# بسم الله الرحمن الرحيم

٢٥٤٣٢٩٠٤ - ١٥٨٥٤٠

کتابخانه مرکزی دانشگاه اصفهان
شماره ثبت
تاریخ ثبت

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه فیزیک

پایان نامه‌ی کارشناسی ارشد رشته‌ی فیزیک گرایش اتمی-مولکولی

# اپتیک کوانتومی میکروکاواک‌های نیم‌رسانا در حضور نقطه‌ی کوانتومی

استادان راهنما:

دکتر رسول رکنی زاده

دکتر محمد حسین نادری

پژوهشگر:

زینب هرسیج

مهرماه ۱۳۸۹

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
پژوهشگاه علوم و فناوری اطلاعات ایران
IRANDOC
مرکز اطلاعات و مدارک علمی ایران

۱۵۸۵۴۰

۱۳۹۰/۳/۱۶

کلیه حقوق مادی مترتب بر نتایج مطالعات، ابتکارات
و نوآوری های ناشی از تحقیق موضوع این پایان
نامه متعلق به دانشگاه اصفهان است.

شیوه نگارش پایان نامه
رعایت شده است.
تحصیلات تکمیلی دانشگاه اصفهان

**دانشگاه اصفهان**

**دانشکده علوم**

**گروه فیزیک**

**پایان نامه ی کارشناسی ارشد رشته ی فیزیک گرایش اتمی مولکولی خانم زینب هرسیج**

**تحت عنوان**

# اپتیک کوانتومی میکروکاواک‌های نیم‌رسانا در حضور نقطه‌ی کوانتومی

در تاریخ ۸۹/۷/۲۷ توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه عالی به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنمای اول پایان نامه دکتر رسول رکنی‌زاده با مرتبه‌ی علمی دانشیار امضا

۲- استاد راهنمای دوم پایان نامه دکتر محمد حسین نادری با مرتبه‌ی علمی دانشیار امضا

۳- استاد داور داخل گروه دکتر فردین خیراندیش با مرتبه‌ی علمی دانشیار امضا

۴- استاد داور خارج از گروه دکتر محمد مهدی طهرانچی با مرتبه‌ی علمی استاد امضا

امضای مدیر گروه

University of Isfahan
Department of Physics

## تشکر و قدردانی

رب هب لی حکماً و الحقنی بالصالحین

خداوند بزرگ و بلندمرتبه را شاکرم که به من توفیق علم‌اندوزی داد و مرا در نوشتن این پایان‌نامه یاری بسیار نمود.

در ابتدا بر خود لازم می‌بینم که از استادان راهنمای خود آقایان دکتر رسول رکنی‌زاده و دکتر محمد حسین نادری کمال تشکر را داشته باشم که با راهنمایی‌های بی‌دریغ خود مسیر تدوین این پایان‌نامه را بر من هموار کردند. در ضمن باید تشکر ویژه‌ای از دکتر رکنی‌زاده داشته باشم که در این مدت در تمامی عرصه‌های آموزشی پژوهشی و پرورشی نقش استادی توان‌مند را ایفا کردند.

همچنین از آقایان دکتر محمد مهدی طهرانچی از دانشگاه شهید بهشتی و دکتر فردین خیراندیش از دانشگاه اصفهان تشکر می‌کنم که به دقت پایان‌نامه‌ی اینجانب را به نقد و بررسی پرداختند.

در پایان از حمایت‌ها و پشتیبانی‌های خانواده‌ام تشکر می‌کنم که در این مدت در مواجهه با مشکلات مرا یاری کردند. در این میان از پدر و مادر عزیزم که در تمام مدت تحصیل مشوق من بودند سپاس‌گزارم و از همسر مهربانم که نقش همراهی را در این سال‌های اخیر به خوبی ایفا کرد کمال تشکر را دارم.

## چکیده

در این پایان‌نامه به بررسی ویژگی‌های اپتیکی سامانه‌ی نقطه‌ی کوانتومی درون میکروکاواک نیم‌رسانا می‌پردازیم. در سامانه‌ی مورد نظر، برهم‌کنش نقطه‌ی کوانتومی با تک مد میکروکاواک به تولید اکسیتون (زوج الکترون–حفره‌ی مقید) می‌انجامد. برانگیختگی‌های اکسیتونی تولید شده بسته به اندازه‌ی نقطه‌ی کوانتومی که اکسیتون در آن شکل گرفته و چگالی برانگیختگی‌های تولید شده، از خود رفتار بوزونی یا فرمیونی نشان می‌دهد. تحلیل رفتار بوزونی اکسیتون‌ها در مقایسه با رفتار فرمیونی آنها از سادگی قابل ملاحظه‌ای برخوردار است. علاوه بر برهم‌کنش اکسیتون‌ها با تک مد فوتونی درون میکروکاواک، برهم‌کنش‌های دیگری نیز در سامانه‌ی مورد نظر روی می‌دهند که مسئول بروز فرایندهای اتلاف به شمار می‌آیند. به منظور بررسی رفتار دینامیکی سامانه‌ی برهم‌کنشی در حضور سازوکارهای اتلاف درون کاواک، برانگیختگی‌های فونونی و فرآیند دمش، رهیافت عملگر چگالی را به کار می‌گیریم. با حل معادله‌ی عملگر چگالی سامانه، توابع همبستگی مرتبه‌ی اول و مرتبه‌ی دوم را محاسبه می‌کنیم. این دو دسته تابع همبستگی از دینامیک دو زمانی پیروی می‌کنند. از این رو، با استفاده از قضیه‌ی کوانتومی رگرسیون، توابع همبستگی دو زمانی را بر حسب توابع همبستگی تک زمانی بدست می‌آوریم. تبدیل فوریه‌ی تابع همبستگی مرتبه‌ی اول برحسب بسامد، طیف تابشی فوتون‌های گسیل شده از سامانه را بدست می‌دهد که اطلاعات ارزشمندی از پاسخ سامانه را در بر دارد. نمودار طیف تابشی بر حسب بسامد وقوع برهم‌کنش قوی در میکروکاواک را به نمایش می‌گذارد. در حضور فونون‌ها و در دمای مخالف صفر قدرت برهم‌کنش کاهش می‌یابد. از سوی دیگر، تابع همبستگی مرتبه‌ی دوم معیار مناسبی برای تشخیص آمار کوانتومی شمارش فوتون‌های گسیل شده از سامانه فراهم می‌آورد. نشان می‌دهیم که فوتون‌های گسیل شده از سامانه می‌توانند از خود آمار زیر پواسونی (پادگروهه شدن) را به نمایش گذارند. از این رو سامانه‌ی مورد مطالعه را می‌توان به عنوان یک چشمه‌ی نور غیرکلاسیک در نظر گرفت. با وجود این، حضور فونون‌ها به عنوان یکی از عوامل اتلاف اثر قابل ملاحظه‌ای بر رفتار غیرکلاسیک فوتون‌های گسیل شده می‌گذارد به طوری که با افزایش دما، احتمال گسیل فوتون‌های پادگروهه به شدت کاهش می‌یابد .



**کلید واژه‌ها:** اپتیک کوانتومی، نیم‌رسانا، میکروکاواک، نقطه‌ی کوانتومی

# فهرست مطالب


**۱ برهم‌کنش نور با سامانه‌های نانوساختار** ۱

۱-۱ برهم‌کنش نور با سامانه‌های نیم‌رسانا ۲

۱-۲ هامیلتونی سامانه‌ی برهم‌کنشی ۵

۱-۲.۱ کوانتش میدان الکترومغناطیسی آزاد ۷

۱-۲.۲ کوانتش میدان الکترونی آزاد ۹

۱-۲.۳ برهم‌کنش‌های الکترون ۱۰

۱-۳ چاه کوانتومی ۱۳

۱-۴ نقطه‌ی کوانتومی ۱۴

**۲ طیف اپتیکی نقطه‌ی کوانتومی درون میکروکاواک** ۱۸

۲-۱ مقدمه ۱۸

۲-۱.۱ هامیلتونی آزاد ۱۸

۲-۱.۲ جفت‌شدگی همدوس ۲۲

۲-۱.۳ فرایند واهمدوسی: معادله‌ی تحول ماتریس چگالی و جملات لیندبلاد ۲۵

۲-۲ تابع همدوسی مرتبه‌ی اول و توان تابشی ۲۹

۲-۳ طیف نور گسیل شده از نقطه‌ی کوانتومی درون میکروکاواک ۳۱

۲-۳.۱ بررسی نقطه‌ی کوانتومی در رژیم بوزونی ۳۱

۲-۳.۲ مقادیر میانگین ۳۲

۲-۳.۳ توان تابشی گسیل شده از نقطه‌ی کوانتومی درون میکروکاواک ۳۵

۲-۳-۴ بررسی نقطه‌ی کوانتومی در رژیم فرمیونی . . . . . ۴۱

**۳ آمار کوانتومی فوتون‌های گسیل شده از نقطه‌ی کوانتومی درون کاواک ۴۶**

۳-۱ مقدمه . . . . . ۴۶

۳-۲ تابع همبستگی مرتبه‌ی دوم و آمار کوانتومی . . . . . ۴۷

۳-۲-۱ بررسی آمار کوانتومی نقطه‌ی کوانتومی در رژیم بوزونی . . . . . ۴۸

۳-۲-۲ بررسی نقطه‌ی کوانتومی در رژیم فرمیونی . . . . . ۵۵

**۴ اثر فونون‌ها بر ویژگی‌های اپتیکی سامانه ۵۷**

۴-۱ معرفی فونون‌ها . . . . . ۵۷

۴-۲ بررسی اثر حضور فونون‌ها بر ویژگی‌های اپتیکی نقطه‌ی کوانتومی . . . . . ۶۲

۴-۳ بررسی دینامیک سامانه در حضور فونون‌ها . . . . . ۶۶

۴-۳-۱ معادله‌ی تحول برای مقادیر میانگین تک‌زمانی . . . . . ۶۶

۴-۴ طیف اپتیکی در تقریب مرتبه‌ی صفرم . . . . . ۶۹

۴-۴-۱ حالت ایستا . . . . . ۷۲

۴-۴-۲ گسیل خودبخودی . . . . . ۷۵

۴-۵ اثر فونون‌ها بر آمار کوانتومی فوتون‌های گسیل شده در تقریب مرتبه‌ی صفرم . . . . . ۷۷

۴-۵-۱ آمار کوانتومی فوتون‌های گسیل شده از سامانه در حالت ایستا . . . . . ۸۲

**۵ جمع‌بندی نهایی ۸۸**

**کتاب‌نامه ۹۱**

# پیش‌گفتار

در این پایان‌نامه برآنیم تا اپتیک کوانتومی نقطه‌ی کوانتومی نیم‌رسانا را درون میکروکاواک مورد بررسی قرار دهیم. نیم‌رساناها در چند دهه‌ی اخیر توجه زیادی را به خود جلب کرده‌اند. دلیل این توجه امکان بکارگیری گسترده‌ی آنها در ابزارهای دقیق اندازه‌گیری [۱] و محاسبات کوانتومی[۱] [۲] و اطلاع‌رسانی کوانتومی[۲] است[۹]. بخش عمده‌ای از تحقیقات انجام شده در این زمینه مربوط به ابداع شیوه‌های عملی برای کوچک کردن ابعاد این سامانه‌ها تا حدی است که اصول مکانیک کوانتومی اجازه می‌دهد. با کوچک کردن ابعاد نیم‌رساناها در مقایسه با طول موج دوبروی برانگیختگی ایجاد شده در آن، ویژگی‌های جدیدی در آنها ظاهر می‌شود. با کوچک کردن هر سه بعد، سامانه‌ی نیم‌رسانای صفر بعدی یا نقطه‌ی کوانتومی حاصل می‌شود که در آن حرکت حامل‌های بار در سه بعد فضا محصور شده است. این در حالی است که در سامانه‌های برهم‌کنشی متشکل از نقاط کوانتومی و تابش الکترومغناطیسی، حرکت فوتون‌ها در هر سه بعد فضا امکان پذیر است. به منظور ایجاد جفت‌شدگی قوی میان نقطه‌ی کوانتومی و فوتون، سامانه‌ی برهم‌کنشی مزبور را درون ساختاری موسوم به میکروکاواک قرار می‌دهند. میکروکاواک‌ها سامانه‌هایی هستند که از یک لایه‌ی میانی و دو بازتابنده‌ی براگ تشکیل شده است. لایه‌ی میانی را چشمه‌ی گسیلنده‌ی نور، به عنوان مثال یک نقطه‌ی کوانتومی، تشکیل می‌دهد که ضخامت آن مضرب فردی از طول موج نور گسیل شده است. دو بازتابنده‌ی براگ که در دو طرف این لایه قرار گرفته است خود از لایه‌های دی‌الکتریکی که یک در میان ثابت دی‌الکتریک بزرگ و کوچک دارند تشکیل شده است. ضخامت هر یک از این لایه‌ها یک چهارم طول موج نور است. به این ترتیب ابعاد این سامانه در حدود طول موج فوتون است.

سامانه‌ی نیم‌رسانای مورد بررسی نقطه‌ی کوانتومی است که در برهم‌کنش با تک مد میدان کوانتیده‌ی کاواک است. این سامانه در اثر اعمال دمش برانگیخته می‌شود. به این ترتیب که الکترونی از نوار ظرفیت به نوار رسانش رفته و جای خالی الکترون در نوار ظرفیت حفره نامیده می‌شود. برهم‌کنش کولنی بین الکترون نوار رسانش با بار منفی و حفره‌ی نوار ظرفیت با بار مثبت برقرار است، الکترون-حفره‌ی مقید ذره‌ای می‌سازد به نام اکسیتون. با معرفی اکسیتون برهم‌کنش نور با سامانه‌های نیم‌رسانا به برهم‌کنش اکسیتون-فوتون تبدیل می‌شود. با تعریفی که از اکسیتون کردیم، این ذره می‌تواند از خود رفتار بوزونی یا فرمیونی نشان دهد. اگر اندازه‌ی نقطه‌ی کوانتومی در مقایسه با شعاع بوهر اکسیتون در آن بزرگتر باشد یا چگالی برانگیختگی‌های آن پایین باشد، اکسیتون درون نقطه‌ی کوانتومی از آمار بوزونی

[۱] quantum computation

[۲] quantum information

پیروی می‌کند. از آنجا که فوتون ماهیت بوزونی دارد، برهم‌کنش اکسیتون-فوتون، برهم‌کنش دو سامانه‌ی بوزونی می‌شود. سامانه‌های بوزونی از روابط جابجایی پیروی می‌کنند، تقارن دارند و دینامیک آنها به صورت تحلیلی قابل بررسی است. چنانچه اندازه‌ی نقطه‌ی کوانتومی به گونه‌ای باشد که عدد اشغال اکسیتون در حالت‌های آن حداکثر یک باشد، اکسیتون از آمار فرمیونی پیروی می‌کند. به این ترتیب باید برهم‌کنش بین دو سامانه‌ی بوزونی و فرمیونی بررسی شود. روابط پادجابجایی برای اکسیتون و روابط جابجایی برای فوتون‌ها برقرار است. این تفاوت دینامیک مسئله را پیچیده می‌کند و به سادگی مورد بوزونی نیست. به همین دلیل آن را به اختصار در فصل‌های دوم و سوم توضیح می‌دهیم. در بقیه‌ی پایان‌نامه اکسیتون را بوزون در نظر می‌گیریم.

رهیافت بررسی دینامیک سامانه رهیافت عملگر چگالی است. به طوری که باید معادله‌ی تحول ماتریس چگالی معین باشد و در پی آن دینامیک همبستگی‌های مورد نیاز بدست آید. ویژگی‌های اپتیکی سامانه را به طور نظری توابع همبستگی مرتبه‌ی اول و دوم تعیین می‌کنند. تبدیل فوریه‌ی بسامدی تابع همبستگی مرتبه‌ی اول، طیف تابشی و تابع همبستگی مرتبه‌ی دوم، آمار کوانتومی فوتون‌های گسیل شده از سامانه را می‌دهد. این توابع همبستگی تابعیت دو زمانی دارند، بنابراین به سادگی معادلات تحول‌های تک زمانی حاصل نمی‌شود. این معادلات را باید از قضیه‌ی رگرسیون بدست آورد. این قضیه بیان می‌کند اگر مجموعه معادلات حرکت برای همبستگی‌های تک‌زمانی برقرار باشد، همین معادلات برای همبستگی‌های دوزمانی هم برقرار است.

همبستگی‌های دو زمانی می‌توانند مرتبه‌ی اول، دوم یا مراتب بالاتر باشند. نقطه‌ی کوانتومی نیم‌رسانا همانند اتم شامل هسته و الکترون است. هسته‌ها یون‌های با بار مثبت ثابت هستند که الکترون‌هایی با بار منفی حول آن در گردشند. هسته‌ها را به عنوان یک پتانسیل بار زمینه در نظر می‌گیریم. در فصل‌های دو و سه اثر هسته‌ها را در دینامیک سامانه وارد نمی‌شمند و ویژگی‌های اپتیکی را در حالتی که پتانسیل هسته را، یک پتانسیل ثابت در نظر گرفته‌ایم، بدست می‌آوریم. در فصل چهارم هسته‌ها به صورت اثر فونون‌ها در دینامیک مسئله گنجانده شده‌اند. ویژگی‌های اپتیکی در این فصل در حضور فونون‌ها و در دماهای متفاوت بررسی می‌شود.

همانگونه که در ابتدای این قسمت بیان کردیم، ورود نور به نیم‌رسانا سبب برانگیختگی الکترون از نوار ظرفیت به نوار رسانش می‌شود و بدین‌سان در نوار ظرفیت یک حفره بوجود می‌آید. حفره شبه ذره‌ای است که جرم آن برابر جرم الکترون و بار آن مخالف بار الکترون است. این دو ذره‌ی باردار از طریق برهم‌کنش کولنی با یکدیگر جفت می‌شوند و بدین ترتیب شبه ذره‌ی مقیدی موسوم به اکسیتون تشکیل می شود. اکسیتون طول عمر معینی دارد، بطوری که پس از گذشت این طول عمر الکترون-حفره‌ی مقید دستخوش بازترکیب می‌شود و انرژی اکسیتون نابود شده می‌تواند به

صورت فوتون گسیل شود. فوتون گسیل شده ممکن است توسط الکترون دیگری جذب شود و فرایند به طور چرخه‌ای تکرار گردد تا اینکه سرانجام با وقوع فرایند اتلاف، فوتون از سامانه خارج شود. در سامانه‌ی نیم‌رسانای توده‌ای این فرایند به دلیل تقارن شبکه تکرار می‌شود و فوتون از سامانه خارج نمی شود. هر بار که فوتون توسط یک الکترون جذب می‌شود. مقداری از انرژی خود را به یاخته‌ی بنیادی شبکه می‌دهد. به این ترتیب بعد از چند بار جذب و گسیل فوتون در کاواک انرژی فوتون در شبکه توزیع می‌شود. در مقابل، در مورد نقطه‌ی کوانتومی به دلیل محصورشدگی در هر سه بعد فضا، تقارن موجود در ساختار توده‌ای را ندارد و در آن بعد از چندین بار جذب و گسیل فوتون در سامانه، فوتون از سامانه خارج می‌شود. بنابراین نقطه‌ی کوانتومی می‌تواند به عنوان گسیلنده‌ی نور درون میکروکاواک قرار گیرد. با معرفی اکسیتون، برهم‌کنش نور با ماده‌ی نیم‌رسانا در اپتیک کوانتومی را می‌توان در قالب برهم‌کنش فوتون با اکسیتون مورد بررسی قرار داد.

مهم‌ترین ویژگی‌های اپتیکی نانوساختارهای نیم‌رسانا، طیف تابشی و آمار کوانتومی فوتون‌های گسیل شده از آنها است. طیف تابشی اطلاعات ارزشمندی از پاسخ سامانه در اختیار می‌گذارد و آمار کوانتومی دربرگیرنده‌ی اطلاعات مربوط به رفتار کلاسیک یا غیرکلاسیک نور گسیل شده است. طیف تابشی تبدیل فوریه‌ی تابع همبستگی مرتبه‌ی اول برحسب بسامد و تابع همبستگی مرتبه‌ی دوم تعیین کننده‌ی آمار کوانتومی است. بنابراین برای تعیین ویژگی‌های اپتیکی مورد نظر باید دینامیک این توابع همبستگی معلوم باشد. توابع همبستگی مورد نظر از دینامیک دو زمانی پیروی می‌کنند. دینامیک دو زمانی توابع همبستگی از قضیه‌ی کوانتومی رگرسیون بدست می‌آید. این قضیه معادله‌ی تحول همبستگی‌های دو زمانی را به معادله‌ی تحول همبستگی‌های تک‌زمانی مرتبط می‌کند.

در این پایان‌نامه طیف تابشی و آمار کوانتومی نور گسیل شده از یک نقطه‌ی کوانتومی درون میکروکاواک را در غیاب فوتون‌ها و در حضور آنها بررسی می‌کنیم. در فصل اول مقدمه‌ای از معرفی نیم‌رساناها، میکرو کاواک‌ها، نقطه‌های کوانتومی و برهم‌کنش نور با سامانه‌های نیم‌رسانا ارائه می‌کنیم. فصل دوم ابتدا برهم‌کنش‌های موجود در میکرو کاواک را معرفی می‌کنیم، سپس دینامیک دو زمانی تابع همبستگی مرتبه‌ی اول را بدست می‌آوریم. سپس طیف تابشی سامانه را در موردی که اکسیتون دارای رفتار بوزونی است به طور مشروح محاسبه می‌کنیم. در بررسی طیف تابشی دو حالت گسیل خودبخود و حالت ایستا را در نظر می‌گیریم. با رسم طیف تابشی بر حسب بسامد وقوع برهم‌کنش قوی بین نور با ماده ی نیم‌رسانا را نشان می‌دهیم. وضعیتی که در آن نقطه‌ی کوانتومی دارای رفتار فرمیونی است، را به اختصار توضیح خواهیم داد. در فصل سوم به بررسی آمار کوانتومی فوتون‌های گسیل شده از سامانه خواهیم پرداخت. تابع همبستگی مرتبه‌ی دوم را که معیار تعیین آمار کوانتومی است، در رژیم بوزونی و در حالت ایستا مورد بررسی قرار

می‌دهیم و با تحلیل عددی آن، نوع آمار کوانتومی فوتون‌های گسیل شده از سامانه را تعیین می‌کنیم. نشان خواهیم داد که نور گسیل شده از اکسیتون درون سامانه آمار پادگروهه دارد. پادگروهه شدن نور گسیل شده نمایشگر وجود نور غیرکلاسیک است[۳]. به این ترتیب امکان گسیل نور غیر کلاسیک از سامانه‌ی شامل نقطه‌ی کوانتومی درون میکروکاواک وجود دارد. فصل چهارم را به بررسی ویژگی‌های اپتیکی، طیف تابشی و آمار کوانتومی فوتون‌های گسیل شده از سامانه، در حضور فونون‌ها اختصاص می‌دهیم. در واقع، ارتعاشات فونونی، که خود به طور چشمگیر نسبت به تغییرات دما حساسند، بر قدرت جفت شدگی اکسیتون با فوتون اثر می‌گذارند و بدین سان ویژگی‌های اپتیکی نقطه‌ی کوانتومی دستخوش تغییر می‌شوند. در پایان به جمع‌بندی نتایج حاصل از این تحقیق خواهیم پرداخت.

# فصل ۱

# برهم‌کنش نور با سامانه‌های نانوساختار

مطالعه‌ی برهم‌کنش نور با سامانه‌های نیم‌رسانا به عنوان روشی برای شناسایی ویژگی‌های اپتیکی این سامانه‌ها، همواره مورد توجه بوده است. نیم‌رساناهای حجیم دارای تقارن شبکه‌ای هستند که در آن اصل پایستگی تکانه‌ی خطی برقرار است. با ورود فوتون‌ها به سامانه، الکترون از نوار ظرفیت، به نوار رسانش برانگیخته می‌شود و بدین سان در نوار ظرفیت یک حفره بوجود می آید. اگر انرژی فوتونی که منجر به برانگیختگی الکترون و تولید حفره می شود، به میزان کافی بزرگتر از گاف انرژی بین دو نوار طرفیت و رسانش باشد، زوج الکترون-حفره آزادند. در این شرایط، پلاسمای الکترون-حفره تشکیل می‌شود. همچنین الکترون و حفره‌ی به وجود آمده از طریق برهم‌کنش کولنی می‌توانند شبه ذره‌ی مقیدی موسوم به اکسیتون تشکیل دهند. شبه ذره‌ی مزبور پس از گذشت مدت معینی (طول عمر اکسیتون) نابود می‌شود و در اثر بازترکیب تابشی الکترون و حفره یک فوتون گسیل می‌شود. با تحلیل ویژگی‌های فوتون گسیل شده می‌توان به ویژگی‌های اپتیکی سامانه پی برد. شبکه ی حجیم دارای ساختاری تناوبی است و به همین دلیل فوتون گسیل شده از سامانه خارج نمی‌شود و توسط الکترون دیگری جذب می‌شود که آن را برانگیخته می‌کند. مجدداً به دنبال باز ترکیب تابشی، این الکترون-حفره، فوتون دیگری حاصل می‌شود. این فرآیند به طور چرخه‌ای تکرار می‌شود تا زمانی که انرژی فوتون به طور کامل در شبکه توزیع و فوتون نابود شود. بر این اساس، در نیم‌رساناهای توده‌ای سه بعدی گسیل فوتون صورت نمی‌گیرد و بنابراین به این روش نمی‌توان ویژگی‌های اپتیکی آن را آشکار کرد.

در مقابل، سامانه‌های محصور شده مانند چاه کوانتومی[۱]، سیم کوانتومی [۲] و نقطه‌ی کوانتومی [۳] به دلیل محصورشدگی به ترتیب در یک، دو و سه بعد فضایی می‌توانند به عنوان گسیلنده‌ی نور عمل کنند. سیم کوانتومی اغلب در فرایندهای ترابرد الکترون به کار گرفته می‌شود و کمتر به عنوان چشمه‌ی گسیلنده‌ی نور در نظر گرفته می‌شود. در ادامه به معرفی نانوساختارهای چاه کوانتومی و نقطه‌ی کوانتومی، که می‌توانند به عنوان چشمه‌ی گسیلنده‌ی نور بکارگرفته شوند، و فرمولبندی کوانتومی برهم‌کنش نور با ساختارهای مزبور خواهیم پرداخت.

## ۱ - ۱ برهم‌کنش نور با سامانه‌های نیم‌رسانا

در نیم‌رسانا، معمولاً فاصله‌ی انرژی بین نوارهای ظرفیت و رسانش از مرتبه‌ی بزرگی انرژی یک فوتون است که بسامدی معادل بسامد مادون قرمز یا مرئی دارد. یک فوتون با انرژی بیشتر از گاف انرژی بین دو نوار ظرفیت و رسانش ($\hbar\omega > E_g$) می‌تواند الکترونی را از نوار ظرفیت به نوار رسانش برانگیخته کند. در مقابل اگر انرژی فوتون برانگیزنده کمتر از گاف انرژی باشد، انتظار بر این است که ماده نسبت به عبور میدان تابشی شفاف باشد. اگر انرژی فوتون نسبت به انرژی گاف اندکی کمتر باشد با جذب فوتون، یک زوج الکترون-حفره در سامانه خلق می‌شود که توسط برهم‌کنش کولنی به یکدیگر مقید هستند. اختلاف انرژی فوتون و گاف انرژی توسط مقدار انرژی که زوج الکترون-حفره را به هم مقید می‌کند، جبران می‌شود و اکسیتون تشکیل می‌شود. اکسیتون، از نظر ساختاری شبیه به اتم هیدروژن است.

اکسیتون ها را از یک جنبه می‌توان به دو دسته‌ی فرنکل[۴] و وانیر[۵] تقسیم کرد. این دو نوع اکسیتون ویژگی‌های متفاوتی دارند، که از آن جمله می‌توان به اندازه‌ی شعاع بوهر و جایگزیدگی آنها اشاره کرد. شعاع بوهر اکسیتون‌های فرنکل از مرتبه‌ی بزرگی ثابت شبکه‌ی بلور است به طوری که درون یاخته‌ی بنیادی شبکه‌ی بلوری جایگزیده هستند. در مقابل، بزرگی شعاع بوهر اکسیتون وانیر از مرتبه‌ی چندین ثابت شبکه است. اکسیتون‌های وانیر سهم بیشتری در بررسی سامانه‌های نیم‌رسانا دارند. این انتخاب موجب بررسی ساده‌تر برهم‌کنش‌های اکسیتونی می‌شود. چون شعاع بوهر اکسیتون وانیر از مرتبه‌ی چند ثابت شبکه است، گسترش فضایی تابع موج چندین ثابت شبکه را دربرمی‌گیرد و در

---

[۱] quantum well

[۲] quantum wire

[۳] quantum dot

[۴] Frenckel

[۵] Wannier

این شرایط می‌توان تقریب جرم مؤثر [۶] را بکارگرفت. از آنجا که این برانگیختگی، یک برانگیختگی کوانتومی است لذا توسط معادله‌ی شرودینگر توصیف می‌شود

$$-\left(\frac{\nabla^2}{2m_r}+V(r)\right)\Psi_\nu(r)=E_\nu\Psi_\nu \qquad (\hbar=1). \qquad (۱-۱)$$

که در آن $m_r$، جرم کاهیده‌ی مجموعه‌ی الکترون-حفره است. این معادله، یک معادله‌ی شرودینگر دو ذره‌ای برای الکترون و حفره است که توسط برهم‌کنش کولنی $V(r)$ به یکدیگر مقید شده‌اند. تابع موج $\psi_\nu$ حالت اکسیتونی سامانه را مشخص می‌کند و $\nu$ مجموعه‌ای از اعداد کوانتومی است که حالت اکسیتونی را مشخص می‌کند. این معادله‌ی شرودینگر به معادله‌ی وانیر معروف است.

اکسیتون یک برانگیختگی بنیادی در سامانه‌ی نیم‌رساناست که در فرایندهای اپتیکی بوجود می‌آید. بنابراین شعاع بوهر این برانگیختگی مقیاس طولی برای پدیده‌های فیزیکی است. به عنوان مثال، در نقطه‌ی کوانتومی شعاع بوهر اکسیتون را با ابعاد ناحیه‌ی محصورسازی مقایسه می‌کنیم و با توجه به آن پاسخ معادله‌ی وانیر را بدست می‌آوریم. پاسخ‌های معادله‌ی وانیر حالت‌های اکسیتونی را در سامانه‌ی مورد بررسی بدست می‌دهد. در نیم‌رساناهایی که آنها را به ابعاد کوچکتری محصور کرده‌ایم پتانسیل محصورسازی نیز باید به پتانسیل کولنی اضافه شود.

حال به دنبال تعیین حالت‌های اکسیتونی هستیم. از آنجا که در حل معادله‌ی (۱ - ۱) شرایط مرزی دارای نقش مهمی هستند، بسته به نوع سامانه‌ی محصور شده، حالت‌های اکسیتونی ویژگی‌های متفاوتی خواهند داشت. معادله‌ی وانیر یک معادله‌ی دو ذره‌ای است، لذا مختصات مرکز جرم و مختصات نسبی را معرفی می‌کنیم:

$$H_R\psi_x(R)=E_x\psi_x(R), \qquad H_\rho\phi_n(\rho)=e_n\phi_n(\rho), \qquad (۲-۱)$$

که در آن

$$H_R=-\frac{\nabla_R^2}{2M}, \qquad H_\rho=-\frac{\nabla_\rho^2}{2\mu}-\frac{e^2}{|\rho|}. \qquad (۳-۱)$$

اولین معادله، حرکت ذره‌ای آزاد به جرم $M$ را توصیف می‌کند و معادله‌ی دوم، مربوط به حرکت ذره‌ای با جرم $\mu$ تحت

[۶] effective mass approximation

اثر پتانسیل کولنی است. حرکت نسبی را می‌توان به اکسیتون و حرکت مرکز جرم را به شبه ذره‌ای که از ترکیب خطی اکسیتون با نور فرودی حاصل می‌شود نسبت داد. جواب‌های معادله‌ی (۱-۱) مشابه طیف انرژی اتم هیدروژن است. در این توصیف، $R = \frac{m_e r_e + m_h r_h}{m_e + m_h}$ مختصات مرکز جرم، $\rho = r_e - r_h$ مختصات نسبی، $M = m_e + m_h$ جرم کل اکسیتون و $\mu = \frac{m_e m_h}{M}$ جرم کاهش یافته‌ی اکسیتون است. این معادله که ویژه مقادیر آن کوانتیده است حالت‌های اکسیتونی را مشخص می‌کند. پس می‌توان گفت که اکسیتون یک برانگیختگی همدوس در سامانه است که آزادانه در نمونه حرکت می‌کند (به دلیل حرکت مرکز جرم). برانگیختگی همدوس از ویژگی‌های جمعی در سامانه است با این مفهوم که دارای ارتباط فازی خاصی هستند. یک اکسیتون که از یک زوج الکترون-حفره به وجود می‌آید، یک رابطه‌ی فازی خاصی دارد که به دلیل گستردگی تابع موج آن یک اثر جمعی است. در مورد سامانه‌ها ی با ابعاد کمتر نیز به همین ترتیب حالت‌های اکسیتونی مشخص می‌شوند. در مورد سامانه‌های چاه کوانتومی و سیم کوانتومی، $\phi_n(\rho)$ باید با توابع موج مناسب دو بعدی و یک بعدی جایگزین شوند[۱۴]. در مورد نقطه‌های کوانتومی شرایط کمی متفاوت است. در این سامانه‌ها، حرکت حامل‌ها در هر سه بعد فضایی محدود می‌شود. بنابراین هامیلتونی توصیف‌کننده‌ی اکسیتون موجود در سامانه‌های نقطه‌ی کوانتومی به صورت زیر خواهد بود:

$$H = \sum_{i=e,h} [\frac{\nabla^2_{r_i}}{2m_i} + U_i(r_i)] - \frac{e^2}{|r_e - r_h|} \qquad (۱-۴)$$

در این هامیلتونی، عبارت اول حرکت حامل‌ها را در حضور پتانسیل $U_i$ توصیف می‌کند که همان پتانسیل ناشی از محصورسازی است. در صورتی که این پتانسیل به اندازه‌ی کافی قوی باشد، حرکت حامل‌ها در هر سه بعد فضایی محصور خواهد شد. اگر $L$ طول مشخصه‌ی محصورسازی باشد، آنگاه از مقایسه‌ی این طول مشخصه با شعاع بوهر اکسیتون، $a_B$، در ماده‌ی توده‌ای[۷]، دو حالت محصورسازی قابل تشخیص است:

۱. حالت محصورسازی ضعیف، حالتی است که در آن $L \gg a_B$ (به عنوان مثال $a_B$ برای GaAs در حدود $10nm$ است). در این وضعیت، دینامیک زوج الکترون-حفره توسط اثر غالب کولنی تعیین می‌شود و محصورسازی به عنوان یک عامل اختلال در نظر گرفته می‌شود. غالب شدن اثر کولنی به این معنی است که اکسیتون تشکیل می‌شود و سپس حرکت اکسیتون به عنوان یک شبه‌ذره تحت اثر عوامل محصورسازی قرار خواهد گرفت.

۲. حالت محصور سازی قوی، حالتی است که در آن $L \ll a_B$. در این شرایط اثر محصورسازی بر اثر کولنی

[۷] bulk

غالب است و بخش کولنی عامل اختلال محسوب می‌شود. در این حالت، اکسیتون زوج الکترون-حفره مقید نیست بلکه در اثر محصورسازی، الکترون برانگیخته به ترازی که از محصورسازی حاصل می‌شود برانگیخته می‌شود و اثر برهم‌کنش کولنی قابل صرف‌نظر است.

اکسیتون‌ها در سامانه‌های صفربعدی از سایر سامانه‌های نیم‌رسانا متفاوت هستند اما بنابر آنچه مرسوم است برانگیختگی اپتیکی را در سامانه‌های نیم‌رسانا اکسیتون می‌نامیم.

در نیم‌رساناها امکان به‌وجودآمدن شبه‌ذرات دیگری که از برانگیختگی‌های الکترون-حفره تشکیل می‌شود وجود دارد. اگر چگالی برانگیختگی‌های بوجودآمده در سامانه زیاد باشد، امکان بوجود آمدن شبه‌ذره‌ای با برانگیختگی‌های دو اکسیتونی[۸] وجود دارد که متشکل از دو زوج الکترون-حفره است. این برانگیختگی‌ها جهت‌گیری اسپینی متفاوتی نسبت به برانگیختگی‌های تک‌اکسیتونی دارند[۹]. انرژی قید این شبه‌ذرات از مرتبه‌ی meV است که حاصل برهم‌کنش کولنی اکسیتون -اکسیتون است. این برهم‌کنش در واقع عامل بروز رفتار غیرخطی در سامانه است. حامل‌های بار در دو اکسیتونی‌ها مشابه مولکول $H_2$ است که در آن، دو حفره‌ی سنگین‌تر در مکان‌های ثابتی قرار دارند و الکترون‌های سبک‌تر ناجایگزیده هستند.

به منظور بررسی ویژگی‌های اپتیکی این سامانه‌ها باید برهم‌کنش آنها را با نور ورودی به سامانه مورد بررسی قرار داد . برای این کار ابتدا هامیلتونی سامانه‌ی برهم‌کنشی متشکل از نیم‌رسانا و تابش الکترومغناطیسی را معرفی می‌کنیم.

## ۱-۲ هامیلتونی سامانه‌ی برهم‌کنشی

اتم ترکیبی از هسته و الکترون است. هسته‌ها یا یون‌های مثبت در جایگاه‌های شبکه‌ی بلوری جسم جامد جایگزیده شده‌اند و الکترون‌ها حول آنها درگردشند. برای بررسی ویژگی‌های اپتیکی نیم‌رساناها برهم‌کنش اتم‌های تشکیل دهنده‌ی آنها با میدان الکترومغناطیسی را در چارچوب کوانتش دوم توصیف می‌کنیم. برهم‌کنش نور با ماده معمولاً با فرض ناوردایی پیمانه‌ای موضعی معادله‌ی شرودینگر بیان می‌شود[۱۰]. هامیلتونی سامانه‌ی برهم‌کنش در چارچوب الگوی

[۸] biexciton

جفت‌شدگی مینیمال[۹] به صورت زیر است[۱۱].

$$H=\sum_i\left\{\frac{1}{2m_i}[\vec{P}_i-q_i\vec{A}_i]^2\right\}+\frac{\epsilon_0}{2}\int d^3x(\vec{E}^2+c^2\vec{B}^2), \qquad (۵-۱)$$

در این رابطه، هامیلتونی $H$ توصیف کننده‌ی برهم‌کنش الکترون‌ها در یک میدان مغناطیسی $\vec{B}$ و الکتریکی $\vec{E}$ است. $\vec{P}_i$ تکانه‌ی جفت‌شدگی، $\vec{A}_i$، پتانسیل برداری و $\epsilon_0$ ثابت گذردهی الکتریکی خلأ است. در این هامیلتونی، جمع‌بندی روی شاخص $i$ همه‌ی یون‌ها و الکترون‌ها را شامل می‌شود. میدان‌های $\vec{B}$ و $\vec{E}$ بر حسب پتانسیل‌های نرده‌ای $\phi$ و برداری $\vec{A}$ به شکل زیر بیان می‌شوند

$$\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}, \qquad \vec{E}=-\vec{\nabla}\phi-\frac{\partial}{\partial t}\vec{A},$$

پیمانه‌ای که انتخاب می‌کنیم پیمانه‌ی کولن، $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0$، است. از پیمانه‌ی کولن استفاده می‌کنیم چون قسمت‌های عرضی و طولی میدان الکترومغناطیسی را از هم تفکیک می‌کند. علاوه بر این، با استفاده از تقریب بورن-اپنهایمر[۱۰] اثر یون‌ها را حذف می‌کنیم، اثر یون‌های هسته را در فصل چهار به عنوان اثر فونون‌ها بررسی می‌کنیم. در تقریب بورن-اپنهایمر فرض می‌شود یون‌ها به دلیل جرم زیادشان پایا هستند و روی حرکت الکترون‌ها اثر اساسی ندارند. به این ترتیب می‌توان توابع موج الکترونی و یونی را از یکدیگر تفکیک کرد، تا الکترون‌ها بارهای پس‌زمینه را به عنوان یک پتانسیل پایا احساس کنند. با این توضیحات هامیلتونی سامانه‌ی برهم‌کنشی را می‌توان به صورت زیر بیان کرد

$$H=\sum_i\frac{1}{2m_0}[\vec{P}_i+e\vec{A}(\vec{r}_i)]^2+\sum_{i\neq j}\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|\vec{r}_i-\vec{r}_j|}+\frac{\epsilon_0}{2}\int d^3x(\vec{E}_t^2+c^2\vec{B}^2). \qquad (۶-۱)$$

در این هامیلتونی اثر یون‌های مربوط به هسته حذف شده و جمع‌بندی تنها روی الکترون‌ها صورت می‌پذیرد. جمله‌ی اول انرژی جنبشی، جمله‌ی دوم برهم‌کنش الکتروستاتیکی بین الکترون‌هاست که در اثر یون‌های هسته کنارگذاشته شده است. جمله‌ی سوم این برهم‌کنش است که ویژگی‌های اپتیکی سامانه را می‌دهد. از آنجایی که ویژگی‌های فیزیکی تابش حاصل از این سامانه مورد نظر است، بررسی کوانتومی میدان‌های الکترومغناطیسی $\vec{E}$ و $\vec{B}$ لازم است.

---

[۹] minimal coupling

[۱۰] Born-Oppenheimer

الکترون‌ها فرمیون هستند و تابع اصل طرد پاؤلی، که بیان می‌کند هر حالت کوانتومی حداکثر توسط یک الکترون اشغال می‌شود. بنابراین تابع موج الکترون درون سامانه‌ی نیم‌رسانا باید پادمتقارن باشد. همچنین سامانه‌های حالت جامد از طریق کوانتش دوم هم قابل بررسی است، که روش مناسب‌تر و ساده‌تری است [۱۴]. این روش از طریق معرفی حالت‌های اشغال شده در فضای فوک $\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{H}_N$ تعریف می‌شود، به طوری که $\mathcal{H}_n$ فضای هیلبرت $n$ ذره‌ای است. حال عملگرهای $c_i^\dagger$ و $c_i$ را معرفی می‌کنیم، که به ترتیب یک ذره در حالت $|i\rangle$ را خلق و نابود می‌کنند. این حالت که در واقع پاسخ معادله‌ی شرودینگر سامانه است، تمامی اطلاعات مورد نیاز ذره‌ی موجود در سامانه را دربرمی‌گیرد. در مورد الکترون‌ها با توجه به اصل طرد پاؤلی، تعداد ذرات موجود در یک حالت حداکثر یک است. در این صورت، دو عملگر خلق و نابودی $c_i^\dagger$ و $c_i$ در روابط پادجابجایی زیر صدق می‌کنند

$$[c_i, c_j^\dagger]_+ = c_i c_j^\dagger + c_i, c_j^\dagger c_i = \delta_{ij}, \qquad [c_i, c_j]_+ = 0, \qquad [c_i^\dagger, c_j^\dagger]_+ = 0. \qquad (۷-۱)$$

عملگرهای موجود در هامیلتونی (۱-۶)، طبق طبقه‌بندی کوانتش دوم دو دسته هستند

۱. عملگرهایی که برهم‌کنش‌های تک‌ذره ای را نشان می‌دهند، همانند جمله‌ی اول هامیلتونی (۱-۶) که شکل کلی آن به صورت دو عملگری زیر است

$$c_i^\dagger c_j.$$

۲. عملگرهایی که برهم‌کنش بین دو ذره را نشان می‌دهند، همانند جمله‌ی دوم در هامیلتونی (۱-۶) که برهم‌کنش کولنی بین الکترون‌ها است.

$$c_i^\dagger c_j^\dagger c_k c_l.$$

## ۱-۲-۱ کوانتش میدان الکترومغناطیسی آزاد

سامانه‌ی مورد بررسی را ساختار شبکه‌ی بلوری در نظر می‌گیریم. این ساختار ویژگی تناوبی دارد، یعنی تحت تأثیر پتانسیل دوره‌ای قرار می‌گیرند، به طوری که $V_{lat}(\vec{R} + \vec{r}) = V_{lat}(\vec{r})$ که در آن $\vec{R}$ بردار شبکه و $\vec{r}$ بردار مکان حامل بار است. از فیزیک حالت جامد می‌دانیم که ویژه حالت‌های الکترونی در این سامانه‌ی دوره‌ای توابع بلاخ [۱۱]

[۱۱] Bloch functions

هستند[۱۲]:

$$\phi(r) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{k}\vec{r}} u(r) \qquad (۸-۱)$$

در این رابطه $\vec{k}$ تکانه‌ی گسسته به صورت $\vec{k} = \frac{1}{L}\vec{b}$ است، که در آن $\vec{L}$ طول کوانتش و $\vec{b}$ بردار پایه‌ی شبکه ی بلور است، $V$ حجم کوانتش و $u(r)$ همان تابع بلاخ است. این توابع را می‌توان با اعمال پتانسیل شبکه در معادله‌ی شرودینگر بدست آورد. فضایی که در آن بررسی‌ها انجام می‌شود ناحیه‌ی بریلوئن [۱۲] است. اگر گسترش فضایی نمونه از مرتبه‌ی چند ده ثابت شبکه در هر بعد باشد، آنگاه $k \sim a^{-1} \ll k_{max} = \frac{\pi}{a_0}$ ($a_0$ ثابت شبکه، $a$ گسترش فضایی نمونه و $k$ ثابت شبکه‌ی وارون است) برقرار خواهد بود. به این ترتیب می‌توان تنها یک قسمت از فضای بریلوئن را در نظر گرفت. برای نیم‌رساناهای با گاف مستقیم و همسانگرد هامیلتونی تنها شامل یک بخش جنبشی است و پاسخ آن توابع موج تخت هستند.

حال اگر سامانه‌ی مورد بررسی در یک بعد یا بیشتر محصور شده باشد، برای بدست‌آوردن تابع موج بلاخ باید در هامیلتونی سامانه علاوه بر پتانسیل شبکه پتانسیل محصورسازی را هم وارد کرد. در وارد کردن محصورسازی از تقریب تابع پوش استفاده می‌کنیم (جزئیات بیشتر را می‌توان در مرجع [۱۳] یافت). در تقریب تابع پوش، معادله‌ی شرودینگر برای تابع بلاخ الکترون تحت پتانسیل محصورسازی $V_{conf}$ به صورت زیر است

$$H_{el}\phi(r) = \left(\frac{P^2}{2m_i} + V_{conf}(r)\right)\phi(r) = E(r)\phi(r), \qquad (۹-۱)$$

که با فرض اینکه $\phi(r) = \xi(r)u_0(r)$، معادله‌ی (۱-۹) معادله‌ای برای تابع پوش می‌دهد. تمامی بررسی‌ها را در قسمتی از ناحیه‌ی اول بریلوئن انجام می‌دهیم که $k_0 = 0$ (موسوم به نقطه‌ی $\Gamma$). بسته به درجه‌ی محصورشدگی سامانه (صفر، یک و دو) تابع پوش محاسبه می‌شود.

هامیلتونی آزاد میدان تابشی توسط جمله‌ی آخر در معادله‌ی (۱-۶) بیان می‌شود. بسط کوانتش دوم پتانسیل

[۱۲] Brillouin zone