بسم الله الرحمن الرحيم

٧٠٦٧٧٥

دانشگاه بوعلی سینا

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان‌نامه:

جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

رشته ریاضی محض گرایش جبر

عنـوان:

شعاع و مجموعه‌های مرکزی در گراف مقسوم‌علیه‌های صفر حلقه‌های تعویض‌پذیر

استاد راهنما:

دکتر کریم سامعی

پژوهشگر:

آرزو کریمی منسوب

۱۳۸۶/۱۲/۰۵

آبان ۱۳۸۶

۷۰۶۷۵

همهٔ امتیازهای این پایان‌نامه به دانشگاه بوعلی سینا تعلق دارد. در صورت استفاده از تمام یا بخشی از مطالب این پایان‌نامه در مجلات، کنفرانس‌ها و یا سخنرانی‌ها، باید نام دانشگاه بوعلی سینا(یا استاد راهنمای پایان‌نامه) و نام دانشجو با ذکر مأخذ و ضمن کسب مجوز کتبی از دفتر تحصیلات تکمیلی دانشگاه ثبت شود. در غیر این صورت مورد پیگرد قانونی قرار خواهد گرفت.

به نشانهٔ بیان اشتیاق جاودانه و خاموش نشدنی خودم

تقدیم به

مردان تنهای تاریخ

که تنها زندگان بیدار قرن‌ها بودند.

دانشگاه بوعلی سینا

دانشکده علوم

گروه ریاضی

جلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی ارشد

آرزو کریمی منسوب

تحت عنوان:

شعاع و مجموعه‌های مرکزی در گراف مقسوم علیه‌های صفر حلقه‌های تعویض‌پذیر

به ارزش ۴ واحد در روز سه شنبه مورخ ۱۳۸۶/۸/۲۲ ساعت ۸:۳۰ در محل آمفی تئاتر ۲ و با حضور اعضای هیأت داوران زیر برگزار گردید و با نمره ...۱۹/۷۵... درجه ......عالی...... ارزیابی شد.

ترکیب اعضای هیأت داوران:

ردیف	سمت در هیأت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی ـ گروه/ دانشکده/ دانشگاه	محل امضاء
۱.	استاد راهنما	کریم سامعی	دانشیار-ریاضی/علوم پایه/ بوعلی سینا	
۲.	استاد مدعو	سید احمد موسوی	دانشیار-ریاضی/ریاضی/ تربیت مدرس	
۳.	استاد مدعو	محمد موسایی	استادیار-ریاضی/علوم پایه/بوعلی سینا	
۴.				
۵.				

قدردانی

خدایا مرا امان آوازی تا از اندوه آدمی بکاهم.

در آغاز هیچ نبود، کلمه بود و آن کلمه خدا بود و کلمه بی زبانی که بخواندش و بی اندیشه‌ای که بداندش چگونه می‌تواند بود.

حال که خدایم مجالی برای نوشتن به من عطا کرده بر خود لازم می‌دانم از بزرگوارانی که وجودشان سرمایه و آرامبخش وجودم بوده و هست، تشکر و قدردانی نمایم.

نهایت سپاس، قدردانی و امتنان را دارم از استاد راهنمای بزرگوار و گرانقدرم جناب آقای دکتر سامعی که اگر زیبایی در این این مجموعه هست، حاصل حسن توجه و نگاه ژرف اندیش ایشان بوده و بس. شاگردی ایشان افتخار همیشگی اینجانب می‌باشد.

تشکر و قدردانی می‌کنم از زحمات بی دریغ و نگاه ریزبینانهٔ مدیر گروه محترم گروه ریاضی جناب آقای دکتر موسایی و توفیق روز افزون را برای این بزرگوار آرزومندم.

قدر و ارج می نهم بر زحمات بی شائبه و دلسوزانهٔ آقای داود ملکی که منت بر بنده نهادند و در تمامی مراحل تکمیل و ارائهٔ این پایان‌نامه همراه و قوت نفس اینجانب بودند.

و بی‌نهایت احساس، قدردانی و سپاس را تقدیم می‌دارم به خانوادهٔ بی‌همتایم، مادرم، اسطورهٔ عشق و ایثار، پدرم، تکیه‌گاه لحظات، برادرم مهدی، الگوی ژرف نگری، خواهرم سارا، همدم پر غرورم و خواهرم رویا، رویای من، هفت شهر عشق.

هم رأیی خردمندان برهان حقیقت است. (نیچه)

نام خانوادگی : کریمی منسوب	نام : آرزو

عنوان پایان نامه :

شعاع و مجموعه های مرکزی در گراف مقسوم علیه های صفر حلقه های تعویض پذیر

استاد راهنما : دکتر کریم سامعی

مقطع تحصیلی : کارشناسی ارشد	رشته : ریاضی	گرایش: جبر	دانشگاه : بوعلی سینا

دانشکده : علوم پایه	تاریخ دفاعیه : ۱۳۸۶/۸/۲۲	تعداد صفحه :۹۵

واژه های کلیدی:

حلقه تعویض پذیر، شعاع ، گراف مقسوم علیه های صفر ، مرکز ، میانه ، مجموعه غالب.

چکیده :

برای حلقه تعویض پذیر و یکدار R ، گراف مقسوم علیه های صفر حلقه R، که با $\Gamma(R)$ نشان داده می شود، گرافی ساده است که رأس های آن همه مقسوم علیه های صفر ناصفر R هستند و دو راس متمایز y,x مجاور هستند ، اگر و تنها اگر xy=0 . در این پایان نامه شعاع و مجموعه های مرکزی را برای گراف $\Gamma(R)$ تعریف کرده و ثابت می کنیم، اگر R حلقه تعویض پذیر نوتری باشد ، آنگاه شعاع $\Gamma(R)$ حداکثر ۲ است . اگر حلقه R آرتینی باشد ، آنگاه مجموعه مرکز اجتماعش با صفر برابر است با اجتماعی از پوچساز های ایدآل های R . به طور کلی برای حلقه های تعویض پذیر متناهی و یکدار مجموعه میانه زیر مجموعه ای از مرکز است و در پایان ثابت می شود که برای حلقه متناهی R ،به طوری که $R \ncong \mathbb{Z}_2 \times F$ (F میدانی متناهی است) ، عدد غالب $\Gamma(R)$ با تعداد ایدآل های ماکسیمال مجزای R برابر است .

فهرست مندرجات

مقدمه

ریاضی زبانیست که خدا با آن جهان را به رشتهٔ تحریر درآورد.

گالیله

دانش ریاضی همچون همهٔ دانش‌های دیگر، زاییدهٔ نیازمندیهای جامعهٔ بشری است. بررسی تاریخ ریاضیات در دوران‌های باستان و در سرزمین‌های چین، بابل، مصر، هند و یونان به خوبی نشان می‌دهد که با وجود پردهٔ اسرارآمیزی که صاحبان دانش زمان، بر روی دانسته‌های خود می‌کشیدند، هرگز نتوانستند پیوندهای خود را با جامعهٔ خود و نیازهای آن پاره کنند و اگرچه به‌ظاهر در لاک خود فرو رفته بودند و در نظر دیگران در عالم روحانی و رمزگونهٔ خود گام برمی‌داشتند، تنها پاسخگوی نیازمندیهای روزمره بودند. داد و ستدها، تقسیم زمین برای کشت و بهره‌گیری از آن، ساختن معبدها، کاخها و قلعه‌ها، گردآوری لشکرها و در کنار آن جمع‌آوری مالیاتها و باجها برای نگهداری آنها و... کشش‌های اصلی برای پدید آمدن مفهوم‌های اولیهٔ ریاضی بود. با وجود این نباید گمان کرد که راه پیشرفت ریاضیات ساده و مستقیم بوده و هیچ عامل دیگری در آن اثر نداشته است.

اگرچه به قول پروفسور هشترودی: (تقسیم ریاضیات کار غلطی است. ریاضیات فصل ندارد که آن را تقسیم کنیم و به صورت هندسه، جبر و ... درآوریم. همه به هم مربوط هستند و همه به نظریهٔ اعداد برمی‌گردند.)، اما به طور معمول ریاضیات را به سه شاخهٔ اصلی آنالیز، هندسه و جبر تقسیم می‌کنند.

اگر ریاضیات آن‌گونه که معمولاً گفته می‌شود مادر همهٔ دانش‌هاست، بدون تردید جبر ابزاری دقیق و پرقدرت در دست توانای اوست. در این مبحث از ریاضیات است که استدلال‌های منطقی ریاضی به بهترین وجهی نمایان می‌شود. جبر شاخه‌ای از ریاضیات است که به مطالعهٔ ساختار و کمیت می‌پردازد. جبر را می‌توان تعمیم و تجدیدی از حساب دانست، که در آن بر خلاف حساب، عملیاتی مانند جمع و ضرب، نه بر روی اعداد بلکه بر روی نمادها انجام می‌گیرد. تاریخچهٔ این علم به بیش از ۳۰۰۰ سال پیش در مصر و بابل برمی‌گردد، که در آنجا در مورد حل برخی از معادلات جبری بحث شد. در هند و یونان باستان در حدود یک قرن پیش از میلاد از روشهای هندسی برای حل برخی از معادلات جبری استفاده می‌گردیده است. کتاب جبر والمقابلهٔ خوارزمی اولین اثر کلاسیک در جبر می‌باشد، که کلمهٔ جبر یا $Algebra$ در آن آمده است، خیام دیگر ریاضی‌دان شهیر ایرانی است، که در آثار خود جبر را از حساب تمیز داد و گامی بزرگ را در پیشرفت این علم برداشت.

طی سالهای اخیر علاقهٔ خاص ریاضی‌دانان به تحقیق و پژوهش در مقوله‌های ترکیبی ریاضی، مانند مباحث ترکیبی جبر، آنالیز و توپولوژی، ترکیب آنالیز و نظریهٔ احتمالات و همچنین جبر مجرد و نظریهٔ گراف، باعث بوجود آمدن مباحث جدید و متنوعی در این زمینه

گردید.

ایدهٔ برقراری ارتباط بین حلقه‌های تعویض‌پذیر و نظریهٔ گراف برای اولین‌بار در سال ۱۹۸۸ توسط *Beck* طی مقالهٔ،

I. Beck, Coloring of commutative rings, J. Algebra 116 (1988) 208-226.

مطرح شد. علاقهٔ این ریاضی‌دان بیشتر در راستای رنگ آمیزی گراف بود. *Beck* همهٔ عناصر حلقه را بعنوان رئوس گراف قرار داد. در این گراف دو رأس متمایز x, y مجاور بودند، اگر و تنها اگر $xy = 0$. این گراف لزوماً همبند نبود و رأس 0 در آن با همهٔ رئوس دیگر مجاور بود.

مطالعه در این مقوله توسط ریاضی‌دانان متعددی ادامه یافت، تا اینکه در سال ۱۹۹۹، *Anderson* و *Livingston*، طی مقالهٔ،

D.F. Anderson, P.S. Livingston, The zero-divisor graph of a commutative ring, J. Algebra 217 (1999) 434-447.

تعریف جدیدی برای گراف وابسته به یک حلقهٔ تعویض‌پذیر آوردند. در این تعریف رئوس گراف، مجموعهٔ مقسوم‌علیه‌های صفر ناصفر حلقه هستند و دو رأس متمایز x, y مجاور هستند، اگر و تنها اگر $xy = 0$. در همین مقاله ثابت می‌شود که این گراف، گرافی همبند است و چون عنصر صفر رأسی از این گراف نیست، بنابراین رئوسی که با همهٔ رئوس دیگر گراف مجاور هستند، دارای اهمیت خاصی می‌باشند و باعث شکل‌گیری قضایای متفاوتی می‌شوند.

زیبایی مطالعه و پژوهش در مقوله‌های ترکیبی ریاضیات و ایجاد رابطه در شاخه‌های مختلف جبر مجرد و نظریهٔ گراف که در واقع تا حدودی باعث از بین بردن صورت کاملاً مجرد جبر می‌شد، ریاضی‌دانان متعددی را جذب مطالعه و پژوهش در این زمینه کرد. به طوری که هر ساله مقالات متعددی در این باب در نشریات معتبر ریاضی جهان به چاپ می‌رسد. گراف مقسوم‌علیه‌های صفر، نه تنها برای حلقه‌های تعویض‌پذیر بلکه برای نیم گروه‌ها و حلقه‌های تعویض‌ناپذیر نیز تعریف و بررسی شد. عنوان نمونه‌هایی از این مقالات را در مراجع [۱۲] و [۲۲] مشاهده می‌کنید.

همچنین کنکاش و پژوهش عاشقان ریاضیات باعث گسترش این مقوله در ساختارهای جبری خاص، مانند حلقه‌های فون نویمان، حلقه‌های کاهشی، حلقه‌های چند جمله‌ای و سریهای توانی انجامید که برای نمونه عنوان چند مورد از این مقالات را در مراجع [۸] و [۱۷] مشاهده می‌کنید.

در ایران نیز ریاضی‌دانان برجسته‌ای به مطالعه و پژوهش در این مقوله پرداختند، از جملهٔ این اساتید که هنوز هم در حال پژوهش در این مبحث می‌باشند، دکتر کریم سامعی هستند، که استاد راهنمای اینجانب در این پایان‌نامه می‌باشند و افتخار شاگردی ایشان را دارم، همچنین دکتر آذرپناه، دکتر اکبری، دکتر میمنی، دکتر محمدیان، دکتر معتمدی و دکتر یاسمی نیز از اساتیدی هستند که در این مقوله دارای مقالاتی می‌باشند که چندین مقاله از این اساتید را در مراجع [۴]، [۵]، [۹] و [۲۳] مشاهده می‌کنید.

مفاهیم مجموعهٔ مرکز، مجموعهٔ میانه، مجموعه‌های غالب و همچنین شعاع و عدد غالب از جملهٔ مفاهیمی هستند که برای اولین‌بار در سال ۲۰۰۶، توسط *Redmond* در مقالهٔ،

S.P. Redmond, Central sets and radii of the zero-divisor graphs of commutative rings, Comm. Algebar 34(7) (2006) 2389-2401.

برای گراف مقسوم‌علیه‌های صفر حلقه‌های تعویض‌پذیر مورد تحلیل و بررسی قرار گرفت. هدف اصلی این پایان‌نامه نیز تحلیل و بررسی این تعاریف جدید است که در فصل سوم به طور کامل مورد بررسی قرار گرفته است. ساختار کلی این مجموعه به صورت زیر می‌باشد.

از آنجایی که مطلب مورد بحث ترکیبی از نظریهٔ گراف و حلقه‌های تعویض‌پذیر است، لذا فصل اول از این پایان‌نامه مشتمل بر ۲ بخش می‌باشد. بخش اول شامل مفاهیم و تعاریف مقدماتی از نظریهٔ گراف است که برگرفته از مراجع [۲] و [۲۴] می‌باشد.

در بخش دوم نیز تعاریف، قضایا و نتایجی را از نظریهٔ حلقه‌های تعویض‌پذیر می‌آوریم که بیشتر به بررسی مجموعهٔ مقسوم‌علیه‌های یک حلقه و رابطهٔ آن با ایدآل‌ها و مخصوصاً ایدآل‌های اول اختصاص دارد. مراجع مورد استفادهٔ این بخش نیز مراجع [۱]، [۳]، [۷]، [۱۴]، [۱۵]، می‌باشند که عنوان آنها به طور کامل در پیوست A ذکر شده است. بیشتر نمادگذاری‌های این فصل نیز برگرفته از کتاب گام‌هایی در جبر تعویض‌پذیر، رودنی شارپ، می‌باشد. در فصل دوم از این پایان‌نامه گراف مقسوم‌علیه‌های صفر حلقه‌های تعویض‌پذیر، به طور کامل معرفی و بررسی شده و مثال‌ها و قضایای اساسی ارائه شده است. مطالب این فصل

بر اساس مرجع [٦] تنظیم شده است.

و بالاخره فصل سوم این پایان‌نامه که براساس مرجع [٢٠] تنظیم شده است، شامل ۴ بخش می‌باشد که در هر بخش به تعریف و تحلیل یکی از مفاهیم، شعاع، مجموعهٔ مرکز، مجموعهٔ میانه و مجموعه‌های غالب می‌پردازیم.

قابل ذکر است که نماد F_n در این پایان‌نامه نشان دهندهٔ میدان n عضوی می‌باشد و نمادهای $m(G), \mathrm{Cen}(G), \mathrm{Rad}(G)$، که به ترتیب نشان دهندهٔ، شعاع، مجموعهٔ مرکز و مجموعهٔ میانه برای گراف G هستند، فقط در این پایان‌نامه آورده شده است و برگرفته از مقاله‌های ذکر شده در مرجع نمی‌باشد.

در پایان بیان می‌کنم که با توجه به تمام ریزنگاری‌ها و دقت اینجانب سعی شده که مطالب به بهترین شکل ممکن تنظیم گردد، با وجود این هیچگونه ادعایی مبنی بر بی‌نقصی این مجموعه وجود ندارد و پذیرای انتقادات سازندهٔ عاشقان عرصهٔ ژرف و زیبای ریاضیات می‌باشم.

هر چه بیش اوج گیریم از چشم آنان که پرواز کردن نمی‌دانند خردتر به چشم می‌آییم.

نیچه

اسـرار ازل را نه تـو دانی و نه مـن   وین حرف معما نه تو خوانی و نه من

هست از پس پرده گفتگوی من و تو   چون پرده برافتد نه تـو مانی و نه من

خیام

There was a Door to which I found no Key:

There was a Veil past which I could not see:

Some little Talk awhile of ME and THEE

There seemed–and then no more of THEE and ME.

Khayam

Translated by Fitzgerald

فصل ۱

مباحث مقدماتی

استدلال اولین موهبت زمینی است.

ادوارد گیبون

در فصل اول مفاهیم، اصطلاحات و قضایایی را ارائه می‌دهیم که ابزارهای اساسی ما در فصل‌های بعد می‌باشند. از آنجایی که برای مطالعه و تحقیق در این مقوله نیاز است که با مفاهیم و تعاریفی از نظریهٔ گراف آشنایی مختصری داشته باشیم، لذا این فصل را در غالب دو بخش می‌آوریم که بخش اول شامل مفاهیم مقدماتی نظریهٔ گراف و بخش دوم شامل مفاهیم و قضایایی از نظریهٔ حلقه‌های تعویض‌پذیر می‌باشد.

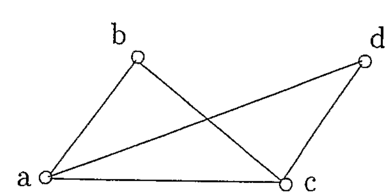
۱ــ۱ مفاهیمی در نظریهٔ گراف

از آنجایی که برخی مفاهیم مقدماتی در نظریهٔ گراف از اساسی‌ترین ابزار لازم در بررسی ساختار گراف مقسوم‌علیه‌های صفر حلقه‌های تعویض‌پذیر می‌باشند، لذا در این بخش مختصراً به بیان مفاهیم و تعاریف مقدماتی از نظریهٔ گراف می‌پردازیم.

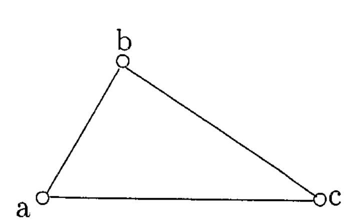
۱–۱ **تعریف.** گراف سادهٔ G را به صورت زوج $(V(G), E(G))$ تعریف می‌کنیم، به طوری که $V(G)$ یک مجموعهٔ ناتهی از عناصری به نام رأس و $E(G)$ خانواده‌ای از زوج‌های نامرتب از عناصر $V(G)$ موسوم به یال است. توجه می‌کنیم که گراف ساده طوقه و یال تکراری ندارد. در گراف سادهٔ G دو رأس v و w را مجاور می‌گوییم هرگاه یک یال بین آنها موجود باشد و با vw یا $v - w$ نشان می‌دهیم.

۱–۲ **تعریف.** یک زیر گراف از گراف G خود یک گراف است که تمامی رئوس آن به $V(G)$ و تمامی یال‌های آن به $E(G)$ تعلق دارند.

مثال ۱. گراف شکل ۱ – ۲ زیرگرافی از گراف شکل ۱ – ۱ است.



شکل ۱–۱

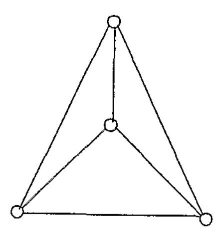


شکل ۱–۲

۱—۳ تعریف. در گراف سادهٔ G، تعداد یال‌هایی که از رأس v می‌گذرند را درجهٔ رأس می‌گوییم و با $\deg(v)$ نشان می‌دهیم.

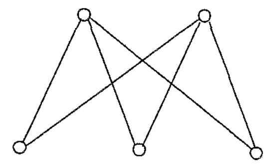
مثال ۲. در گراف شکل ۱ — ۱، $\deg(b) = ۲$ و $\deg(a) = ۳$.

۱—۴ تعریف. گراف ساده‌ای را که هر دو رأس متمایز آن مجاور باشند گراف **کامل** می‌نامیم. گراف کامل با n رأس را معمولاً به صورت K_n نشان می‌دهیم. گراف K_4 را در شکل ۱ — ۳ مشاهده می‌کنید.

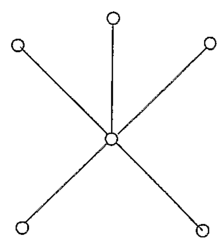


شکل ۱—۳

۱—۵ تعریف. فرض کنیم مجموعهٔ رئوس یک گراف ساده را بتوان به صورت دو مجموعهٔ مجزای V_1 و V_2 افراز کرد، به طوری که هر رأس از V_1 با همهٔ رئوس V_2 مجاور باشد و هر دو رأس در V_1 و نیز هر دو رأس در V_2 با هم مجاور نباشند، در این صورت G را یک گراف **دو بخشی کامل** می‌گوییم و با $K_{r,s}$ نشان می‌دهیم، به طوری که r و s به ترتیب تعداد رئوس در V_1 و V_2 است. یک گراف دو بخشی کامل به صورت $K_{1,s}$ را یک گراف **ستاره‌ای** می‌نامیم. در شکل ۱ — ۴ و ۱ — ۵ به ترتیب گراف دو بخشی کامل $K_{2,3}$ و گراف ستاره‌ای $K_{1,5}$ را مشاهده می‌کنید.

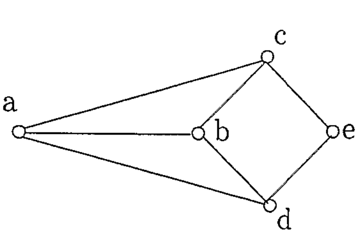


شکل ۱—۴



شکل ۱—۵

۱—۶ تعریف. در گراف سادهٔ G، هر دنبالهٔ متناهی از یال‌ها را یک **گشت** می‌گوییم. تعداد یال‌ها در یک گشت را طول گشت می‌نامیم. گشتی را که تمامی یال‌های آن مجزا باشند، یک **گذر** می‌نامیم. اگر رئوسی را که در یک گذر از آن عبور می‌کنیم مجزا باشند، آنگاه گذر را یک **مسیر** می‌گوییم. مسیر بسته‌ای را که حداقل دارای یک یال باشد **مدار** می‌نامیم. به عنوان مثال در گراف شکل ۱ — ۶، گذر ad, db, bc یک مسیر به طول ۳ بین دو رأس a و c است و مسیر بسته bc, ce, ed, db، یک مدار است.



شکل ۱—۶