دانشگاه زنجان

دانشکده علوم - گروه ریاضی

پایان نامه ی کارشناسی ارشد

عنوان

گراف غیردوری یک گروه

نگارش:

صدیقه ابراهیمی قادی

استاد راهنما:

دکتر عباس جعفرزاده

استاد مشاور:

دکتر سید مجید جعفریان امیری

بهمن ماه ۱۳۹۰

بسم الله الرحمن الرحیم

زندگی صحنه‌ی یکتای هنرمندی ماست

هر کسی نغمه خود خواند و از صحنه رود

صحنه پیوسته به جاست

خرم آن نغمه که مردم بسپارند به یاد

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم

حال که در واپسین روزهای دوران دانش‌پژوهی‌ام قرار گرفته‌ام، خود را همیشه شاگرد مکتب علم و دانش دانسته و می‌دانم، گرچه دانش‌پژوهی و علم‌آموزی هیچ‌گاه برای هیچ‌کس پایان‌پذیر نخواهد بود و چرخ ارابه‌ی شکوفایی و پیشرفت در جاده‌ای یکطرفه به جلو رانده خواهد شد.

سپاس ایزد منان را که به من شایستگی عطا فرمود تا در راه علم گام بردارم و تمام توان خود را در راه خدمت به مردم خویش به کار بندم.

از استاد گرانقدر جناب آقای دکتر عباس جعفرزاده استاد راهنمای بزرگوارم که با سعه صدر و با فکری روشن و قلبی آگاه مرا در انتخاب راهی درست راهنما بودند و با دقت نظر در جهت هرچه پربار نمودن این پایان‌نامه همت متعالی به خرج داده و راهنمایی نموده‌اند و من امروز خوشه چین خرمن اندیشه و دانش و بینش ایشان هستم تقدیر و تشکر می‌نمایم.

از استاد گرامی جناب آقای دکتر سید مجید جعفریان امیری استاد مشاور ارجمندم که در طول انجام این پایان‌نامه همواره از رهنمودهای سازنده ایشان بهره مند گردیده‌ام کمال امتنان را دارم.

همچنین از پدر و مادر مهربان و دلسوزم که با وجودشان در تمام مسیر زندگی و موفقیت خویش گام برداشته‌ام و بر دستان پرمهرشان همواره بوسه خواهم زد سپاسگزاری می‌کنم.

از برادر عزیزم که الگو و پشتیبان من در تمام مراحل زندگی‌ام بوده و خواهد بود کمال تشکر را دارم.

صدیقه ابراهیمی قادی

زمستان ۱۳۹۰

چکیده

در این پایان‌نامه فرض می‌کنیم G یک گروه غیرموضعا دوری باشد و

$$Cyc(G)=\{y \in G| \text{ به ازای هر } x \in G\text{، } \langle x,y\rangle \text{ دوری باشد}\}$$

گراف غیردوری G که با نماد Γ_G نشان داده می‌شود، گرافی است با مجموعه رئوس $G\setminus Cyc(G)$ و دو رأس x و y با هم مجاورند اگر $\langle x,y\rangle$ دوری نباشد. ما ویژگی‌های مختلفی از این گراف را بررسی خواهیم کرد. از جمله ثابت می‌کنیم عدد خوشه Γ_G متناهی است اگر و فقط اگر Γ_G خوشه نامتناهی نداشته باشد. همچنین گراف‌هایی را که عدد خوشه‌شان کمتر از ۴ است را بررسی خواهیم کرد.

واژه‌های کلیدی: *گروه غیرموضعا دوری، گراف غیردوری، دوری‌ساز، عدد خوشه.*

فهرست مطالب

مقدمه

نظریه گراف‌های جبری در سال‌های اخیر گسترش فراوانی یافته است. در این نظریه، یک گراف به ساختاری جبری تخصیص داده می‌شود و سپس خواص آن گراف بررسی شده و ویژگی‌هایی از آن ساختار جبری به وسیله ویژگی‌های گراف متناظرش، مشخص می‌شود. از آن جمله می‌توان به گراف اول یک گروه [۱۵, ۲۶]، گراف جابه‌جایی یک گروه [۱۲, ۱۳] ، گراف ناجابه‌جایی یک گروه [۱, ۱۶] و گراف مقسوم علیه صفر یک حلقه [۶, ۷] اشاره کرد.

گراف غیردوری یک گروه غیرموضعا دوری مثل G که با نماد Γ_G نشان داده می‌شود، برای اولین بار توسط دکتر عبدالهی و دکترمحمدی حسن آبادی معرفی شده است [۴, ۵]. به این ترتیب که مجموعه رئوس آن برابر با $G \setminus Cyc(G)$ است، که $Cyc(G)$، دوری‌ساز G نام دارد و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Cyc(G)=\{y \in G | \text{به ازای هر } x \in G\text{، } \langle x,y \rangle \text{ دوری باشد}\}$$

در این گراف دو رأس باهم مجاورند اگر زیرگروه تولید شده توسط آن‌ها دوری نباشد.

گراف ناجابه‌جایی یک گروه غیرآبلی که آن را با ∇_G نشان می‌دهیم، گرافی با مجموعه رئوس $G \setminus Z(G)$ می‌باشد و دو رأس x و y مجاورند اگر $xy \neq yx$.

پل اردوش[۱] ، برای اولین بار در سال ۱۹۷۵ سوأل زیر را مطرح نمود:

فرض کنید G یک گروه باشد به طوری‌که گراف ناجابه‌جایی ∇_G خوشه نامتناهی نداشته باشد. آیا عدد خوشه ∇_G متناهی است؟

نیومن [۲] پاسخ مثبتی به این سؤال به صورت زیر می‌دهد:

---

[۱] Paul Erdos

[۲] Neumann

گراف ناجابه‌جایی یک گروه G خوشه نامتناهی ندارد اگر و فقط اگر $G/Z(G)$ متناهی باشد. به‌خصوص، عدد خوشه ∇_G متناهی است.

سؤال مشابهی، می‌تواند در مورد گراف غیردوری Γ_G پرسیده شود. در این پایان‌نامه، به این سؤال به صورت زیر پاسخ داده می‌شود:

گراف غیردوری Γ_G خوشه نامتناهی ندارد اگر و فقط اگر $G/Cyc(G)$ متناهی باشد. به‌خصوص، عدد خوشه Γ_G متناهی است. همچنین در این پایان‌نامه به بررسی قطر و عدد غلبه Γ_G و همچنین ویژگی‌های گراف متمم Γ_G، که گراف دوری G نامیده می‌شود، می‌پردازیم.

این پایان‌نامه شامل ۴ فصل می‌باشد که در آن مطالب زیر مورد بررسی قرار می‌گیرد.

در فصل اول به بیان تعاریف و قضایای مقدماتی که در این پایان‌نامه مورد استفاده قرار می‌گیرند خواهیم پرداخت. در فصل دوم این پایان‌نامه که شامل ۲ بخش می‌باشد، بعضی مشخصات عمومی که در مورد گراف غیردوری صدق می‌کنند بررسی خواهیم کرد.

در فصل سوم که شامل ۲ بخش می‌باشد، گروه‌هایی را که گراف غیردوری‌شان هیچ خوشه نامتناهی ندارد، را بررسی خواهیم کرد. در حقیقت ما ثابت می‌کنیم که بعضی گروه‌ها عدد خوشه متناهی دارند و در مقابل گروه‌های G وجود دارند که گراف غیردوری‌شان هیچ مجموعه مستقل نامتناهی ندارد در حالی که عدد استقلال‌شان متناهی نیست و همچنین گروه‌هایی که گراف غیردوری‌شان عدد خوشه کمتراز ۴ دارد را بررسی خواهیم کرد و در نهایت در فصل چهارم که شامل ۲ بخش می‌باشد، گروه‌های غیردوری متناهی که گراف غیردوری‌شان منتظم هستند و همچنین گروه‌های آبلی متناهی غیردوری را که گراف غیردوری‌شان دو نوع درجه دارند را بررسی خواهیم کرد.

فصل ۱

تعاریف و پیش نیازها

در این فصل به بیان تعاریف و قضایای مقدماتی که در این پایان‌نامه مورد استفاده قرار می‌گیرند، خواهیم پرداخت.

۱.۱ مقدماتی از گروه‌ها

تعریف ۱.۱.۱. *گروه G را متناهی مولد*[1] *گوییم اگر زیرمجموعه‌ای متناهی مانند X داشته باشد به طوری‌که $G = \langle X \rangle$. گروه G را دوری*[2] *خوانیم هرگاه xی در G موجود باشد که $G = \langle \{x\} \rangle$. در این‌صورت می‌نویسیم $G = \langle x \rangle$.*

تعریف ۲.۱.۱. *فرض کنید G یک گروه و $H \leq G$. آن‌گاه تعداد هم‌مجموعه چپ یا راست H در G را اندیس*[3] *H در G می‌نامیم و با $[G : H]$ نشان می‌دهیم. که ممکن است متناهی یا نامتناهی باشد.*

[1] Finitely Generated
[2] Cyclic
[3] Index

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنید G و H دو گروه باشند. تابع $f : G \longrightarrow H$ را یک همریختی[۱] نامیم هرگاه به ازای هر x و y از G،

$$f(xy) = f(x)f(y).$$

همریختی $f : G \longrightarrow H$ را تکریختی[۲] گوییم در صورتی‌که f یک به یک باشد. آن را بروریختی[۳] نامیم هرگاه f بر G برابر H باشد. بالاخره همریختی $f : G \longrightarrow H$ را یکریختی[۴] گوییم در صورتی‌که f تناظر ۱-۱ باشد. دو گروه G و H را یکریخت گوییم در صورتی‌که یک یکریختی مانند $f : G \longrightarrow H$ وجود داشته باشد. و می‌نویسیم $G \cong H$.

تعریف ۴.۱.۱. مرکز[۵] گروه G عبارت است از

$$Z(G) = \{x \in G \mid xg = gx \quad \text{به ازای هر } g \text{ از } G\text{،}\}$$

که یک زیرگروه نرمال از G است.

تعریف ۵.۱.۱. اگر x عضوی از گروه G باشد، در این‌صورت مجموعه $\{g \in G \mid gx = xg\}$ یک زیرگروه G است. این زیرگروه را مرکزساز[۶] x در G نامیده و آن را با $C_G(x)$ (یا مختصرا $C(x)$) نشان می‌دهیم. واضح است که $Z(G) = \bigcap_{x\in G} C(x)$.

در تعریف فوق، می‌توان گفت که

$$C_G(x)=\{y \in G| \text{ آبلی باشد } \langle x, y\rangle\}.$$

Homomorphism[۱]

Monomorphism[۲]

Epimorphism[۳]

Isomorphism[۴]

Center[۵]

Centralizer[۶]

اگر به جای " آبلی" در این رابطه، کلمه "دوری" را جایگزین کنیم مفهومی که دوری‌ساز[۱] x نام دارد به‌دست می‌آید.

تعریف ۶.۱.۱. *فرض کنید G یک گروه غیربدیهی و M زیرگروهی واقعی از G باشد. M را یک زیرگروه بیشین[۲] G می‌نامیم اگر $M \neq G$ و $M \leq H \leq G$ نتیجه دهد که $M = H$ یا $H = G$.*

هر گروه متناهی غیربدیهی G دارای زیرگروه‌های بیشین می‌باشد و هر زیرگروه واقعی G جزء حداقل یک زیرگروه بیشین G است.

تعریف ۷.۱.۱. *فرض کنید G یک گروه، و p یک عدد اول باشد. گروه G را یک p -گروه می‌نامیم در صورتی‌که مرتبه هر عضو G توانی از p باشد. زیرگروه H از G را یک p -گروه G گوییم در صورتی‌که H یک p -گروه باشد.*

نتیجه ۸.۱.۱. *اگر G یک p -گروه متناهی باشد، آن‌گاه مرتبه G به صورت p^α است که در آن α، یک عدد صحیح نامنفی است.*

تعریف ۹.۱.۱. *فرض‌کنید G یک گروه متناهی از مرتبه n باشد، و $n=p^\alpha n'$ که در آن α، یک عدد صحیح نامنفی است و p عدد اولی است که $p \nmid n'$. در آن‌صورت هر زیرگروه G از مرتبه p^α را یک p -زیرگروه سیلوی[۳] G می‌نامند.*

---

[۱] Cyclicizer

[۲] Maximal

[۳] Sylow

تعریف ۱.۱.۱۰. p -گروه آبلی متناهی G را آبلی مقدماتی [1] می‌گوییم در صورتی‌که مرتبه هر عضو غیربدیهی G عدد اول p باشد.

تعریف ۱.۱.۱۱. فرض کنید G یک گروه باشد، یک سری زیرنرمال [2] G، زنجیری است متناهی از زیرگروه‌های G مانند

$$1 = G_0 \leq G_1 \leq \ldots \leq G_r = G$$

به طوری‌که به ازای هر i که $1 \leq i \leq r$، $G_{i-1} \lhd G_i$. در این‌صورت، گاهی اوقات سری زیرنرمال فوق را به صورت زیر هم نشان می‌دهند:

$$1 = G_0 \lhd G_1 \lhd \ldots \lhd G_r = G.$$

تعریف ۱.۱.۱۲. فرض کنید G یک گروه باشد، یک سری نرمال [3] G، زنجیری است متناهی از زیرگروه‌های نرمال G مانند

$$1 = G_0 \leq G_1 \leq \ldots \leq G_r = G.$$

نکته. واضح است که هر سری نرمال یک سری زیرنرمال است

تعریف ۱.۱.۱۳. فرض کنید G یک گروه باشد. سری نرمال

$$1=G_0 \leq G_1 \leq \ldots \leq G_r=G$$

را یک سری مرکزی [4] G گوییم در صورتی‌که به ازای هر i که $1 \leq i \leq r$، $\frac{G_i}{G_{i-1}} \leq Z(\frac{G}{G_{i-1}})$.

[1] Elementary Abelian

[2] Subnormal Series

[3] Normal Series

[4] Central Series

تعریف ۱۴.۱.۱. گروه G را پوچتوان [۱] نامند در صورتی‌که یک سری مرکزی داشته باشد. طول کوتاه‌ترین سری مرکزی G را رده پوچتوانی [۲] G گویند و آن را با $c(G)$ نشان می‌دهند.

مثال ۱. واضح است که هر گروه آبلی یک گروه پوچتوان از رده پوچتوانی ۱ است. دسته‌ای دیگر از گروه‌های پوچتوان، گروه‌هایی مانند Gاند که در شرط $G' \leq Z(G)$ صدق می‌کنند، در مورد این گروه‌ها، سری $1 \leq Z(G) \leq G$ یک سری مرکزی است و در نتیجه $c(G) \leq 2$.

نکته. اگر G یک گروه پوچتوان غیربدیهی باشد، آن‌گاه $Z(G) \neq 1$.

مثال ۲. گروه S_3 یک گروه پوچتوان نیست، زیرا $Z(S_3)$ بدیهی است.

نکته. هر p -گروه متناهی پوچتوان است.

برهان. به مثال ت. ۱.۱۰ در [۲۸] مراجع شود. □

قضیه ۱۵.۱.۱. فرض کنید G یک گروه غیربدیهی متناهی باشد. در این‌صورت گزاره‌های زیر دوبه‌دو معادل‌اند:

۱) G پوچتوان است.

۲) هر زیرگروه بیشین G در G نرمال است.

---

[۱] Nilpotent

[۲] Nilpotency Class

۳) هر p - زیرگروه سیلوی G در G نرمال است.

۴) هر دو عضو G که مرتبه آن‌ها نسبت به‌هم اول باشند، جابه‌جا می‌شوند.

۵) G حاصلضرب مستقیم زیرگروه‌های سیلوی خود است.

برهان. به ۸.۱.۱۰ در [۲۸] مراجع شود. $\square$

قضیه ۱۶.۱.۱. *فرض کنید G یک گروه پوچتوان متناهی مولد باشد. در این‌صورت اگر مرتبه هر مولد G متناهی باشد، آن‌گاه G متناهی است.*

برهان. به ۵.۴.۱۰ در [۲۸] مراجع شود. $\square$

تعریف ۱۷.۱.۱. *فرض کنید G یک گروه باشد.*

۱) گروه G را تابدار[۱] گویند، هرگاه مرتبه هر عضو آن متناهی باشد.

۲) گروه G را بی‌تاب[۲] گویند، هرگاه مرتبه هر عضو غیربدیهی آن نامتناهی باشد.

مثال ۳. *گروه $\mathbb{Z}$ یک گروه بی‌تاب و $\mathbb{Z}_n$ یک گروه تابدار می‌باشد.*

مثال ۴. *گروه $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_n$ نه تابدار و نه بی‌تاب می‌باشد.*

تعریف ۱۸.۱.۱. *اگر π یک مجموعه ناتهی از اعداد اول باشد، یک π - عدد [۳] یک عدد صحیح مثبت است*

Torsion[۱]

Torsion-free [۲]

$\pi-$ Number[۳]

که مقسوم علیه‌های اول آن متعلق به π باشند. یک عنصر از یک گروه، π -عنصر[۱] نامیده می‌شود اگر مرتبه‌اش یک π -عدد باشد و یک گروه، π -گروه نامیده می‌شود اگر هر عنصر آن یک π -عنصر باشد. حالت خیلی مهم زمانی است که $\pi = \{p\}$. هر عنصر از یک گروه متناهی یک p -عنصر است اگر و فقط اگر مرتبه گروه توانی از p باشد.

تعریف ۱.۱.۱۹. *فرض کنیم n عددی طبیعی و G گروهی آبلی باشد. مجموعه تمام عناصر x که در معادله $nx = 0$ صدق می‌کنند تشکیل یک زیرگروه از G می‌دهد که با $G[n]$ نشان داده می‌شود. همچنین مجموعه عناصر از مرتبه متناهی G یک زیرگروه T که زیرگروه تابی[۲] G نامیده می‌شود، تشکیل می‌دهد. واضح است که $\frac{G}{T}$ بی‌تاب می‌باشد. علاوه بر این تمام عناصر با مرتبه توانی از عدد اول ثابت p یک زیرگروه از G تشکیل می‌دهند که مؤلفه p - اولیه[۳] G نامیده شده و با G_p نشان داده می‌شود.*

تعریف ۱.۱.۲۰. *یک گروه G رابخش‌پذیر[۴] گوییم، اگر برای هر $g \in G$ و هر $n \in \mathbb{Z}$، عنصر $x \in G$ وجود داشته باشد به طوری‌که $g=x^n$، یا با نماد جمع‌ها $g = nx$.*

مثال ۵. *مؤلفه p -اولیه $\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$ را با نماد $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ نشان می‌دهیم که یک p -گروه آبلی بخش‌پذیر است. $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ گروه پروفر[۵] یا p -گروه شبه‌دوری[۶] نامیده می‌شود.*

---

[۱] $\pi-$Element

[۲] Torsion Subgroup

[۳] p-Primary Component

[۴] Divisible

[۵] Prufer

[۶] Quasicyclic

نکته. $\mathbb{Z}_{p^\infty}=\{\frac{a}{p^n}+\mathbb{Z}\in\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}\mid n\in\mathbb{N},\quad ۰\leqslant a<p^n-۱\}$

قضیه ۲۱.۱.۱. *اگر G یک گروه آبلی باشد که بی‌تاب نیست، آن‌گاه G شامل یک جمعوند مستقیم غیربدیهی از گروه‌های دوری یا شبه‌دوری می‌باشد.*

برهان. به ۴.۳.۱۱ در [۲۲] مراجع شود. □

تعریف ۲۲.۱.۱. *گروه کواترنیون تعمیم یافته* [۱] *یک گروه غیرآبلی از مرتبه $۴n$ با مولدهای x و y است که $x^{۲m}=۱$ و $x^۲=y^۲$ و $y^{-۱}xy=x^{-۱}$. یعنی*

$$Q_{۴n}=\left\langle x,y\ \mid\ x^{۲m}{=}۱,\ x^۲=y^۲,\ y^{-۱}xy{=}x^{-۱}\right\rangle.$$

قضیه ۲۳.۱.۱. *$p-$ گروه متناهی A دقیقا یک زیرگروه از مرتبه p دارد اگر و فقط اگر دوری یا کواترنیون تعمیم یافته باشد.*

برهان. به ۵.۳.۶ در [۲۲] مراجع شود. □

تعریف ۲۴.۱.۱. *یک گروه آبلی، تقلیل یافته* [۲] *نام دارد اگر هیچ زیرگروه بخش‌پذیر غیربدیهی نداشته باشد.*

---

[۱] Generalized Quaternion Group

[۲] Reduced

قضیه ۲۵.۱.۱. *یک گروه آبلی G بخش‌پذیر است اگر و فقط اگر یکریخت با مجموع مستقیمی از کپی‌های Q و گروه‌های شبه‌دوری باشد.*

برهان. به ۴.۱.۵ در [۲۲] مراجع شود. □

تعریف ۲۶.۱.۱. *نمای[۱] یک گروه، کوچکترین مضرب مشترک مرتبه تمام عناصر آن گروه (در صورت وجود) می‌باشد.*

تعریف ۲۷.۱.۱. *یک پوشش [۲] برای گروه G عبارت است از گردایه‌ای از زیرگروه‌های سره G که اجتماع آنها برابر G باشد.*

تعریف ۲۸.۱.۱. *یک پوشش از گروه G کاهش یافته [۳] نامیده می‌شود اگر هیچ زیرگردایه سره‌ای از آن، پوششی برای G نباشد.*

تعریف ۲۹.۱.۱. *فرض کنید $\prod_{i\in I}^{*} Gi$ (یا $G_1 * G_2 * \ldots * G_n$) اگر I متناهی باشد) مجموعه تمام کلمات تحویل‌یافته بر X باشد. $\prod_{i\in I}^{*} Gi$ گروهی تشکیل می‌دهد، که حاصلضرب آزاد [۴] خانواده $\{G_i | i \in I\}$، نامیده می‌شود. در این گروه ۱ عنصر همانی است و حاصلضرب دو کلمه تحویل‌یافته $(\neq 1)$ اساسا با پهلوی هم گذاشتن تعریف می‌شود. چون حاصلضرب پهلوی هم گذاشته شده دو کلمه تحویل‌یافته ممکن است تحویل‌یافته نباشد، باید حذف و ادغام‌های لازم را در آن انجام داد.*

برای توضیحات بیشتر به بخش ۷ و ۹ فصل ۱ [۲۷] مراجع شود.

---

[۱] Exponent

[۲] Covering

[۳] Irredundant

[۴] Free Product

حال مفهوم دوری‌ساز را در یک گروه معرفی نموده و ویژگی‌های از آن را بررسی می‌نماییم.

تعریف ۳۰.۱.۱. *دوری‌ساز هر عنصر x در گروه G را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:*

$$Cyc_G(x)=\{y \in G| \text{ دوری باشد } \langle x,y\rangle\}.$$

همچنین برای یک زیرمجموعه ناتهی X از G، دوری‌ساز X در G را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Cyc_G(X)=\bigcap_{x\in X} Cyc_G(x).$$

$Cyc_G(G)$ را دوری‌ساز G نامیده و آن را با نماد

$$Cyc(G)=\{y \in G| \text{ دوری باشد } \langle x,y\rangle \text{ ،} x\in G \text{ به ازای هر } \}.$$

نشان می‌دهیم. این رابطه را با تعریف $Z(G)$ مقایسه کنید:

$$Z(G)=\{y \in G| \text{ آبلی باشد } \langle x,y\rangle \text{ ،} x\in G \text{ به ازای هر } \}.$$

تعریف ۳۱.۱.۱. *اگر $\mathscr{P}$ یک خاصیت جبری باشد، یک گروه G موضعا $\mathscr{P}$ -گروه [۱] نامیده می‌شود اگر هر زیرمجموعه متناهی از G مشمول در یک $\mathscr{P}$ -زیرگروه از G یعنی زیرگروهی با خاصیت $\mathscr{P}$ باشد. اگر خاصیت $\mathscr{P}$ به وسیله زیرگروه‌ها به ارث برده شود، به سادگی می‌توان نشان داد که G موضعا $\mathscr{P}$ -گروه است اگر هر زیرگروه متناهی مولد G، خاصیت $\mathscr{P}$ را داشته باشد.*

مثال ۶. *هر کدام از خواص دوری بودن، پوچتوان بودن و متناهی بودن، توسط زیرگروه‌ها به ارث برده می‌شود. بنابراین گروه G را یک گروه [۲] موضعا دوری (موضعا پوچتوان [۳] یا موضعا متناهی [۴]) نامیم، اگرهر زیرگروه متناهی مولد G، دوری (به ترتیب پوچتوان یا متناهی) باشد.*

[۱] Locally $\mathscr{P}$-Group

[۲] Locally Cyclic

[۳] Locally Nilpotent

[۴] Locally Finite

نکته. *واضح است که برای هر گروه G، $Cyc(G)$ یک زیرگروه موضعا دوری از G می‌باشد همان‌طور که در مقاله [۲۰] گفته شد به طور کلی برای یک عنصر x از G، $Cyc_G(x)$ یک زیرگروه از G نیست.*

مثال ۷. *برای مثال در گروه $H{=}\mathbb{Z}_۲{\oplus}\mathbb{Z}_۴$ داریم*

$$Cyc_H((۰,۲)){=}\{(۰,۰),(۰,۱),(۰,۲),(۰,۳),(۱,۱),(۱,۳)\}$$

یک زیرگروه از H نیست.

لم ۳۲.۱.۱. *اجتماع هر زنجیر از زیرگروه‌های موضعا دوری یک گروه G، زیرگروهی موضعا دوری از G است، در نتیجه هر عنصر G مشمول در حداقل یک زیرگروه موضعا دوری بیشین G است.*

برهان. فرض کنید $\{H_i\}_{i\in I}$ یک زنجیر از زیرگروه‌های موضعا دوری G باشد. قرار می‌دهیم $H=\cup_{i\in I}H_i$. به وضوح H زیرگروهی از G است زیرا اگر $a,b\in H$، آن‌گاه $i,j\in I$ هستند که $a\in H_i$ و $b\in H_j$. اما $H_i\leqslant H_j$ یا $H_j\leqslant H_i$. فرض کنیم $H_i\leqslant H_j$ پس $a,b\in H_j$ لذا $a^{-۱}b\in H_j\subseteq H$. حال H موضعا دوری است زیرا اگر $a_۱,\ldots,a_n\in H$، آن‌گاه مشابه استدلال فوق، $i\in I$ هست که $a_۱,\ldots,a_n\in H_i$ چون H_i موضعا دوری است پس $\langle a_۱,\ldots,a_n\rangle$ دوری است. لذا H نیز موضعا دوری است. حال فرض کنیم $x\in G$. مجموعه $\sum$ را مجموعه تمام زیرگروه‌های موضعا دوری G در نظر می‌گیریم که شامل x هستند. به وضوح $\sum\in\langle x\rangle$. با توجه به قسمت اول لم، و بنابر لم زرن [۱] $\sum$ دارای عضو بیشین چون K است. پس K یک زیرگروه موضعا دوری بیشین از G است که شامل x است. حال دوباره $\sum$ را مطابق قبل در نظر می‌گیریم و ثابت می‌کنیم $Cyc_G(x)=\cup_{M\in\sum}M$. قرار می‌دهیم $D=Cyc_G(x)$. ابتدا فرض کنیم $y\in D$. پس $\langle x,y\rangle$ دوری است. قرار می‌دهیم

$$\sum{}'=\{K\leq G\mid x,y\in K,\quad \text{موضعا دوری}\,\mathrm{K}\}.$$

---

[۱] Zorn's Lemma