲ & ۴ & ۱ & ۶ \\ ۳ & ۵ & ۲ & ۴ \\ ۵ & ۳ & ۱ & ۲ \end{pmatrix},$$

و $\alpha = (۱,۲,۴)$، $\beta = (۲,۳,۴)$ . در این صورت

$$A[\alpha|\beta] = A[۱,۲,۴|۲,۳,۴] = \begin{pmatrix} ۳ & ۴ & ۵ \\ ۴ & ۱ & ۶ \\ ۳ & ۱ & ۲ \end{pmatrix},$$

و با فرض $\alpha = (۳, ۴)$

$$A[\alpha] = A[۳, ۴] = \begin{pmatrix} ۲ & ۴ \\ ۱ & ۲ \end{pmatrix}.$$

همچنین مینور اصلی پیشرو از مرتبه‌ی ۳ به صورت

$$\det A[۱, ۲, ۳] = \det \begin{pmatrix} ۱ & ۳ & ۴ \\ ۲ & ۴ & ۱ \\ ۳ & ۵ & ۲ \end{pmatrix} = -۸.$$

می‌باشد.

**تعریف ۱.۱.۱۱.** یک مینور ستون ـ اول (سطر ـ اول ) از ماتریس $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$، مینوری به شکل $\det A[\omega|۱, ۲, \dots, k]$ ( $\det A[۱, ۲, \dots, k|\omega]$) می‌باشد که $\omega \in Q_{k,n}$، با $d(\omega) = ۰$ و $۱ \leq k \leq n$.

**مثال ۱.۱.۱۲.** فرض کنید

$$A = \begin{pmatrix} ۱ & ۵ & ۶ & ۳ & ۲ \\ ۲ & ۴ & ۵ & ۴ & ۱ \\ ۱ & ۷ & ۲ & ۶ & ۳ \\ ۶ & ۱ & ۲ & ۴ & ۵ \\ ۱ & ۷ & ۶ & ۵ & ۲ \end{pmatrix},$$

اگر $\alpha = (۲, ۳)$ و $\beta = (۳, ۴, ۵)$ آن‌گاه مینور ستون ـ اول $\det A[\alpha|۱, ۲]$ و مینور سطر ـ اول $\det A[۱, ۲, ۳|\beta]$ به ترتیب برابر

$$\det A[\alpha|۱, ۲] = \det A[۲, ۳|۱, ۲] = \det \begin{pmatrix} ۱ & ۴ \\ ۳ & ۶ \end{pmatrix} = -۶,$$

$$\det A[۱, ۲, ۳|\beta] = \det A[۱, ۲, ۳|۳, ۴, ۵] = \det \begin{pmatrix} ۶ & ۵ & ۱ \\ ۵ & ۴ & ۲ \\ ۲ & ۷ & ۱ \end{pmatrix} = -۳۸.$$

می‌باشند.

**تعریف ۱.۱.۱۳.** فرض کنید $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$، ماتریسی پایین مثلثی (متناظراً بالا مثلثی) باشد. مینورهای $\det A[\alpha|\beta]$، با $\alpha_k \geq \beta_k$ (متناظراً $\alpha_k \leq \beta_k$ )، برای هر $k$، مینورهای غیر بدیهی $A$ نامیده می‌شوند؛ زیرا به وضوح همه‌ی مینورهای باقی مانده برابر صفر هستند[۹].

**مثال ۱.۱.۱۴.** فرض کنید

$$A = \begin{pmatrix} ۴ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۲ & ۰ & ۰ \\ -۸ & ۱ & ۱ & ۰ \\ -۸ & ۱ & ۲ & ۴ \end{pmatrix},$$

در این صورت

$$\det A[۲,۳,۴|۱,۲,۳] = \det \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۰ \\ -۸ & ۱ & ۱ \\ -۸ & ۱ & ۲ \end{pmatrix} = ۱۷,$$

یک مینور غیر بدیهی $A$ و

$$\det A[۱,۲,۴|۱,۳,۴] = \det \begin{pmatrix} ۴ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ -۸ & ۲ & ۴ \end{pmatrix} = ۰,$$

یک مینور بدیهی $A$ می‌باشد.

**تبصره ۱۵.۱.۱.** *در حالت کلی مینورهای غیر بدیهی یک ماتریس مثلثی مانند $A$، ممکن است صفر یا غیر صفر باشند. به عنوان نمونه در مثال قبل*

$$det\ A[۳,۴|۱,۲] = det \begin{pmatrix} -۸ & ۱ \\ -۸ & ۱ \end{pmatrix},$$

*یک مینور غیر بدیهی $A$ با مقدار صفر می‌باشد.*
*می‌دانیم که اگر در ماتریس پایین مثلثی (متناظراً بالا مثلثی) شرط $\alpha_k \geq \beta_k$ (متناظراً $\alpha_k \leq \beta_k$) برای هر $k$، برقرار نباشند، آن‌گاه به وضوح مینور $det\ A[\alpha|\beta]$ برابر صفر خواهد شد. همچنین اگر $A$، قطری باشد، آن‌گاه مینورهای غیر بدیهی آن به صورت $det\ A[\alpha]$، می‌باشند.*

**تعریف ۱۶.۱.۱.** ماتریس $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ جمعاً مثبت نامیده می‌شود، هرگاه

$$\det A[\alpha|\beta] \geq ۰, \quad \forall \alpha,\beta \in Q_{k,n}, \quad k = ۱,۲,\ldots,n,$$

و با $TP$ نشان داده می‌شود.

اگر $A$، یک ماتریس $TP$، باشد، آن‌گاه $A^T$ و هر زیرماتریسی از $A$ و $A^T$ نیز $TP$ است.

**مثال ۱۷.۱.۱.** ماتریس

$$A = \begin{pmatrix} ۴ & ۳ & ۱ \\ ۳ & ۴ & ۳ \\ ۱ & ۳ & ۴ \end{pmatrix},$$

را در نظر می‌گیریم. چون همه‌ی درایه‌های $A$ مثبت هستند، پس مینورهای مرتبه‌ی یک آن نامنفی می‌باشد. با یک محاسبه‌ی ساده می‌توان بررسی نمود که همه‌ی مینورهای مرتبه‌ی دو $A$ نیز نامنفی هستند. بعلاوه $\det A = ۶$ پس $A$ یک ماتریس $TP$ است.

گزاره‌ی زیر یک مشخص‌سازی را برای ماتریس‌های پایین (بالا) مثلثی $TP$ نامنفرد بیان می‌کند.

**گزاره ۱.۱.۱۸.** *ماتریس پایین (بالا) مثلثی نامنفرد $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ را در نظر بگیرید. در این صورت $A$، $TP$ است اگر و فقط اگر*

$$\det A[\omega|۱,۲,\dots,k] \geq ۰ \quad (\det A[۱,۲,\dots,k|\omega] \geq ۰), \quad \forall \omega \in Q_{k,n}, \quad k = ۱,۲,\dots,n$$

***برهان.*** به [۴] رجوع شود. □

**مثال ۱.۱.۱۹.** ماتریس پایین مثلثی

$$L = \begin{pmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & -۱ & ۱ & ۰ \\ ۲ & -۳ & ۴ & ۱ \end{pmatrix},$$

را در نظر بگیرید. چون همه‌ی مینورهای ستون ـ اول $L$ نامنفی است، بنا به گزاره ۱.۱.۱۸، $L$ یک ماتریس $TP$ است.

**تبصره ۱.۱.۲۰.** *اگر $L(U)$ یک ماتریس پایین (بالا) مثلثی $TP$ واحد با اولین ستون (سطر) مثبت باشد، آن‌گاه $\det L[j,i|۱,j] \geq ۰$ ($\det U[۱,j|j,i] \geq ۰$). بنابراین $l_{ij} > ۰$ ($u_{ji} > ۰$)، برای هر $i > j$. بدین معنی که، $L$ ($U$) یک ماتریس پایین (بالا) مثلثی $TP$ واحد با درایه‌های زیر (بالای) قطر اصلی مثبت می‌باشد.*

**تعریف ۱.۱.۲۱.** ماتریس $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ جمعاً نامثبت نامیده می‌شود، هرگاه

$$\det A[\alpha|\beta] \leq ۰, \quad \forall \alpha,\beta \in Q_{k,n}, \quad k = ۱,۲,\dots,n,$$

و با $t.n.p.$ نشان داده می‌شود [۵].
اگر $A$، یک ماتریس $t.n.p.$، باشد، آن‌گاه $A^T$ و هر زیرماتریسی از $A$ و $A^T$ نیز $t.n.p.$ است.

**مثال ۱.۱.۲۲.** ماتریس

$$A = \begin{pmatrix} ۰ & -۱ & -۲ & -۳ \\ -۱۴ & -۱۴ & -۱۴ & -۱۴ \\ -۱۴ & -۱۳ & -۱۱ & -۷ \\ -۲۸ & -۲۵ & -۱۸ & ۰ \end{pmatrix},$$

ماتریسی جمعاً نامثبت است.

**قضیه ۲۳.۱.۱.** *فرض کنید ماتریس* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$، $(n \geq ۲)$ *نامنفرد باشد. در این صورت گزاره‌های زیر معادل هستند:*

۱. $A$، $t.n.p.$ *است.*

۲. *برای هر* $k \in \{۱, ۲, \dots, n-۱\}$،

(الف) $a_{۱۱} \leq ۰$، $a_{nn} \leq ۰$، $a_{n۱} < ۰$، $a_{۱n} < ۰$،

(ب) *برای هر* $\alpha \in Q_{n-k,n}$، $\det A[\alpha|k+۱, \dots, n] \leq ۰$،

(ج) *برای هر* $\beta \in Q_{n-k,n}$، $\det A[k+۱, \dots, n|\beta] \leq ۰$،

(د) $\det A[k, \dots, n] < ۰$.

۳. *برای هر* $k \in \{۱, ۲, \dots, n-۱\}$ ،

(الف) $a_{۱۱} \leq ۰$، $a_{nn} \leq ۰$، $a_{n۱} < ۰$، $a_{۱n} < ۰$،

(ب) *برای هر* $\alpha \in Q_{k,n}$، $\det A[\alpha|۱, \dots, k] \leq ۰$،

(ج) *برای هر* $\beta \in Q_{k,n}$، $\det A[۱, \dots, k|\beta] \leq ۰$،

(د) $\det A[۱, \dots, k+۱] < ۰$.

***برهان.*** به [۱۰] رجوع شود. □

**مثال ۲۴.۱.۱.** ماتریس نامنفرد

$$A = \begin{pmatrix} ۰ & -۱ & -۱ \\ -۱ & -۱ & -\frac{۱}{۲} \\ -۱ & -\frac{۳}{۴} & ۰ \end{pmatrix},$$

را در نظر بگیرید. به آسانی می‌توان دریافت که شرایط قسمت سوم قضیه ۲۳.۱.۱، برقرار است، پس $A$، $t.n.p.$ است.

**تعریف ۲۵.۱.۱.** ماتریس $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (اکیداً) علامت منظم است هرگاه برای هر $k$ $(۱ \leq k \leq n)$، همه‌ی مینورهای مرتبه‌ی $k$ی آن علامت (اکید) یکسان داشته باشند. به بیانی دیگر یک دنباله علامت $\epsilon = (\epsilon_i)$ از اعداد حقیقی با $|\epsilon_i| = ۱$، $i = ۱, ۲, \dots, n$، را در نظر می‌گیریم. اگر ماتریس $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ برای هر $k = ۱, ۲, \dots, n$ و $\alpha, \beta \in Q_{k,n}$ در رابطه‌ی $\epsilon_k \det A[\alpha|\beta] \geq ۰ (> ۰)$ صدق کند، آن‌گاه $A$ ماتریسی (اکیداً) علامت منظم از مرتبه ی $k$ با علامت‌های $\epsilon_۱$، $\dots$، $\epsilon_k$ نامیده می‌شود [۶].

**مثال ۲۶.۱.۱.** ماتریس

$$A = \begin{pmatrix} -۱ & -۲ & -۳ \\ -۳ & -۴ & -۵ \\ -۵ & -۶ & -۶ \end{pmatrix},$$

اکیداً علامت منظم با علامت‌های $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = -1$ می‌باشد.

اگر $A$، $TP$ باشد آن‌گاه $A$ علامت منظم از مرتبه‌ی $n$، با علامت‌های $\epsilon_i = 1$، $i = 1, 2, \ldots, n$ است و اگر $A$، $t.n.p.$ باشد آن‌گاه $A$ علامت منظم از مرتبه‌ی $n$، با علامت‌های $\epsilon_i = -1$، $i = 1, 2, \ldots, n$ می‌باشد.

**قضیه ۲۷.۱.۱.** *فرض کنید $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ یک ماتریس علامت منظم از مرتبه‌ی ۳ با دنباله علامت $\epsilon = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ باشد.*

۱. *اگر $\epsilon_3 = \epsilon_1$ و $\epsilon_2 = -1$، آن‌گاه $a_{ij} \neq 0$ هرگاه $(i, j) \notin \{(1, 1), (n, n)\}$ و سایر درایه‌های باقی مانده می‌توانند صفر باشند.*

۲. *اگر $\epsilon_3 \neq \epsilon_1$ و $\epsilon_2 = 1$، آن‌گاه $a_{ij} \neq 0$ هرگاه $(i, j) \notin \{(1, n), (n, 1)\}$ و سایر درایه‌های باقی‌مانده صفر می‌توانند باشند.*

۳. *اگر $\epsilon_3 \neq \epsilon_1$ و $\epsilon_2 = -1$، آن‌گاه $a_{n-i+1,i} \neq 0$ برای هر $i = 1, 2, \ldots, n$ سایر درایه‌های باقی‌مانده می‌توانند صفر باشند.*

۴. *اگر $\epsilon_3 = \epsilon_1$ و $\epsilon_2 = 1$، آن‌گاه $a_{ii} \neq 0$ برای هر $i = 1, 2, \ldots, n$ سایر درایه‌های باقی مانده می‌توانند صفر باشند.*

***برهان.*** به [۱۲] رجوع شود. □

اتحاد زیر ارتباط بین مینور حاصل ضرب دو ماتریس را بر حسب حاصل‌ضرب مینورهای دو ماتریس بیان می‌کند [۱].

**اتحاد کوشی ـ باینت.** اگر $A$ و $B$ ماتریس‌هایی متعلق به $\mathbb{R}^{n\times n}$ باشند آن‌گاه

$$\det (AB)[\alpha|\beta] = \sum_{\omega\in Q_{k,n}} \det A[\alpha|\omega] \det B[\omega|\beta], \quad \alpha, \beta \in Q_{k,n}.$$

**مثال ۲۸.۱.۱.** فرض کنید

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$\alpha = (۱, ۲)$ و $\beta = (۲, ۳)$. داریم

$$\det\,(AB)[۱, ۲|۲, ۳] = \sum_{\omega \in Q_{۲,۳}} \det\, A[۱, ۲|\omega]\, \det\, B[\omega|۲, ۳]$$
$$= \det\, A[۱, ۲|۱, ۲]\, \det\, B[۱, ۲|۲, ۳] + \det\, A[۱, ۲|۱, ۳]\, \det\, B[۱, ۳|۲, ۳]$$
$$+ \det\, A[۱, ۲|۲, ۳]\, \det\, B[۲, ۳|۲, ۳] = -۳ + ۳ + ۱۰ = ۱۰.$$

# فصل ۲

# مشخص‌سازی ماتریس‌های جمعاً نامثبت نامنفرد برحسب تجزیه‌ی $LDU$ی آن‌ها

.

این فصل شامل دو بخش است. در بخش اول تجزیه‌ی $LDU$ی ماتریس‌های نامنفرد شرح داده می‌شود. در بخش دوم مشخص‌سازی ماتریس‌های جمعاً نامثبت نامنفرد، با درایه‌ی $(۱,۱)$ منفی ارائه می‌گردد.

## ۱.۲ تجزیه‌ی $LDU$

ابتدا روش حذفی گاوس[۱] برای تبدیل ماتریس نامنفرد $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ به یک ماتریس بالا مثلثی را بیان می‌کنیم.

فرض کنید $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ماتریسی نامنفرد باشد. روش حذفی گاوس شامل یک توالی از حداکثر $n-۱$ مرحله‌ی اساسی است که دنباله‌ای از ماتریس‌ها را به شکل

$$A = A^{(۱)} \to \tilde{A}^{(۱)} \to A^{(۲)} \to \tilde{A}^{(۲)} \to \cdots \to A^{(n)} = \tilde{A}^{(n)} = R,$$

نتیجه می‌دهد، که در آن $R$ ماتریس بالا مثلثی نامنفرد است. در ستون $t$-ام ماتریس $A^{(t)}$، عنصر $a_{rt}^{(t)} \neq ۰$ را برای $r \geq t$ (در صورت لزوم) انتخاب کرده و سطرهای $t$-ام و $r$-ام را با هم تعویض کرده و ماتریس حاصل را با $\tilde{A}^{(t)} = (\tilde{a}_{ij}^{(t)})$ نشان می‌دهیم. عنصر $a_{rt}^{(t)} = \tilde{a}_{tt}^{(t)}$ عنصر محور یا به اختصار محور نامیده می‌شود. برای $i = t+۱,\dots,n$ ، قرار می دهیم $l_{it} = \frac{\tilde{a}_{it}^{(t)}}{\tilde{a}_{tt}^{(t)}}$ و $-l_{it}$ برابر سطر $t$-ام ماتریس $\tilde{A}^{(t)}$ را به سطرهای $i$-ام آن اضافه می‌کنیم. نتیجه‌ی حاصل، ماتریس

[۱] Gaussian elimination method