دانشگاه پیام نور
دانشکده علوم پایه

پایان نامه

برای دریافت مدرک کارشناسی ارشد

رشته ریاضی محض - گرایش جبر

گروه ریاضی

عنوان پایان نامه :

مدول‌های نیمه منظم

نجمه مزارعی‌زاده

استاد راهنما :

دکتر احمد خاکساری

استاد مشاور :

دکتر منصوره معانی شیرازی

تیر 1390

بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه پیام نور
دانشکده علوم پایه
نام مرکز شیراز

پایان نامه
برای دریافت مدرک کارشناسی ارشد
رشته ریاضی محض - گرایش جبر
گروه ریاضی

عنوان پایان نامه :
مدول‌های نیمه منظم

نجمه مزارعی‌زاده

استاد راهنما :
دکتر احمد خاکساری

استاد مشاور :
دکتر منصوره معانی شیرازی

تیر 1390

تاریخ : ....
شماره : ....
پیوست : ....

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه پیام نور استان فارس

باسمه تعالی

صورتجلسه دفاع از پایان‌نامه دوره کارشناسی ارشد

جلسه دفاع از پایان نامه دوره کارشناسی ارشد **خانم نجمه مزارعی‌زاده** دانشجوی رشته **ریاضی محض** **گرایش جبر** به شماره دانشجویی **۸۸۰۰۰۳۷۴۵** با عنوان:

"مدول‌های نیمه منظم"

با حضور هیات داوران در روز سه‌شنبه مورخ **۱۳۹۰/۴/۲۱** ساعت **۹ صبح** در محل **ساختمان غدیر** دانشگاه پیام نور شیراز برگزار شد و هیأت داوران پس از بررسی، پایان‌نامه مذکور را شایسته نمره به عدد ....۱۸/۲۵....به حروف..هجده و بیست و پنج صدم با درجه..عالی.........تشخیص داد.

ردیف	نام و نام خانوادگی	هیات داوران	مرتبه دانشگاهی	دانشگاه	امضاء
۱	دکتر احمد خاکساری	راهنما	استادیار	پیام نور شیراز	
۲	دکتر منصوره معانی شیرازی	مشاور	استادیار	پیام نور استهبان	
۳	دکتر محبوبه حسین یزدی	داور	استادیار	پیام نور شیراز	
۴	دکتر شمس‌الملوک خوشدل	نماینده تحصیلات تکمیلی	استادیار	پیام نور شیراز	

رئیس اداره تحصیلات تکمیلی

شیراز- شهرک گلستان، بلوار دهخدا
قبل از نمایشگاه بین المللی
تلفن : ۳-۶۲۲۲۲۲۰-۰۷۱۱
دورنگار : ۶۲۲۲۲۲۹-۰۷۱۱
صندوق پستی :۱۳۶۸ - ۷۱۹۵۵
www.spnu.ac.ir
Email : admin@spnu.ac.ir

اینجانب نجمه مزارعی‌زاده دانشجوی ورودی سال ۱۳۸۸ مقطع کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض گرایش جبر گواهی می نمایم چنانچه در پایان نامه خود از فکر، ایده و نوشته دیگری بهره گرفته ام با نقل قول مستقیم یا غیر مستقیم منبع و مأخذ آن را نیز در جای مناسب ذکر کرده ام. بدیهی است مسئولیت تمامی مطالبی که نقل قول دیگران نباشد بر عهده خویش می دانم و جوابگوی آن خواهم بود.

دانشجو تأیید می نماید که مطالب مندرج در این پایان نامه نتیجه تحقیقات خودش می باشد و در صورت استفاده از نتایج دیگران مرجع آن را ذکر نموده است.

نام و نام خانوادگی دانشجو نجمه مزارعی‌زاده

تاریخ و امضا ۲۱/ ۹۰/۰۴

اینجانب نجمه مزارعی‌زاده دانشجوی ورودی سال ۱۳۸۸ مقطع کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض گرایش جبر گواهی می نمایم چنانچه بر اساس مطالب پایان نامه خود اقدام به انتشار مقاله، کتاب، و ... نمایم ضمن مطلع نمودن استاد راهنما، با نظر ایشان نسبت به نشر مقاله، کتاب، و ... و به صورت مشترک و با ذکر نام استاد راهنما مبادرت نمایم.

نام و نام خانوادگی دانشجو نجمه مزارعی‌زاده

تاریخ و امضا ۹۰/۴/۲۱

کلیه حقوق مادی مترتب از نتایج مطالعات، آزمایشات و نوآوری ناشی از تحقیق موضوع این پایان نامه متعلق به دانشگاه پیام نور می باشد.

تیر ۱۳۹۰

تقدیم به

همه شهیدان ایران زمین

شهیدان انقلاب اسلامی

شهیدان دفاع مقدس

و شهیدان انرژی هسته‌ای

تشکر و قدردانی

سپاس پروردگاری را که خالق زمین و آسمان است و مربّی خاکِ تن وآبِ جان. در بدن‌های بی‌جانمان جاری است و جانان جان است. می‌میراند و زنده می‌کند، زنده می‌کند و می‌میراند و تنها باقی اوست. رحمانی که از سر لطف و رحمت، بندگانی را آفرید تا به جهان خدمت کنند و خلیفه‌ی عالم شوند و حلقه‌ی بندگی در گوش، بندگان را به سوی او بخوانند. پس چگونه می‌توان شکر او را گفت که نتوانسته‌ایم شکر هادیان و مربیان و مبشّران و منذرانش را بگوییم. شکر انبیا و اولیا و اوصیایش را.

سپاس از او که آخرین منجی‌اش را در پرده غیب مستور کرده است، تا نگارنده این سطور بتواند بر خوان نعمت‌های او مهمان شود و روزی‌خوار لطف و عطایش.

سپاس بر دانای مطلقی که عقل را آفرید، آنگاه خود اولین معلم آن شد و مقام علم را ستود، هنگامی که به آدم علم آموخت.

درود بیکران بر رهروان علم و دانش و آنان که صفت علم آموزی پروردگار سزاوار آن‌هاست. درود بر همه‌ی پرورش‌دهندگان عقل و روح که پیوندی ناگسستنی با عالِم عالَم برقرار کرده‌اند.

بار الها! تو خود، ذخیره‌ی مغفرتی باش برای همه‌ی آنان که یاریم کرده‌اند، از مادری که حملم نمود و پدری که راهم برد و همسری که همراهم شد.

چکیده

فرض کنید M یک R- مدول باشد. M را منظم گوییم اگر هر زیر مدول باتولید متناهی آن، یک جمعوند مستقیم پروژکتیو باشد.

در این پایان نامه، ابتدا مدول نیمه منظم معرفی شده است، سپس برخی خاصیت مشخصه‌های اینگونه مدول‌ها بررسی و یک قضیه ساختاری اثبات گردیده است.

در ادامه حلقه‌های نیمه منظم بررسی شده است و چندین قضیه درباره حلقه‌های منظم و نیمه کامل تعمیم و توسعه یافته است.

در نهایت، درون ریختی حلقه‌ای نیمه منظم بررسی و نشان داده شده که «حلقه R کامل چپ است اگر و تنها اگر درون ریختی حلقه‌ای M برای هر R- مدول چپ پروژکتیو M، نیمه منظم باشد».

فهرست مطالب

مقدمه

زلمانوویتز[1] [13] در سال 1972 در مقاله‌ای تحت عنوان مدول‌های منظم، به معرفی و بررسی مدول‌های منظم پرداخت؛ نشان داد که مدول M منظم است اگر هر زیر مدول با تولید متناهی آن، جمعوند مستقیم یک مدول پروژکتیو باشد. معرفی مدول‌های منظم و ویژگی‌های آن، این انگیزه را در میان ریاضیدانان بر انگیخت که به معرفی مدول جدیدی به نام مدول نیمه منظم بپردازند.

اگر M یک R – مدول باشد دوگان M را با $M^* = Hom_R(M, R)$ نشان می دهیم.

عضو x از مدول M منظم نامیده می شود اگر برای برخی $\alpha \in M^*$ داشته باشیم $x\alpha x = x$. مدول M منظم است اگر هر عضوش منظم باشد.

نیکلسون[2] [8] *پس از مطالعه‌ی مدول‌های نیمه کامل و منظم، در سال 1976 مدول‌های نیمه منظم را بررسی کرده است. آنچه در این پایان نامه می‌خوانیم بیان و تشریح قضایا و نتایج متعددی در زمینه مدول‌ها و حلقه‌های نیمه منظم است.*

در همه‌ی فصل‌ها، فرض بر این است که همه حلقه‌ها خاصیت شرکت پذیری دارند و دارای عضو همانی نیز می‌باشند. همه مدول‌ها چپ یکانی هستند و درون ریختی مدول‌ها از راست روی اعضا عمل می‌کند.

---

۱. Zelmanowitz
۲. Nicholson

فصل اول

مفاهیم مقدماتی

1.1 مقدمه

در این فصل به بیان تعاریف و قضایایی خواهیم پرداخت که در فصل‌های بعد مورد استفاده قرار خواهند گرفت. از آنجا که در این پایان‌نامه مدول‌های منظم معرفی و بررسی می‌شوند، لذا ابتدا به تعریف مدول می‌پردازیم و در ادامه مدول‌های خاص را بیان می‌کنیم.

2.1 **تعریف** . فرض کنیم R یک حلقه و M یک مجموعه ناتهی باشد. M را همراه با عمل جمع $+ : M \times M \to M$ و ضرب اسکالر $. : R \times M \to M$ که با ضابطه $(r , m) \to r m$ تعریف می شود، یک R – مدول چپ می نامیم اگر:

1) $(M , +)$ یک گروه آبلی باشد.

2) به ازای هر دو عضو x و $y \in M$ هر عضو $r \in R$ داشته باشیم $r(x + y) = rx + ry$.

3) به ازای هر عضو $x \in M$ و هر دو عضو r و $s \in R$ داشته باشیم $(r + s)x = rx+sx$.

4) به ازای هر عضو $x \in M$ و هر دو عضو r و $s \in R$ داشته باشیم $(rs)x = r(sx)$.

5) به ازای هر عضو از M مثل x ، $1x=x$ باشد.

منظور از R یک حلقه دلخواه و ${}_R M$ یک $R-$مدول چپ یکانی است. مشابه آنچه برای $R-$مدول چپ گفته شده، برای $R-$مدول راست نیز برقرار است. باید توجه کنیم که برای $R-$مدول راست ضرب از طرف راست روی اعضاء اثر می‌کند.

3.1 **تعریف** . اگر M و N ، R - مدول چپ باشند آنگاه تابع $f : M \to N$ را یک $R-$همریختی (یا$R-$نگاشت) گوییم اگر برای هر $x, y \in M$ و $r \in R$ داشته باشیم :

1) $(x + y) f = x f + y f$

2) $(rx) f = r (xf)$.

4.1 **تعریف** . $R-$ همریختی که یک به یک باشد، تکریختی نامیده می شود و $R-$همریختی که پوشا باشد، برویختی گفته می شود.

اگر $R-$ همریختی، یک به یک و پوشا (دوسویی) باشد، آنگاه $R-$ همریختی را $R-$یکریختی می نامیم.

5.1 **تعریف** . اگر Mیک $R-$ مدول چپ باشد، آنگاه زیر مدول N از M را که با $N \subseteq M$ نشان می دهیم یک زیر گروه جمعی N از M است که تحت ضرب اسکالر بسته باشد. یعنی، به ازای $n \in N$ و $r \in R$ داریم $r n \in N$.

6.1 **تعریف** . R – مدول چپ M با تولید متناهی است اگر M به وسیله مجموعه ای متناهی تولید شود. یعنی، زیر مجموعه متناهی $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $x \in M$ ، $x = r_1x_1 + \cdots + r_nx_n$ برای بعضی عناصر $r_1, \dots, r_n$ از R . در این صورت، می‌نویسیم $M = < x_1, \cdots, x_n >$.

7.1 **تعریف** . اگر N زیر مدولی از R- مدول چپ M باشد، آنگاه مدول خارج قسمتی M/N ، یک گروه خارج قسمتی M/N است که برای هر $x \in M$ و $r \in R$ داریم : $r(x + N) = rx + N$.

8.1 **نکته** . نگاشت طبیعی $\pi : M \to M/N$ با ضابطه $x \mapsto x + N$ یک R – همریختی است.

9.1 **تعریف** . اگر $f : M \to N$ یک R – همریختی بین R – مدول های چپ باشد، آنگاه

$$\ker f = \{x \in M | f(x) = 0\}$$
$$\operatorname{Im} f = \{y \in N | \ y = f(x), x \in M \text{ برای بعضی } \}$$

10.1 **تعریف** . دنباله متناهی یا نامتناهی از R- همریختی‌ها و R- مدول‌های زیر

$$\dots \to M_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n-1} \to \dots$$

یک دنباله دقیق است اگر برای هر n داشته باشیم $\operatorname{Im} f_{n+1} = \ker f_n$.

11.1 **تعریف** . یک دنباله دقیق کوتاه شده دنباله‌ای دقیق به فرم $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ است.

12.1 **تعریف** . دنباله دقیق کوتاه $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ شکافته شدنی است اگر نگاشت

$j:C \to B$ وجود داشته باشد به قسمی که $gj=1_C$ باشد.

13.1 **تعریف** . اگر S و T دو زیر مدول از R – مدول چپ M باشند آنگاه M ،جمع مستقیم آنها است اگر هر $x \in M$ نگارش منحصر به فرد به فرم $x = s + t$ داشته باشد جایی که $s \in S$ و $t \in T$ است . جمع مستقیم را با $M = S \oplus T$ نشان می دهیم.

14.1 **تعریف** . زیر مدول S از R – مدول چپM را یک جمعوند مستقیم M گوییم اگر زیر مدول T از M با $M = S \oplus T$ وجود داشته باشد . زیر مدول T نیز مکمل S نامیده می شود.

15.1 **گزاره** . اگر دنباله دقیق $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ شکافته شدنی باشد، آنگاه $B\cong A\oplus C$.

16.1 **تعریف** . R- مدول چپ F آزاد نامیده می شود اگر F با جمع مستقیمی از کپی های R یکریخت باشد. یعنی $F = \oplus_{b \in B} Rb$ جایی که برای هر $b \in B$ ، $Rb = \langle b \rangle \cong R$. B را یک پایه F می نامیم.

17.1 **نکته** . با استفاده از تعریف جمع مستقیم، برای هر R- مدول چپ آزاد F ، هر $x \in F$ را می توان به صورت منحصر به فرد $x = \sum_{b\in B} r_b b$ نوشت که $r_b \in R$ و همه r_b ها به جز تعداد متناهی صفرند و این یعنی $F = \langle B \rangle$. بنابراین مدول آزاد مدولی است که پایه داشته باشد.

18.1 **تعریف** . یک بالا بر برای نگاشت $h : C \to B$ ، نگاشتی مانند $g : C \to A$ است به طوری که $fg = h$.نمودار زیر را ملاحظه کنید.

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "g"'] \arrow[d, "h"] \\ A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

19.1 **تعریف** . R – مدول چپ P پروژکتیو است، اگر برای هر نگاشت پوشای $f : A \to B$ و هر نگاشت دلخواه $h : P \to B$ ، بالا بر $g : P \to A$ موجود باشد به قسمی که نمودار زیر را جابه جایی کند.

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "g"'] \arrow[d, "h"] & \\ A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

20.1 **قضیه** . فرض کنید F یک R-مدول چپ آزاد و $f : A \to B$ نگاشتی پوشا باشد، آنگاه برای هر $h : F \to B$ ، R- همریختی g وجود دارد به طوری که نمودار زیر را جابه‌جایی می‌کند.

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[dl, dashed, "g"'] \arrow[d, "h"] & \\ A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

بنابر این قضیه ،هر $R -$ مدول چپ آزاد F پروژکتیو است.

21.1 **گزاره** . R-مدول چپ P پروژکتیو است، اگر و تنها اگر هر دنباله دقیق کوتاه $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} P \to 0$ شکافته شدنی باشد.

22.1 **نتیجه** . فرض کنید A زیر مدولی از R- مدول B باشد. اگر B/A پروژکتیو باشد، آنگاه A مکمل دارد؛یعنی زیر مدول C از B وجود دارد به طوری که $C \cong B/A$ و $B \cong A \oplus C$.

23.1 **قضیه** . R- مدول چپ P پروژکتیو است اگر و تنها اگر P جمعوند مستقیم یک $R -$ مدول چپ آزاد باشد.

24.1 **نتیجه** . 1) هر جمعوند مستقیم یک مدول پروژکتیو، پروژکتیو است.

2) هر جمع مستقیم مدول‌های پروژکتیو، پروژکتیو است.

25.1 **گزاره . (پایه پروژکتیو)** R - مدول چپ A پروژکتیو است اگر و تنها اگر عضوهای $a_i \in A$ و

R- نگاشت‌های $\varphi_i : A \rightarrow B$ (برای مجموعه اندیس I) وجود داشته باشد به قسمی که

1) برای همه جز تعداد متناهی $i \in I$ ، $x\varphi_i = ۰$.

2) $x = \sum_i (x\varphi_i)x_i$.

26.1 **تعریف** . R- مدول چپ M (روی برخی حلقه R) در شرایط زنجیره افزایشی (ACC)صدق

می کند اگر هر زنجیره افزایشی از زیر مدول‌های M متوقف شود؛ یعنی، اگر $S_1 \subseteq S_2 \subseteq S_3 \subseteq \ldots$

یک زنجیره افزایشی از زیر مدول ها باشد، آنگاه برای عدد صحیح n ،

$S_n = S_{n+1} = S_{n+2} = \ldots$.

27.1 **تعریف** . حلقه R را نوتری چپ گویند اگر در یکی از شرایط معادل زیر برقرار باشد.

1) حلقه R در شرط ACC روی ایده آل های چپ صدق کند.

2) هر خانواده ناتهی از ایده آل های چپ R دارای عضو ماکسیمال باشد.

3) هر ایده آل چپ R با تولید متناهی باشد.

28.1 **تعریف** . R – مدول چپ E را انژکتیو گوییم اگر برای هر نگاشت یک به یک $i : A \to B$ و هر نگاشت $f : A \to E$ ، بالا بر $g : B \to E$ وجود داشته باشد به قسمی که نمودار زیر را جا به جایی کند. (یعنی $gi = f$ باشد.)

$$\begin{tikzcd} & E & \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[u, "f"] \arrow[r, "i"'] & B \arrow[ul, dashed, "g"'] \end{tikzcd}$$

29.1 **تعریف** . فرض کنیم A یک R- مدول راست و B یک R – مدول چپ باشد. همچنین ، F یک گروه آبلی آزاد بر مجموعه $A \times B$ باشد. K نیز یک زیر گروه F تولید شده به وسیله تمام عناصر به شکل زیر (به ازای هر $r \in R$ ، $a , a' \in A; b,b' \in B$) باشد :

1) $(a + a' , b) - (a , b) - (a' , b)$

2) $(a , b + b') - (a , b) - (a , b')$

3) $(ar , b) - (a , rb)$

گروه خارج قسمتی F/K حاصلضرب تانسوری A و B نامیده می‌شود و با $A \otimes_R B$ نمایش داده می شود . هم مجموعه $(a , b) + K$ ، با $a \otimes b$ نشان داده می شود.

30.1 **تعریف** . فرض کنید R حلقه و A یک R – مدول راست باشد. اگر برای هر دنباله کامل $0 \to B' \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} B'' \to 0$ از مدول های چپ R ، دنباله

$$0 \longrightarrow A\otimes B' \xrightarrow{1_A \otimes f} A \otimes B \xrightarrow{1_A \otimes g} A\otimes B'' \longrightarrow 0$$

از گروه‌های آبلی کامل باشد،آنگاه A یک R - مدول راست هموار نامیده می‌شود.

مشابه این تعریف را برای R - مدول چپ هموار نیز داریم.

31.1 تعریف . R - مدول چپ M را ساده گوییم اگر $M \neq \{0\}$ و M هیچ زیر مدول ناصفر سره نداشته باشد. به عبارتی تنها زیر مدول‌های M ،زیر مدول‌های بدیهی صفر و خود M باشد.

32.1 تعریف . R - مدول چپ M را نیمه ساده گوییم اگر M جمع مستقیم مدول‌های ساده باشد.

33.1 تعریف . حلقه R نیمه ساده است اگر به عنوان R- مدول چپ نیمه ساده باشد.

34.1 تعریف . حلقه R منظم فون نیومن[1] است، اگر برای هر $r \in R$ ، عضوی مانند $r' \in R$ وجود داشته باشد به قسمی که $r r' r = r$ باشد.

35.1 تعریف . فرض کنید R یک حلقه باشد. اشتراک ایده‌آل‌های چپ ماکسیمال R را رادیکال جیکوبسن R می‌نامیم و با $J(R)$ نشان می دهیم.

36.1 تعریف . یک خودتوان حلقه R ، عضوی مانند e است که $e^2 = e$ می‌باشد.

1. Van Neumann regular

37.1 **نکته** . فرض کنید I یک ایده‌آل دو طرفه حلقه R باشد. خود توان g+I∈R/I را می‌توان به همنهشتی I بالا برد، اگر خودتوان e∈ R موجود باشد به قسمی که e+I=g+I باشد.

38.1 **تعریف** . اگر e_1 و e_2 خود توان های حلقه R باشند به طوری که $e_1\ e_2 = 0$ باشد آنگاه e_1 و e_2 خودتوان‌های قائم حلقه R نامیده می‌شوند.

39.1 **تعریف** . فرض کنید K زیر مدولی از M باشد.گوییم K در M کوچک است اگر برای هر زیر مدول S از M با K +S=M داشته باشیم S=M .

40.1 **تعریف** . یک پوشش پروژکتیو برای مدول M ، زوج مرتب (P,φ) می‌باشد، جایی که P مدولی پروژکتیو و $\varphi: P \to M$ نگاشت پوشایی است که $\ker\ \varphi$ زیر مدول کوچک P می‌باشد.

41.1 **تعریف**. حلقه R کامل چپ است اگر هر R مدول چپ دارای پوشش پروژکتیو باشد.

42.1 **تعریف** . حلقه R نیمه کامل است اگر هر R مدول چپ با تولید متناهی دارای یک پوشش پروژکتیو باشد.

43.1 **تعریف** . مدول M دارای ویژگی تبادل است، اگر برای هر مدول G و هر دو تجزیه

$$G = M' \oplus N = \sum_{i\in I} A_i$$