بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه قم

دانشکده علوم پایه

پایان نامه دوره کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی

عنوان:

ساختار معادلات انتگرال غیرخطی خاص و چندجمله‌ای‌های متعامد

استاد راهنما:

دکتر مهدی احمدی نیا

نگارنده:

محدثه سادات رضایی

شهریور ۱۳۹۱

تقدیم به :

خانواده عزیز و همسر مهربانم

تشکر و قدر دانی

در ابتدا بر خود واجب می‌دانم از زحمات دلسوزانه **جناب دکتر مهدی احمدی نیا** کمال تشکر را نمایم که در این ایام بی‌دریغ راهنمای این جانب بوده‌اند. همچنین از اساتید محترم **جناب دکتر فروغی** و **جناب دکتر رحیمی** که قبول زحمت نموده و داوری این پایان نامه را برعهده داشته‌اند، سپاس گزارم.

محدثه سادات رضایی

شهریور ۱۳۹۱

چکیده

در فصل‌های اولیه این پژوهش به معرفی اجمالی فضای چندجمله‌ای‌های متعامد و خواص آن‌ها، همچنین بررسی معادلات انتگرال غیرخطی پرداخته می‌شود. سپس در فصل سوم ساخت چندجمله‌ای‌های متعامد به وسیله معادلات انتگرال غیرخطی با داشتن تابع وزن و حوزه تعامد دلخواه، و برخی چندجمله‌ای‌های متعامد کلاسیک ساخته شده به این روش، همچنین مثال ها وکاربردهایی از آن مورد مطالعه قرار می‌گیرد. در فصل پایانی روش ساخت چندجمله‌ای‌های متعامد چندمتغیره به کمک معادلات انتگرال غیرخطی و همچنین به روش کورن ویندر ارائه شده و این روش‌ها باهم مقایسه و تلفیق خواهد شد. این روش‌ها به همراه مثال‌هایی در فصل چهارم ارائه شده است.

واژه‌های کلیدی:

چندجمله‌ای‌های متعامد، چندجمله‌ای‌های متعامد کلاسیک و شبه کلاسیک، معادلات انتگرال غیرخطی، توابع وزن

فهرست مطالب

فصل ۱

مقدمات

۱.۱ معرفی

به نظر می‌رسد که چندجمله‌ای‌های متعامد برای اولین بار توسط لژاندر و لاپلاس در کارهای مربوط به مکانیک سماوی گسترش یافت. از دیگر کارها در این زمینه، کار لاپلاس در نظریه احتمال بوده است. هر دوی این کارها با مجموعه مشخص از چندجمله‌ای‌های متعامد، ابتدا با چندجمله‌ای‌های متعامد نسبت به توزیع بتای متقارن روی بازه $(-1, 1)$ و سپس توزیع نرمال روی خط حقیقی صورت گرفته است.

نظریه عمومی چندجمله‌ای‌های متعامد توسط چبیشف در سال ۱۸۵۰ شروع شد. هرچند اهمیت محاسبات عملی آن حدوداً ۳۰ سال پیش توسط لنسوز [۱] که پدر مدرن این شاخه از ریاضیات عددی است کشف شد. با آمدن محاسبه گرهای دیجیتال، تأکید بیشتری بر گسترش این شاخه شده است و ادبیات ریاضیات عددی پراست از مقالاتی با کاربردهای چندجمله‌ای‌های متعامد و تقریب های عددی با آنها.

به کمک چندجمله‌ای‌ها و توابع متعامد دو بخش از اطلاعات بسیار مفید را می‌توان به دست آورد. اول داشتن یک پایه خوب برای فضای توابع و سپس تقریب تابع داده شده با استفاده از توابع پایه‌ای.

در قرن‌های حیات این نوع چندجمله‌ای‌ها با توجه به اهمیت آن‌ها، روش‌های مختلفی برای یافتن مجموعه ای متعامد از چندجمله‌ای‌ها بر حسب تابع وزنی خاص ارائه شده است[۱]. در سال های اخیر بنا بر کاربرد وسیع این چندجمله‌ای‌ها در علم فیزیک، و پیوند آن با مسایل کوانتومی که منجر به حل معادلات دیفرانسیل و معادلات انتگرال می‌شود، بندر [۲] موفق به ارائه روشی برای محاسبه این چندجمله‌ای‌ها با داشتن تابع وزن آن‌ها، به کمک معادلات انتگرال غیرخطی شده است[۶ ، ۵]. با نگاهی به این حقیقت که یافتن پاسخ برخی معادلات انتگرال غیرخطی کاری دشوار است، به دست آوردن جواب‌های چندجمله‌ای این معادلات و در نتیجه یافتن پایه‌ای برای فضای جواب این مسایل و تقریب جواب‌ها به کمک جواب‌های پایه‌ای می‌تواند در بسیاری از مسایل فیزیک راهگشا باشد[۱۹].

مطالعه چندجمله‌ای‌های متعامد، همانند بسیاری دیگر از شاخه‌های ریاضیات تنها

---

[۱] Lanczos

[۲] Bender

محدود به فضای توابع یک متغیره نشده و در سطح وسیع‌تر توابع چندمتغیره نیز گسترش یافته است.

در سال ۱۹۷۵ کورن ویندر [۳] مثال هایی از مباحث چندجمله‌ای‌های ژاکوبی دومتغیره را مورد مطالعه قرار داد، و هفت کلاس از چندجمله‌ای‌های متعامد دومتغیره حاصل از تابع وزن ژاکوبی را معرفی کرد[۱۴]. کورن ویندر تمامی این هفت کلاس را به عنوان چندجمله‌ای‌های متعامد کلاسیک طبقه‌بندی کرد، زیرا این چندجمله‌ای‌های متعامد توابع ویژه دو عملگر دیفرانسیل پاره ای مستقل خطی D_1 و D_2 هستند که D_1 از مرتبه ۲ و D_2 از مرتبه دلخواه است. برخی از این مثال‌ها چندجمله‌ای‌های کلاسیک دومتغیره شناخته شده، مانند چندجمله‌ای‌های متعامد روی دیسک واحد، روی سادک یا ضرب تانسوری چندجمله‌ای‌های ژاکوبی یک متغیره هستند. کورن ویندر ابزار جالبی جهت ساخت چندجمله‌ای‌های متعامد دومتغیره از چندجمله‌ای‌های یک متغیره ارائه کرد. با این ساختار وی پایه‌ای برای چندجمله‌ای‌های متعامد روی مربع، دیسک واحد، سادک و حوزه سهموی ارائه کرد. این نتایج می‌تواند برای به دست آوردن دستگاه چندجمله‌ای‌های متعامد روی دامنه های کران‌دار و بی کران دیگر مورد استفاده قرار گیرد.

پذیرفته شده ترین تعریف برای چندجمله‌ای‌های متعامد کلاسیک دومتغیره، توسط کرال[۴] و شفر [۵] در سال ۱۹۶۷ بیان شد[۱۵]. آن ها چندجمله‌ای‌های متعامد کلاسیک را به عنوان توابع ویژه عملگر دیفرانسیل مرتبه دوم فراهندسی بسیار خاص تعمیم دادند، و نشان دادند که تحت تغییر متغیرهای آفین، نه مجموعه از چندجمله‌ای‌های متعامد کلاسیک وجود خواهد داشت.

هرچند، ضرب تانسوری چندجمله‌ای‌های متعامد یک متغیره در حالت کلی و برخی از کلاس‌های کورن ویندر، با توجه به تعریف کرال و شفر جزء چندجمله‌ای‌های متعامد کلاسیک نمی باشند.

اخیراً فرناندز [۶](و همکاران) مفهوم چندجمله‌ای‌های متعامد کلاسیک دو متغیره

---

[۳] Koornwinder

[۴] Krall

[۵] Sheffer

[۶] Fernández

را به چهارچوبی وسیعتر گسترش داده اند که البته شامل تعریف کرال و شفر، و ضرب تانسوری چندجمله‌ای‌های متعامد یک متغیره نیز می‌شود[۹ ،۱۰]. این تعریف به کمک معادله دیفرانسیل پاره ای ماتریسی ارائه شده است. تعریف چندجمله‌ای‌های متعامد کلاسیک دو متغیره ارائه شده توسط فرناندز کلید معرفی مفهوم چندجمله‌ای‌های متعامد دو متغیره شبه کلاسیک است، که مفهوم اولیه آن برای چندجمله‌ای‌های یک متغیره در سال ۱۹۸۵ توسط هندریکسن[۷] و ون رسوم [۸] [۱۲] ارائه شده است. فرناندز همچنین با استفاده از تعریف چندجمله‌ای‌های متعامد دومتغیره کلاسیک و شبه کلاسیک خود، ساختار کلاسیک کلاس‌های چندجمله‌ای‌های متعامد دومتغیره کورن ویندر را مورد مطالعه قرار داده است[۷].

در این پژوهش پس از معرفی روش بندر در فصل سوم، در فصل چهارم فضای چندجمله‌ای‌های متعامد دومتغیره معرفی شده و در همین راستا کارهای انجام شده در این زمینه توسط کورن ویندر، کارل، شفر و فرناندز تبیین شده است. سپس ساخت چندجمله‌ای‌های متعامد دومتغیره به کمک معادلات انتگرال چندگانه غیرخطی مورد مطالعه قرار گرفته و سعی شده با تلفیق روش‌های مختلف، روشی کارآمد جهت به دست آوردن این چندجمله‌ای‌ها در فضای دومتغیره ارائه کرد.

---

[۷] Hendriksen

[۸] Van Rossum

۲.۱ چندجمله‌ای‌های متعامد

۱.۲.۱ سیستم توابع متعامد

در این قسمت جهت معرفی سیستم توابع متعامد، ابتدا لازم است تابع وزن، که از اساسی ترین مفاهیم برای تعریف تعامد است تعریف شود.

تعریف ۱.۲.۱. *تابع وزن، تابعی است که خواص زیر را داشته باشد:* [۲۰]

- $w(x) \geq 0$ *روی بازه متناهی یا نامتناهی* $[a, b]$ *اندازه پذیر باشد.*
- *تمامی گشتاورهای* $\mu_k = \int_a^b x^k w(x)\ dx$ *برای هر* k *نامنفی صحیح، موجود و متناهی باشند.*
- *برای چندجمله‌ای نامنفی* $s(x)$ *روی* $[a, b]$*، از* $\int_a^b w(x)s(x)\ dx = 0$ *بتوان نتیجه گرفت* $s(x) = 0$. *یا به عبارت دیگر* $\int_a^b w(x)\ dx > 0$.

حال به کمک مفهوم تابع وزن مفاهیم زیر تعریف می‌شود: [۴]

تعریف ۲.۲.۱. *ضرب داخلی یا اسکالر دو تابع روی بازه* (a, b)*، نسبت به تابع وزن* $w(x)$ *به صورت زیر تعریف می‌شود:*

$$< f, g >:= \int_a^b w(x)f(x)g(x)dx \qquad (۱.۲.۱)$$

به طور کلی می‌توان ضرب داخلی را به کمک انتگرال ریمان - اشتیلیس به صورت زیر تعریف کرد.

تعریف ۳.۲.۱. *به ازای تابع غیرنزولی* $\alpha(x)$ *داریم:*

$$< f, g >:= \int_a^b f(x)g(x)\ d\alpha(x) \qquad (۲.۲.۱)$$

اگر $\alpha(x)$ مشتق پذیر باشد، به ازای $w(x) = \alpha'(x)$ تعریف ۳.۲.۱ تعریف ۲.۲.۱ را نتیجه می دهد.

از طرف دیگر، چنانچه $\alpha(x)$ تابع پله ای باشد، به این معنا که به جز در نقاط پرش $x = x_i$ با مقدار w_i، در نقاط دیگر تابع ثابت باشد، تعریف زیر را برای ضرب داخلی توابع در فضای گسسته خواهیم داشت:

تعریف ۴.۲.۱.

$$< f, g >:= \sum_i w_i f(x_i) g(x_i) \tag{۳.۲.۱}$$

تعاریف فوق مربوط به توابع حقیقی مقدار است، اما چنانچه توابع مورد نظر دارای مقادیر مختلط بوده و یا دامنه انتگرال‌گیری یک خم در صفحه مختلط باشد، آنگاه $g(x)$ در کلیه تعاریف ارائه شده باید با مزدوج $g(x)$ جایگزین شود.

تعریف ۵.۲.۱. *دو تابع روی بازه $[a, b]$، نسبت به تابع وزن $w(x)$ متعامد نامیده می‌شوند اگر ضرب داخلی تعریف شده برای آن‌ها روی این بازه، نسبت به $w(x)$ صفر شود.*

$$< f, g >:= \int_a^b w(x) f(x) g(x) dx = 0$$

تعریف ۶.۲.۱. *خانواده ای از توابع، دستگاه متعامد نامیده می‌شود اگر، روی بازه (a, b) و نسبت به تابع وزن $w(x)$ ضرب داخلی هر دو عضو متمایز آن صفر شود.*

دستگاه متعامد را همواره می‌توان به صورت دنباله (متناهی یا نامتناهی) $\{\phi_i\}$ نوشت و خاصیت تعامد در مورد این خانواده به صورت زیر بیان می‌شود:

$$< \phi_i, \phi_j >= 0, \qquad i \neq j \tag{۴.۲.۱}$$

می‌توان فرض کرد $\{\phi_i\}$ هیچ تابع پوچی را شامل نشود یعنی، $< \phi_i, \phi_i >$ به ازای تمام i ها مثبت باشد، آنگاه به سادگی می‌توان دید که توابع هر زیر مجموعه متناهی از سیستم متعامد فوق مستقل خطی است.

تعریف ۷.۲.۱. *توابع $\{\phi_i\}$ تشکیل دستگاه متعامد یکه می دهد اگر:*

$$< \phi_i, \phi_j >= \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} \tag{۵.۲.۱}$$

هر سیستم متعامدی را می‌توان با قرار دادن $\phi_k(x)$ $^{-۱/۲}$ $<\phi_k,\phi_k>$ به جای $\phi_k(x)$ نرمال نمود.

یک دنباله (متناهی یا نامتناهی) $\{\psi_n\}$ از توابع مستقل خطی را می‌توان با ترکیب خطی مناسب، نسبت به ضرب داخلی ۱.۲.۱ متعامدسازی کرد. برای مثال می‌توان قرار داد:

$$\phi_۰(x) = \psi_۰(x)$$
$$\phi_۱(x) = \mu_{۱,۰}\phi_۰(x) + \psi_۱(x)$$
$$\vdots$$
$$\phi_n(x) = \mu_{n,۰}\phi_۰(x) + \mu_{n,۱}\phi_۱(x) + \cdots + \mu_{n,n-۱}\phi_{n-۱}(x) + \psi_n(x)$$

وبه این ترتیب مشاهده می‌شود، چنانچه قرار دهیم

$$\mu_{nm} = - <\psi_n,\phi_m> / <\phi_m,\phi_m> \qquad m = ۰, ۱, \ldots, n-۱ \qquad (۶.۲.۱)$$

آنگاه $\phi_n(x)$ سیستمی متعامد است.

این روش، قاعده متعامدسازی گرام-اشمیت نامیده می‌شود.

به صورت مشابه می‌توان قرار داد:

$$\phi_n(x) = \lambda_{n,۰}\psi_۰(x) + \lambda_{n,۱}\psi_۱(x) + \cdots + \lambda_{n,n}\psi_n(x), \qquad \lambda_{n,n} \neq ۰ \qquad (۷.۲.۱)$$

و λ ها را به گونه ای تعریف کرد که $\phi_n(x)$ سیستمی متعامد باشد. یک روش ممکن برای تعیین آن منجر به حالت زیر می‌شود:

$$\Phi_n(x) = \begin{vmatrix} <\psi_۰,\psi_۰> & <\psi_۰,\psi_۱> & \ldots & <\psi_۰,\psi_n> \\ <\psi_۱,\psi_۰> & <\psi_۱,\psi_۱> & \ldots & <\psi_۱,\psi_n> \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ <\psi_{n-۱},\psi_۰> & <\psi_{n-۱},\psi_۱> & \ldots & <\psi_{n-۱},\psi_n> \\ \psi_۰(x) & \psi_۱(x) & \ldots & \psi_n(x) \end{vmatrix} \qquad (۸.۲.۱)$$

واضح است که $\{\Phi_n\}$ سیستمی متعامد است، زیرا Φ_n بر $\psi_۰,\psi_۱,\ldots,\psi_{n-۱}$ و در نتیجه بر Φ_m به ازای $m<n$ عمود می‌باشد.

در این تحقیق تمرکز روی متعامدسازی، با توابع $\psi_n(x)=x^n$ می‌باشد. در نتیجه دنباله ای از چندجمله‌ای‌های متعامد $\{p_n(x)\}$ $n=۰,۱,۲,\ldots$ به دست می‌آید که در آن $p_k(x)$ چندجمله‌ای برحسب x از درجه k است و برای $h\neq k$ داریم:

$$<p_h,p_k>=۰, h,k=۰,۱,۲,\ldots$$

بازه و تابع وزن (یا توزیع)، سیستم چندجمله‌ای‌های متعامد را با ثابت دلخواه برای هر یک از $p_n(x)$ ها تعیین می‌کند.

۲.۲.۱ خواص عمومی چندجمله‌ای‌های متعامد

تابع وزن $w(x)$ روی بازه (a,b) سیستم چندجمله‌ای‌های متعامد $\{p_n(x)\}$ را به طور یکتا (جدای از عامل ثابت در هر چندجمله‌ای) تعیین می‌کند.

$$c_n=\int_a^b w(x)x^n dx \qquad (۹.۲.۱)$$

c_n ها گشتاورهای تابع وزن هستند و در مورد $\psi_n(x)=x^n$ داریم:

$$<\psi_m,\psi_n>=c_{m+n} \qquad (۱۰.۲.۱)$$

می‌توان نوشت:

$$G_n=\begin{vmatrix} c_۰ & c_۱ & \ldots & c_n \\ c_۱ & c_۲ & \ldots & c_{n+۱} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_n & c_{n+۱} & \ldots & c_{۲n} \end{vmatrix} \qquad (۱۱.۲.۱)$$

چنانچه ضرایب (مشخص نشده) x^n در $p_n(x)$ را با k_n نشان دهیم، داریم:

$$p_n(x) = \frac{k_n}{G_{n-1}} \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_n \\ c_1 & c_2 & \dots & c_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n-1} & c_n & \dots & c_{2n-1} \\ 1 & x & \dots & x^n \end{vmatrix} \qquad (۱۲.۲.۱)$$

از آنجایی که $p_n(x)$ بر $1, x, \dots, x^{n-1}$ عمودند، داریم:

$$h_n =< p_n, p_n >= k_n^2 \frac{G_n}{G_{n-1}} \qquad (۱۳.۲.۱)$$

برای چندجمله‌ای‌های نرمال سازی شده: $k_n = (G_{n-1}/G_n)^{1/2}$

هر چندجمله‌ای از درجه $m < n$ ترکیب خطی $p_0(x), \dots, p_m(x)$ است و در نتیجه بر $p_n(x)$ عمود است.

در مورد چند جمله ای های متعامد قضایای زیر برقرار است: [۲۱]

قضیه ۱.۲.۱. *تمامی صفرهای $p_n(x)$ ساده بوده و در درون بازه (a, b) قرار دارند.*

قضیه ۲.۲.۱. *فرض کنید k_n ضریب x^n، k'_n ضریب x^{n-1} در $p_n(x)$ و $r_n = k'_n/k_n$ باشد. همچنین $h_n =< p_n, p_n >$*
رابطه خطی زیر برای هر سه چندجمله‌ای پشت سرهم برقرار است:

$$p_{n+1}(x) = (A_n x + B_n) p_n(x) - C_n p_{n-1}(x) \qquad n = 1, 2, \dots \qquad (۱۴.۲.۱)$$

که در آن:

$$A_n = k_{n+1}/k_n, \qquad B_n = A_n(r_{n+1} - r_n)$$

$$C_n = A_n h_n/(A_{n-1} h_{n-1}) = k_{n+1} k_{n-1} h_n/(k_n^2 h_{n-1})$$

توجه ۸.۲.۱. *عکس قضیه فوق برقرار است. یعنی چنانچه یک دنباله از چندجمله‌ایها در رابطه بازگشتی ۱۴.۲.۱ با A_n و C_n مثبت صدق کنند، این دنباله از چندجمله‌ایها متعامدند.*

از رابطه ۱۴.۲.۱ به سادگی می‌توان فرمول کریستوفل- داربوکس [۹] را برای چندجمله‌ایهای متعامد به دست آورد:

$$\sum_{\nu=0}^{n} h_\nu^{-1} p_\nu(x)p_\nu(y) = \frac{k_n}{k_{n+1}h_n}\frac{p_{n+1}(x)p_n(y) - p_n(x)p_{n+1}(y)}{x-y} \qquad (۱۵.۲.۱)$$

و برای زمانی که $y \to x$ داریم:

$$\sum_{\nu=0}^{n} h_\nu^{-1}[p_\nu(x)]^2 = \frac{k_n}{k_{n+1}h_n} p'_{n+1}(x)p_n(x) - p'_n(x)p_{n+1}(x) \qquad (۱۶.۲.۱)$$

در این بخش، هدف تنها معرفی خواص عمومی چندجمله‌ای‌های متعامد بوده و در نتیجه اثبات قضایا ارائه نشده است. جهت مطالعه اثبات قضایای ۱.۲.۱، ۲.۲.۱ و توجه ۸.۲.۱ می‌توانید به [۲۱] مراجعه نمایید.

۳.۲.۱ چندجمله‌ای‌های متعامد کلاسیک و شبه کلاسیک

چندجمله‌ای‌هایی نظیر چندجمله‌ای‌های چبیشف، لاگر، ژاکوبی، لژاندر و هرمیت، که چندجمله‌ای‌های شناخته شده با خواص ویژه‌ای هستند، چندجمله‌ای‌های کلاسیک نامیده می‌شوند.

چندجمله‌ای‌های کلاسیک دارای خواص مشترک زیر می‌باشند: [۲۱]

۱. خانواده $\{p'_n(x)\}$ سیستمی متعامد است.

۲. این چندجمله‌ای‌ها در معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم به شکل زیر صدق می‌کنند، که در آن A و B به n و λ_n به x بستگی ندارد.

$$A(x)y'' + B(x)y' + \lambda_n y = 0 \qquad (۱۷.۲.۱)$$

۳. برای این چندجمله‌ای‌ها فرمول رودریگ، به شکل زیر وجود دارد:

$$p_n(x) = \frac{1}{K_n w(x)}\left(\frac{d^n}{dx^n}\right)[w(x)X^n(x)] \qquad (۱۸.۲.۱)$$

---

[۹] Christoffel-Darboux formula

که در آن X چندجمله‌ای بر حسب x با ضرایب مستقل از n است و K_n به x بستگی ندارد.

خواص بالا، خواص مشخص کننده هر سیستم متعامد کلاسیکی می‌باشد. به عبارت دیگر هر چندجمله‌ای متعامدی که دارای خواص فوق باشد، چندجمله‌ای متعامد کلاسیک خواهد بود.

برخی از چندجمله‌ای‌های متعامد کلاسیک به همراه تابع وزن، فرمول رودریگ، معادله دیفرانسیل مشخصه، رابطه بازگشتی و تابع مولد آن ها در جداول ۱- ۵ آمده است[۱].

تعریف ۹.۲.۱. *تابع وزن $w(x)$ شبه کلاسیک نامیده می‌شود، اگر دو چندجمله‌ای $\phi(x)$ و $\psi(x)$ با $deg\ \phi = p \geq 0$ و $deg\ \psi = q \geq 1$ موجود باشند، به گونه ای که:*

$$[\phi(x)w(x)]' = \psi(x)w(x) \tag{۱۹.۲.۱}$$

یا معادلاً

$$\phi(x)w'(x) = \tilde{\psi}(x)w(x) \tag{۲۰.۲.۱}$$

که $\tilde{\psi}(x) = \psi(x) - \phi'(x)$.

به علاوه فرض کنید $s = max\{p-2, q-1\} \geq 0$، تابع وزن $w(x)$ کلاسیک است اگر $p \leq 2$ و $q = 1$، یعنی $s = 0$ [۱۲].

جدول ۱ : چندجمله‌ای‌های کلاسیک به همراه حوزه و اندازه انتگرال‌گیری

نام چندجمله‌ای	$p_n(x)$	a	b	$w(x)$
ژاکوبی	$G_n(p,q,x)$	0	1	$(1-x)^{p-q}x^{q-1}$
چبیشف نوع اول	$T_n(x)$	-1	1	$(1-x^2)^{-1/2}$
چبیشف نوع دوم	$U_n(x)$	-1	1	$(1-x^2)^{1/2}$
چبیشف نوع اول انتقال یافته	$T_n^*(x)$	0	1	$(x-x^2)^{-1/2}$
چبیشف نوع دوم انتقال یافته	$U_n^*(x)$	0	1	$(x-x^2)^{1/2}$
لژاندر	$P_n(x)$	-1	1	1
لاگر	$L_n(x)$	0	∞	e^{-x}
لاگر پیشرفته	$L_n^{(\alpha)}(x)$	0	∞	$e^{-x}x^{\alpha}, \qquad \alpha>-1$
هرمیت	$H_n(x)$	$-\infty$	∞	e^{-x^2}

جدول ۲ : معادله دیفرانسیل مشخصه $A(x)y''+B(x)y'+\lambda_n y=0$

y	$A(x)$	$B(x)$	λ_n
$T_n(x)$	$1-x^2$	$-x$	n^2
$U_n(x)$	$1-x^2$	$-3x$	$n(n+2)$
$P_n(x)$	$1-x^2$	$-2x$	$n(n+1)$
$L_n^{(\alpha)}(x)$	x	$\alpha+1-x$	n
$H_n(x)$	1	$-2x$	$2n$

جدول ۳ : فرمول رودریگ $p_n(x) = \frac{۱}{K_n w(x)}(\frac{d}{dx})^n[w(x)X^n(x)]$

$p_n(x)$	K_n	$w(x)$	$X(x)$
$T_n(x)$	$(-۱)^n ۲^n \frac{\Gamma(n+۱/۲)}{\sqrt{\pi}}$	$(۱-x^۲)^{-۱/۲}$	$۱-x^۲$
$U_n(x)$	$(-۱)^n ۲^{n+۱} \frac{\Gamma(n+۳/۲)}{(n+۱)\sqrt{\pi}}$	$(۱-x^۲)^{۱/۲}$	$۱-x^۲$
$P_n(x)$	$(-۱)^n ۲^n n!$	۱	$۱-x^۲$
$L_n^{(\alpha)}(x)$	$n!$	$e^{-x}x^{\alpha}$	x
$H_n(x)$	$(-۱)^n$	$e^{-x^۲}$	۱

جدول ۴ : رابطه بازگشتی $p_{n+۱}(x) = (A_n x + B_n)p_n(x) - C_n p_{n-۱}(x)$

$p_n(x)$	A_n	B_n	C_n
$T_n(x)$	۲	۰	۱
$U_n(x)$	۲	۰	۱
$T_n^*(x)$	۴	-۲	۱
$U_n^*(x)$	۴	-۲	۱
$P_n(x)$	$\frac{۲n+۱}{n+۱}$	۰	$\frac{n}{n+۱}$
$L_n^{(\alpha)}(x)$	$\frac{-۱}{n+۱}$	$\frac{۲n+\alpha+۱}{n+۱}$	$\frac{n+\alpha}{n+۱}$
$H_n(x)$	۲	۰	$۲n$

جدول ۵ : تابع مولد $R = \sqrt{۱-۲xt+t^۲}, G(x,t) = \sum_{n=۰}^{\infty} a_n p_n(x) t^n$

$p_n(x)$	a_n	$G(x,t)$	شرایط
$T_n(x)$	۲	$\frac{۱-t^۲}{R^۲} + ۱$	$-۱ < x < ۱, \|t\| < ۱$
$U_n(x)$	۱	$R^{-۲}$	$-۱ < x < ۱, \|t\| < ۱$
$P_n(x)$	۱	$R^{-۱}$	$-۱ < x < ۱, \|t\| < ۱$
$L_n^{(\alpha)}(x)$	۱	$(۱-t)^{-x-۱} exp(\frac{xt}{t-۱})$	$\|t\| < ۱$
$H_n(x)$	$۱/n!$	$e^{۲xt-t^۲}$	