بسم الله الرحمن الرحیم

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه تربیت معلم آذربایجان
دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی

پایان نامه مقطع کارشناسی ارشد

رشته ریاضی محض

بهترین تقریب با استفاده از مجموعه‌های downward و upward

استاد راهنما :

دکترشهرام رضاپور

پژوهشگر :

علی قدرتی سهلان

بهمن‌ماه/ ۱۳۸۶

تبریز/ ایران

تقدیم به پدر و مادرم

دانشگاه تربیت معلم آذربایجان

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

اداره کل تحصیلات تکمیلی

به‌نام خدا

صورتجلسه نتیجهٔ دفاع از پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد

طبق درخواست شمارهٔ ۶۰۰/۱۴۳۶ مورخ ۸۶/۱۰/۱۱ تحصیلات تکمیلی دانشکدهٔ علوم پایه و مجوز شمارهٔ ۴۱۷/۴۵۸ مورخ ۸۶/۱۰/۱۱ تحصیلات تکمیلی دانشگاه جلسهٔ دفاع از پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد آقای/خانم علی قهرمی به شمارهٔ دانشجوئی ۸۴[illegible]۱۹۱۱۴۱۳ در رشتهٔ ریاضی محض گرایش .... تحت عنوان: بهترین تقریب با استفاده از تابع‌های upward و downward به ارزش ۶ واحد در ساعت ۱۲-۱۱ مورخ ۸۶/۱۱/۷ در حضور هیأت داوران مرکب از:

۱- استاد راهنما دکتر بهرام رضائی امضاء

۲- استاد مشاور ———— امضاء

۳- عضو هیأت داوران علیرضا صفاری امضاء

۴- عضو هیأت داوران [illegible] امضاء

۵- عضو هیأت داوران ———— امضاء

۶- عضو هیأت داوران ———— امضاء

۱۳۸۷/۱۲/۲۸

برگزار شد و با درجه عالی نمرهٔ ۱۹ ارزشیابی گردید.

رئیس دانشکده
امضاء

مدیر گروه آموزشی
امضاء

نمایندهٔ شورای تحصیلات تکمیلی دانشگاه در دانشکده
امضاء

رونوشت:

۱- ادارهٔ آموزش دانشکده جهت اطلاع و ثبت نمرهٔ دانشجو در پروندهٔ ریزنمرات.

۲- ادارهٔ کل تحصیلات تکمیلی دانشگاه به همراه یک نسخه از پایان‌نامهٔ ... دانشجو جهت اطلاع و اقدام لازم نسبت به صدور مجوز فراغت از تحصیل نامبرده.

تأییدیهٔ اعضاء هیأت داوران حاضر در جلسه دفاع از پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد

اعضاء هیأت داوران نسخهٔ نهایی پایان‌نامهٔ خانم/ آقای علی قدرتی

تحت عنوان بهترین ترتیب با استفاده از کمبرگی‌های upward و downward

را از نظر شکل و محتوا بررسی نموده، پذیرش آن را جهت نیل به درجهٔ کارشناسی ارشد مورد تأیید قرار دادند.

اعضاء هیأت داوران	نام و نام خانوادگی	رتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنما	دکتر بهرام رضاپور	دانشیار	
۲- استاد مشاور	—	—	
۳- استاد ناظر	علیرضا عفراوی	استادیار	
۴- استاد ناظر	[illegible]	[illegible]	
۵- نمایندهٔ شورای تحصیلات تکمیلی	دکتر آقازاده	[illegible]	

(نمونهٔ شماره (۱) مخصوص کارشناسی ارشد)

تشکر و قدردانی

ستایش خداوندی را سزاست که نعمت بزرگ «علم» را بر انسان ارزانی داشته وآن را مایه برتری قرار داده است که «**هل یستوی الذین یعلمون و الذین لا یعلمون**».

با استعانت از خداوند متعال که همواره پشتیبان همگان است، بر خود وظیفه می‌دانم از تمامی عزیزانی که راهگشای این پروژه بوده‌اند، تشکر و قدردانی نمایم. امید است که سپاس بی‌دریغ اینجانب را بپذیرند.

استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر شهرام رضاپور که گنجینه‌های دانش خود را در نهایت صبوری و سخاوت در اختیار اینجانب قرار دادند و مرا در انجام این پروژه همراهی کردند.

سایر اساتید محترم که در طول دوران تحصیلم افتخار شاگردی ایشان را داشته‌ام.

خانواده عزیزم و به ویژه پدر و مادرم که زحمات فراوانی را در طول زندگی و به ویژه در دوران تحصیل به خاطر من شکیبانه متحمل شده‌اند.

از دوست عزیزم آقای رضا ساعی که در برطرف کردن مشکلات تایپی آن مرا یاری کردند.

برای تمام این عزیزان، سربلندی، موفقیت و سلامتی در تمام مراحل زندگی را آرزومندم.

علی قدرتی سهلان

فهرست مندرجات

چکیده

تعیین شرط لازم وکافی برای کمینه‌سازی یک مساله کاری دشوار است. مهم است که شرایط مناسبی برای رده‌هایی از مسائل بهینه‌سازی غیر محدب پیدا کنیم. دراین رساله، کمترین فاصله یک نقطه از یک مجموعه بسته را در رده‌ای خاص از فضاهای نرمدار مرتب بررسی می‌کنیم. بدین منظور از ویژگی‌های مجموعه‌های پایین‌رو و بالارو که لزوماً محدب نیستند، استفاده می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: مجموعه پایین رو، مجموعه بالارو، مجموعه تقریبپذیر، بهترین تقریب.

پیشگفتار

در این رساله شرایط لازم و کافی برای وجود بهترین تقریب روی یک مجموعه بسته در یک فضای نرمدار مرتب بررسی می‌شود. رساله به چهار فصل تقسیم شده است. فصل اول به مقدمه اختصاص دارد. در فصل دوم ویژگی‌های اساسی مجموعه‌های پایین رو و بالارو را بیان و با استفاده از آنها، شرط لازم و کافی برای وجود بهترین تقریب یک مجموعه بسته در یک فضای نرمدار مرتب را به دست می‌آوریم. خواهیم دید که بهترین تقریب هر مجموعه پایین‌رو بسته (بالارو بسته) وجود دارد و می‌توان با استفاده از غلاف پایین‌رو (بالارو) یک مجموعه، شرط لازم و کافی برای وجود بهترین تقریب یک مجموعه دلخواه را بدست آورد. در فصل سوم با استفاده از ویژگی‌های مجموعه‌های پایین‌رو مساله وجود بهترین تقریب در مشبکه‌های باناخ را که حالت خاصی از فضاهای نرمدار مرتب هستند، بررسی می‌کنیم. مجموعه‌های اکیداً پایین‌رو و نقطه چبیشف را تعریف نموده و ثابت می‌کنیم که یک زیرمجموعه پایین‌رو اکیداً پایین‌رو است اگر و تنها اگر هر نقطه مرزی آن نقطه چبیشف باشد. فرض کنید X مشبکه باناخ باشد، $U \subseteq X$ و $x_\circ \in X$. خواهیم دید تحت چه شرایطی $(U, x_\circ)$ یک زوج چبیشف است. فصل چهارم به بررسی مساله بهترین تقریب در فضای $\mathbb{R}^I$، که I یک مجموعه اندیس متناهی است، اختصاص یافته است. در این فصل رابطه بین مجموعه‌های پایین‌رو و نرمال در فضای $\mathbb{R}^I$ بیان و توابع مینیممی جمع و ضرب تعریف می‌شود. سپس با استفاده از توابع مینیممی جمع و ضرب، یک مجموعه پایین‌رو از یک گوی تفکیک می‌شود. سرانجام از تفکیک یک مجموعه پایین‌رو ویک گوی برای بدست آوردن بهترین تقریب یک مجموعه دلخواه استفاده می‌کنیم. منابع اصلی این رساله مقالات [۶]، [۷]، [۸]، [۹]، [۱۰] و [۱۲] می‌باشند.

فصل ۱

مقدمه

در این فصل تعاریف، لم‌ها و قضایایی را که در فصل های آتی از آنها ا ستفاده خواهد شد، بیان می‌کنیم.

۱.۱ تعاریف

تعریف ۱.۱.۱ فرض کنید τ یک توپولوژی روی فضای برداری X باشد به طوری که

۱) هر نقطه X یک مجموعه بسته باشد،

۲) اعمال جمع و ضرب اسکالر نسبت به توپولوژی τ پیوسته باشند.

در این صورت، τ را توپولوژی برداری روی X و (X,τ) را یک فضای توپولوژیک برداری می‌نامند.
پیوسته بودن عمل جمع و ضرب اسکالر در فضای توپولوژیک برداری به این معناست که نگاشت‌های $+ : X \times X \longrightarrow X$ و $* : \Phi \times X \longrightarrow X$ پیوسته باشند(Φ برابر $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ است).

تعریف ۲.۱.۱ فرض کنید X یک فضای برداری باشد. $C \subseteq X$ را مجموعه محدب می‌نامند هرگاه به ازای هر $\circ \leq t \leq ۱$

$$tC + (۱ - t)C \subseteq C.$$

تعریف ۳.۱.۱ در فضای توپولوژیک برداری X، مجموعه محدب $A \subseteq X$ جاذب است اگر به ازای هر $x \in X$، $t = t(x) > \circ$ چنان وجود داشته باشد که $x \in tA$.

تعریف ۴.۱.۱ فرض کنید X فضای برداری حقیقی باشد. $K \subseteq X$ را یک مخروط نامند هرگاه

۱) $K + K \subseteq K$،

۲) به ازای هر $\alpha \geq \circ$، $\alpha K \subseteq K$.

مخروط K را نوک تیز نامند هرگاه $K \bigcap (-K) = \{\circ\}$.

تعریف ۵.۱.۱ فرض کنید X فضای برداری حقیقی و $\leq$ یک ترتیب جزیی روی X باشد. فضای X را مرتب نامند هرگاه به ازای هر $x, y, z \in X$ و هر $\lambda > \circ$،

۱) $x \leq y$ نتیجه دهد که $x + z \leq y + z$،

۲) $x \leq y$ نتیجه دهد که $\lambda x \leq \lambda y$.

تعریف ۶.۱.۱ فضای برداری مرتب X همراه با یک نرم را فضای نرمدار مرتب می‌نامند.

تعریف ۷.۱.۱ فرض کنید X یک فضای نرمدار و $U \subseteq X$ ناتهی باشد. برای $t \in X$، فاصله نقطه t از U را با $d(t, U)$ نشان داده و به صورت

$$d(t, U) = \inf_{u \in U} \|t - u\|, \qquad (۱.۳)$$

تعریف می‌کنند.

فرض کنید U زیرمجموعه‌ای بسته از فضای نرمدار X باشد و $t \in X$. مساله $P_r(U,t)$ را به صورت

$$\inf_{u\in U} \|t-u\|$$

تعریف می‌کنیم. مساله $P_r(U,t)$ جواب دارد هرگاه $u_\circ \in U$ چنان وجود داشته باشد که

$$\|t-u_\circ\| = d(t,U).$$

تعریف ۸.۱.۱ فرض کنید مساله $P_r(U,t)$ جواب داسته باشد. جواب مورد نظر را تصویر متریک t روی U یا بهترین تقریب t در U می‌نامند. مجموعه تمام تصاویر متریک t در U را با $P_U(t)$ نشان می‌دهند. در واقع

$$P_U(t) = \{u \in U : \|t-u\| = d(t,U)\}.$$

تعریف ۹.۱.۱ فرض کنید $U \subseteq X$ و $t \in X$. (U,t) را یک جفت تقریبپذیر نامند هرگاه $P_U(t) \neq \emptyset$. همچنین $U \subseteq X$ را تقریبپذیر نامند هرگاه به ازای هر $t \in X$، (U,t) یک جفت تقریبپذیر باشد.

تعریف ۱۰.۱.۱ $U \subseteq X$ را پایین‌رو نامند هر گاه $u \in U$ و $x \leq u$ نتیجه دهد که $x \in U$.

تعریف ۱۱.۱.۱ $V \subseteq X$ را بالارو نامند هر گاه $v \in V$ و $x \geq v$ نتیجه دهد که $x \in V$.

تعریف ۱۲.۱.۱ فضای برداری مرتب X را مشبکه برداری نامند هرگاه به ازای هر $x,y \in X$، $\sup\{x,y\}$ و $\inf\{x,y\}$ در X باشند. اگر X یک مشبکه برداری باشد، آنگاه $x^+ = \sup\{x,\circ\}$، $x^- = sup\{-x,\circ\}$ و $|x| = \sup\{x,-x\}$ را به ترتیب جزء مثبت، جزء منفی و قدر مطلق $x \in X$ می‌نامند. توجه کنید که $x = x^+ - x^-$ و $|x| = x^+ + x^-$.

تعریف ۱۳.۱.۱ $X^+ = \{x \in X \ : x \geq 0\}$ را مخروط مثبت مشبکه برداری X می‌نامند.

تعریف ۱۴.۱.۱ $G \subseteq X^+$ را زیرمجموعه نرمال مشبکه برداری X نامند هر گاه $g \in G$ و $0 \leq x \leq g$ نتیجه دهد که $x \in G$.

تعریف ۱۵.۱.۱ فرض کنید X مشبکه برداری باشد. نرم $\|\cdot\|$ را نرم مشبکه‌ای روی X می‌نامند هر گاه $|x| \leq |y|$ نتیجه دهد که $\|x\| \leq \|y\|$.

تعریف ۱۶.۱.۱ مشبکه برداری X همراه با نرم مشبکه‌ای را مشبکه نرمدار نامند. اگر نرم مشبکه‌ای کامل باشد، X را مشبکه باناخ می‌نامند.

تعریف ۱۷.۱.۱ فرض کنید X مشبکه نرمدار باشد. $l \in X$ را عضو یکه قوی X می‌نامند هرگاه $\|l\| = 1$ و به ازای هر $x \in X$، $\lambda > 0$ چنان وجود داشته باشد که $|x| \leq \lambda \cdot l$.

تعریف ۱۸.۱.۱ اگر X مشبکه نرمدار با عضو یکه قوی l باشد گوی باز $B(x_0, r)$ به صورت

$$B(x_0, r) = \{x \in X : x_0 - r \cdot l \leq x \leq x_0 + r \cdot l\}, \qquad (1.4)$$

تعریف می‌شود.

تعریف ۱۹.۱.۱ فرض کنید X مشبکه نرمدار با عضو یکه قوی l باشد. تابع $s : X \longrightarrow \mathbb{R}$ را موضوعی می‌نامند هر گاه

۱) s صعودی باشد،

۲) به ازای هر $x \in X$ و $\lambda \in \mathbb{R}$، $s(x + \lambda \cdot l) = s(x) + \lambda$.

۲.۱ لم‌ها و قضایای مورد نیاز

لم ۱.۲.۱ [گزاره ۱.۷ ;[۱۱]] فرض کنید X یک فضای توپولوژیک برداری باشد. به ازای هر $a \in X$ و هر $\lambda \in \Phi$، نگاشت‌های $M_\lambda : X \longrightarrow X$ و $T_a : X \longrightarrow X$ به ترتیب با ضابطه‌های $T_a(x) = a + x$ و $M_\lambda = \lambda x$، همسانریختی هستند.

نتیجه ۱.۲.۱ اگر X یک فضای توپولوژیک برداری باشد، آنگاه $E \subseteq X$ باز است اگر و تنها اگر به ازای هر $a \in X$، $a + E$ باز باشد.

برهان. فرض کنید E باز باشد. چون به ازای هر $a \in X$، T_a نگاشت باز است، لذا $T_a(E) = a+E$ باز است. برعکس، اگر به ازای هر $a \in X$، $a + E$ باز باشد، آنگاه از آنجا که T_{-a} باز است، نتیجه می‌شود که $T_{-a}(a + E) = E$ باز است. ■

بنا به لم ۱.۲.۱ و نتیجه ۱.۲.۱، اگر (X, τ) فضای توپولوژیک برداری باشد، آنگاه توپولوژی τ توسط هر پایه موضعی تولید می‌شود. در نتیجه، همواره توپولوژی τ را توپولوژی تولید شده توسط پایه موضعی در نقطه صفر در نظر می‌گیریم. بنابراین، یک مجموعه باز شامل $a \in X$، به شکل $a + V$ است که V یک همسایگی باز شامل صفر می‌باشد.

در واقع مساله $P_r(U, t)$ بررسی وجود عضوی در U است که کمترین فاصله را از نقطه دلخواه $t \in X$ داشته باشد. در فصل‌های آتی به بررسی شرایط لازم و کافی برای وجود جوابی برای این مساله، در صورتی که U بسته باشد، می‌پردازیم. مساله بهترین تقریب برای مجموعه‌های محدب و متمم محدب توسعه زیادی یافته و در بسیاری از زمینه‌های ریاضی کاربرد دارد اما بعضی وقتها فرض محدب بودن محدودیت بزرگی است. لذا جالب است که مساله $P_r(U, t)$ برای مجموعه‌هایی بررسی شود که لزوماً محدب نیستند. به همین دلیل در این فصل مجموعه‌های پایین‌رو (downward) و بالارو (upward) را معرفی و برخی ویژگی‌های آنها را اجمالاً بیان می‌کنیم. در فصل‌های آتی، برای تجزیه و تحلیل مساله

$P_r(U,t)$ از زیرمجموعه‌های پایین‌رو و بالارو در فضاهای نرمدار مرتب استفاده می‌کنیم.
فرض کنید X فضای نرمدار مرتب باشد.

لم ۲.۲.۱ اجتماع و اشتراک هر خانواده از مجموعه‌های پایین‌رو (بالارو) یک مجموعه پایین‌رو (بالارو) است.

برهان. فرض کنید $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ یک خانواده از مجموعه‌های پایین‌رو باشد، $u \in U = \bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha$ و $x \leq u$. در این صورت $\alpha \in I$ چنان وجود دارد که $u \in U_\alpha$. چون U_α پایین‌رو است، $x \in U_\alpha$. در نتیجه، $x \in U$. پس U پا یین‌رو است. ■

فرض کنید X فضایی توپولوژیک باشد. بستار $U \subseteq X$ را با $cl(U)$ نشان خواهیم داد.

لم ۳.۲.۱ فرض کنید X مشبکه‌ای نرمدار و $G \subseteq X^+$ نرمال باشد. در این صورت، $cl(G)$ نیز نرمال است.

برهان. فرض کنید $g \in cl(G)$ و $\circ \leq g' \leq g$. دنباله $\{g_n\}_{n\geq ۱} \subseteq G$ چنان وجود دارد که $g_n \to g$. قرار دهید $g' = \min\{g_n, g'\}_{n\geq ۱}$. در این صورت برای هر n، $\circ \leq g'_n \leq g_n$. چون G نرمال است، برای هر $n \geq ۱$، $g'_n \in G$. اما $g_n \to g$ و $\circ \leq g' \leq g$. بنا بر این، عدد طبیعی N چنان هست که برای $n \geq N$، $g'_n \leq g_n$. پس برای هر $n \geq N$، $g'_n = g'$. لذا $g'_n \to g'$. پس $g' \in cl(G)$. ■

لم ۴.۲.۱ اگر $\{G_\alpha\}_{\alpha\in I}$ یک خانواده از مجموعه‌های نرمال در X^+ باشد، آنگاه $\bigcup_{\alpha\in I} G_\alpha$ و $\bigcap_{\alpha\in I} G_\alpha$ نیز نرمال هستند.

برهان. فرض کنید $G = \bigcup_{\alpha\in I} G_\alpha$، $g \in G$ و $\circ \leq x \leq g$. در این صورت، $\alpha \in I$ چنان هست که $g \in G_\alpha$. چون G_α نرمال است، $x \in G_\alpha$. در نتیجه، $x \in G$. لذا G نرمال است. نرمال بودن $\bigcap_{\alpha\in I} G_\alpha$ نیز به طور مشابه ثابت می‌شود. ■

لم ۵.۲.۱ [قضیه ۲۴.۱ ؛ [۲]] اگر X مشبکه برداری باشد، آنگاه به ازای هر $x, y, z \in X$ داریم:

۱) $|x + y| \leq |x| + |y|$،

۲) $||x| - |y|| \leq |x - y|$،

۳) $|x^+ - y^+| \leq |x - y|$.

لم ۶.۲.۱ فرض کنید X مشبکه نرمدار باشد. در این صورت، برای هر $x, y \in X$ داریم:

۱) $\|x^+ - y^+\| \leq \|x - y\|$،

۲) $\||x| - |y|\| \leq \|x - y\|$.

برهان. از تعریف ۱۵.۱.۱ و لم ۵.۲.۱ نتیجه حاصل می‌شود. ■

لم ۷.۲.۱ اگر X مشبکه نرمدار باشد، آنگاه نگاشت‌های $x \longrightarrow |x|$ و $x \longrightarrow x^+$ به طور یکنواخت پیوسته‌اند.

برهان. بنا به لم ۶.۲.۱، به ازای هر $\varepsilon > 0$ ، و هر $x, y \in X$ که $\|x - y\| < \varepsilon$ داریم

$$\||x| - |y|\| \leq \|x - y\| < \varepsilon,$$

$$\|x^+ - y^+\| \leq \|x - y\| < \varepsilon.$$

لذا نگاشت‌های $x \longrightarrow |x|$ و $x \longrightarrow x^+$ به طور یکنواخت پیوسته‌اند. ■

فصل ۲

شرایط لازم و کافی برای کمینه‌سازی

مساله کمینه‌سازی، بخصوص کمترین فاصله از یک مجموعه بسته، حالت خاصی از یک مساله بهینه‌سازی است. در این فصل، به بررسی شرایط لازم و کافی برای وجود کمترین فاصله یک نقطه از یک مجموعه بسته در یک فضای نرمدار مرتب می‌پردازیم.

۱.۲ تعریف نرم روی فضا با استفاده از مخروط محدب، بسته و نوک تیز

فرض کنید X یک فضای نرمدار باشد و $K \subseteq X$ مخروط نوک تیز، بسته و محدب باشد. رابطه $\succeq$ روی X را به صورت

$$x \succeq y \Longleftrightarrow x - y \in K \qquad (۲.۱)$$

تعریف می‌کنیم. رابطه $\succeq$ یک ترتیب جزئی روی X است [۴].

در تمام این فصل، منظور از فضای X، فضای نرمدار مرتب با ترتیب (۲.۱) می‌باشد. درون و مرز $U \subseteq X$ به ترتیب با $int(U)$ و $bd(U)$ نشان داده می‌شوند.

فرض کنید K توپر باشد و $l \in int(K)$. تابع $p : X \longrightarrow \mathbb{R}$ را به صورت

$$p(x) = \inf\{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda \cdot l \preceq x\} \qquad (x \in X) \qquad (۲.۲)$$

تعریف کنید.

اگر $x = y$، به ازای هر $\lambda \in \mathbb{R}$، $\lambda \cdot l - x = \lambda \cdot l - y$. در نتیجه

$$\{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda \cdot l - x \in K\} = \{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda \cdot l - y \in K\}.$$

بنابراین

$$p(x) = \inf\{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda \cdot l - x \in K\} = \inf\{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda \cdot l - y \in K\} = p(y),$$

لذا p خوش تعریف است. حال به بررسی برخی ویژگی‌های تابع p می‌پردازیم.

خاصیت اول: تابع p متناهی است و به ازای هر $x \in X$،

$$x \preceq p(x) \cdot l.$$

برهان. چون $l \in int(K)$، $r > \circ$ چنان هست که $l + B_r(\circ) \subseteq K$. فرض کنید $x \in X$ دلخواه باشد. چون هر همسایگی صفر، جاذب است $n_\circ \in N$ چنان موجود ا ست که $x \in n_\circ B_r(\circ)$. اما K یک مخروط است، پس

$$n_\circ \cdot l + n_\circ B_r(\circ) \subseteq n_\circ K \subseteq K.$$

به راحتی دیده می‌شود اگر $t \in B_r(\circ)$، آنگاه $-t \in B_r(\circ)$. بنابراین $-x \in n_\circ B_r(\circ)$. در نتیجه

$$n_\circ \cdot l - x \in n_\circ \cdot l + n_\circ B_r(\circ) \subseteq K,$$

یعنی $x \preceq n_\circ \cdot l$. پس $p(x) \leq n_\circ$. حال اگر $\lambda < -n_\circ$ و $x \preceq \lambda \cdot l$، آنگاه $-x \succeq -\lambda \cdot l$. از طرفی $x \in n_\circ B_r(\circ)$ و $n_\circ \cdot l + n_\circ B_r(\circ) \subseteq K$. پس $n_\circ \cdot l + x \in K$، یعنی $n_\circ \cdot l \succeq -x$. لذا $-\lambda \cdot l \preceq -x \preceq n_\circ \cdot l$. در نتیجه، $(n_\circ + \lambda) \cdot l \in K$. اما چون $\lambda < -n_\circ$، لذا $n_\circ + \lambda < \circ$. چون

$$-l = (\frac{-۱}{n_\circ + \lambda})(n_\circ + \lambda) \cdot l \in (\frac{-۱}{n_\circ + \lambda})K \subseteq K,$$