دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

دانشکده علوم — گروه ریاضی

پایان نامه جهت دریافت درجه کارشناسی ارشد

ریاضی محض — گرایش جبر (نظریه گروههای متناهی)

موضوع:

ماتریس‌هایی که درایه‌هایشان توسط یک رابطه بازگشتی مشخص می‌شوند

نگارش:

حدیثه تاج‌بخش

استاد راهنما:

دکتر علیرضا مقدم فر

استاد مشاور:

دکتر امیر رهنمای برقی

تهران —دی ماه ۱۳۸۹

تقدیم به:

روح پاک مادر مهربانم

که گرچه نیست اما زمزمهٔ محبتش همواره به یاد ماندنی است

و به پشتوانهٔ زندگیم:

پدر بزرگوار و فداکارم

و همین طور تقدیم به:

خواهر و برادر مهربانم

اظهار نامه دانشجو

موضوع پا یان نامه: ماتریس‌هایی که درایه‌هایشان توسط یک رابطه بازگشتی مشخص می‌شوند.

استاد راهنما: دکتر علیرضا مقدم‌فر.

نام دانشجو: حدیثه تاج‌بخش.

شماره دانشجویی: ۸۷۰۵۱۴۴.

اینجانب حدیثه تاج‌بخش دانشجوی کارشناسی ارشد ریاضی محض گرایش جبر دانشکده علوم دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی گواهی می‌نمایم که تحقیقات ارائه شده در این پایان‌نامه توسط شخص اینجانب انجام شده و صحت و اصالت مطالب نگارش شده مورد تأیید می‌باشد و در مورد استفاده از کار دیگر محققان به مرجع مورد استفاده اشاره شده است. همچنین گواهی می‌نمایم که مطالب مندرج در پایان‌نامه تاکنون برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی توسط اینجانب یا فرد دیگری در هیچ جا ارائه نشده است و در تدوین متن پایان‌نامه آئین‌نامه مصوب دانشگاه را به طور کامل رعایت کرده‌ام.

امضاء دانشجو:

تاریخ:

فرم حق طبع و نشر و مالکیت نتا یج

تشکر و قدردانی

کلامم را با نام او آغاز می‌کنم که هیچ کاری را بی نام او پایانی نیست. شکر نعمت‌های بسیارش را نمی‌توان به جای آورد که به قول آن شاعر نام‌آشنا

از دست و زبان که بر آید

کز عهدهٔ شکرش به در آید.

چون به عبادش مشغول می‌شوی، پس از اطاعت خویش سخن از اطاعت مادر و پدر می‌گوید که گوهرانی گرانبهایند و جبران زحمتشان بس مشکل!. باشد که به قدر توان سپاسگزارشان باشیم. به رسم ادب، قدردان استاد ارجمندم جناب آقای دکتر علیرضا مقدم‌فر می‌باشم که به حق شایستهٔ کلام آن امام بزرگوار است که:

هر که دانش آموزد و به کار بندد و آن را برای خدای تعالی تعلیم دهد، در ملکوت آسمان‌ها بزرگش خوانند و گویند برای خدا یاد گرفت، برای خدا عمل کرد، برای خدا تعلیم داد.

جای دارد از زحمات اساتید بزرگوار: جناب آقای دکتر امیر رهنمای برقی که زحمت مشاورهٔ بنده را به عهده داشته‌اند و جناب آقای دکتر علی ذاکری و جناب آقای دکتر بهروز خسروی که قبول زحمت فرمودند و داوری این پایان‌نامه را به عهده گرفتند سپاسگزاری کنم.

در انتها از خانوادهٔ عزیزم که همواره در امر تحصیل مشوق من بوده‌اند، تشکر می‌کنم.

چکیده

در این پایان‌نامه نخست به معرفی و مطالعهٔ ماتریس‌هایی خواهیم پرداخت که درایه‌های آنها در روابط خاصی صدق می‌کنند. سپس طی بیان و اثبات یک سری از قضایا طریقهٔ محاسبهٔ دترمینان آنها را ارائه خواهیم نمود. بخصوص مطالعهٔ ماتریس‌هایی را مد نظر قرار خواهیم داد که دنبالهٔ متشکل از کهادهای اصلی آنها دنباله‌های معروفی چون دنبالهٔ فیبوناچی، لوکاس، جیکوبسال و پِل خواهند بود.

همچنین از جمله ماتریس‌های جالبی که در این پایان نامه مورد بررسی قرار خواهند گرفت، می‌توان به ماتریس‌هایی اشاره کرد که موسومند به ماتریس‌های پیچش، در واقع این ماتریس‌ها از پیچش دو دنبالهٔ دلخواه متناظر با ستونهای اول و دوم خود حاصل می‌شوند.

در پایان نیز به بررسی دنباله‌ها و ماتریس‌هایی می‌پردازیم که با عمل های دوتایی خاصی تشکیل یک گروه می‌دهند، نظیر گروه ری‌اوردن و گروه اپل.

کلمات کلیدی : ماتریس توپلیتز، ماتریس پاسکال، دنباله فیبوناچی، دنباله لوکاس، دنباله جیکوبسال، دنباله پل، ماتریس پیچش، تبدیل کاتلان، گروه ری‌اوردن، گروه اپل.

فهرست مندرجات

۱ مقدمه ۴

۲ تعاریف و قضایای اولیه ۶

۳ ماتریس‌هایی که به وسیلهٔ روابط بازگشتی به دست می‌آیند ۱۴

۱.۳ $7_{u,v}$—ماتریس‌ها ۱۵

۲.۳ ماتریس‌هایی با رابطهٔ بازگشتی $b_{i,j} = vb_{i-۱,j-۱} + wb_{i,j-۱}$ ۲۵

۳.۳ ماتریس پاسکال تعمیم یافته ۳۵

۴.۳ ماتریس‌هایی با رابطهٔ بازگشتی $d_{i,j} = ud_{i-۱,j} + vd_{i-۱,j-۱} + wd_{i,j-۱}$ ۴۷

۴ ماتریس‌های پیچش ۵۷

۱.۴ ماتریس پیچش (نمونه ۱) ۵۹

۲.۴ ماتریس پیچش (نمونه ۲) ۶۸

۵ تبدیل کاتالان و تبدیلات وابسته ۷۲

۱.۵ تبدیلات و گروه ریوردن ۷۲

۲.۵ تبدیل کاتالان ۷۵

۳.۵ تبدیلات خانوادهٔ جیکوبسال ۸۲

۴.۵ تبدیل تعمیم یافتهٔ رأی‌گیری ۸۵

۶ تبدیلات ماتریس دنباله‌های صحیح ۹۴

۱.۶ گروه $(\mathbb{G}^{(m)}, \cdot)$ ۱۰۱

۲.۶ گروه $(\mathbb{G}^{(۲)}, \cdot)$ ۱۰۲

۷ یافته‌های جدید ۱۱۱

۱.۷ ماتریس‌هایی که دنبالهٔ کهادهای اصلی آنها، تشکیل دنباله‌های خاص می‌دهند ۱۱۱

۲.۷ دنبالهٔ لوکاس ودترمینان‌ها ۱۲۸

فصل ۱

مقدمه

ماتریس پایین مثلثی تکتوان پاسکال $P=(p_{i,j})_{i,j\geq 0}$ را در نظر می‌گیریم:

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & \cdots \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

همان‌طور که می‌بینیم درایه‌های این ماتریس در رابطهٔ بازگشتی

$$p_{i,j}=p_{i-1,j}+p_{i-1,j-1}$$

صدق می‌کنند. می‌توانیم این رابطه را تعمیم دهیم، به این صورت که ماتریس دلخواهی را با سطر و ستون اول مشخص، در نظر بگیریم و رابطهٔ بازگشتی $p_{i,j}=up_{i-1,j}+vp_{i-1,j-1}$ را به ازای اعداد صحیح u و v بین درایه‌های آن اعمال کنیم. ما حتی می‌توانیم روابط بازگشتی دیگری چون

$$\begin{aligned} p_{i,j} &= up_{i-1,j-1}+vp_{i,j-1}, \\ p_{i,j} &= up_{i-1,j}+vp_{i,j-1}, \\ p_{i,j} &= up_{i-1,j}+vp_{i-1,j-1}+wp_{i,j-1} \end{aligned}$$

را بین درایه‌های یک ماتریس تعریف کنیم. در فصل ۳ به بررسی چنین ماتریس‌هایی خواهیم پرداخت.

در اینجا لازم است مفهوم پیچش دنباله‌ها یادآوری شود. اگر $\{a_i\}_{i\geq 0}$ و $\{b_i\}_{i\geq 0}$ دو دنبالهٔ دلخواه باشند، پیچش بین این دنباله‌ها به صورت $\sum\limits_{i\geq 0} a_i b_{n-i}$ تعریف می‌شود. اکنون ترانهادهٔ ماتریس پایین مثلثی تکتوان پاسکال را در نظر می‌گیریم.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

همان‌طور که می‌بینیم ستون اول آن برابر است با $(1, 0, 0, 0, \ldots)^T$. ستون دوم نیز از پیچش ستون اول با دنبالهٔ $(1, 1, 0, 0, \ldots)$ به دست می‌آید. به همین ترتیب ستون سوم به بعد نیز از پیچش ستون ماقبلش با دنبالهٔ $(1, 1, 0, 0, \ldots)$ حاصل می‌شود. این ماتریس را ماتریس پیچش می‌نامیم و در فصل ۴ به بررسی انواعی از این نوع ماتریس‌ها و نحوهٔ یافتن دترمینان آنها می‌پردازیم.

ماتریس پایین مثلثی تکتوان پاسکال P را می‌توانیم از جهت دیگر نیز بررسی کنیم. اگر این ماتریس را در ترانهادهٔ دنبالهٔ دلخواه $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ ضرب کنیم، دنبالهٔ جدیدی به شکل $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k$ می‌یابیم که تبدیل دوجمله‌ای دنبالهٔ $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ نامیده می‌شود. همچنین ماتریس پایین مثلثی تکتوان پاسکال P عضو $(\frac{1}{1-x}, \frac{x}{1-x})$ از گروه ریوردان[1]، با معکوس $(\frac{1}{1+x}, \frac{x}{1+x})$ می‌باشد. در فصل ۵، تبدیل دیگری موسوم به تبدیل کاتالان را معرفی می‌کنیم. بعلاوه دنباله‌های خاصی را در نظر گرفته، تبدیل کاتالان آنها را می‌یابیم و به عنوان عضوی از گروه ریوردان بیان می‌کنیم.

در فصل ٦ معکوس پیچشی دنباله‌های مختلف را به دست می‌آوریم و ماتریس‌های خاصی را بررسی می‌کنیم که با دنباله‌ها مرتبط هستند و مجموعهٔ آنها تشکیل زیرگروهی از گروه ریوردان می‌دهد.

فصل ۷ نیز به یافته‌های جدید اختصاص دارد. در این فصل خانواده‌ای از ماتریس‌ها را می‌یابیم که درایه‌های آنها در روابط بازگشتی خاصی صدق کرده و دنبالهٔ دترمینان آنها تشکیل چند دنبالهٔ معروف می‌دهند.

---

[1] Riordan group

فصل ۲

تعاریف و قضایای اولیه

با توجه به این که موضوع اصلی این پایان‌نامه، ماتریس‌ها و دنبالهٔ دترمینان زیرماتریس‌های اصلی آنها می‌باشد، به اطلاعات اساسی در این مورد نیازمندیم که در زیر به آنها اشاره خواهیم کرد. یادآوری می‌کنیم ماتریسی که همهٔ درایه‌های آن صحیح باشد، یک ماتریس صحیح نامیده می‌شود. در این پایان‌نامه تنها ماتریس‌های صحیح مورد مطالعه قرار خواهند گرفت. همچنین قابل ذکر است که همهٔ ماتریس‌ها و دنباله‌ها از شمارهٔ صفر اندیس‌گذاری شده‌اند، مگر اینکه خلاف آن بیان شود.

تعریف ۲.۰.۱ دنبالهٔ $\alpha = (\alpha_i)_{i\geq ۰}$ یک دنبالهٔ بازگشتی همگن از مرتبهٔ k نامیده می‌شود، هرگاه اعداد ثابت $c_۱, c_۲, \ldots, c_k$ موجود باشند به طوری که $c_k \neq ۰$ و

$$\alpha_i = \sum_{n=۱}^{k} c_n \alpha_{i-n}, \qquad \text{به ازای هر } i \geq k$$

حال به چند نمونهٔ معروف از دنباله‌های بازگشتی مرتبهٔ ۲ اشاره می‌کنیم:

۱. **دنبالهٔ فیبوناچی** F_n[۱]، که از رابطهٔ بازگشتی زیر حاصل می‌شود:

$$F_۰ = ۱,\ F_۱ = ۱, \quad F_n = F_{n-۱} + F_{n-۲} \ \ (n \geq ۲),$$

بنابراین

n	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	$\cdots$
F_n	۰	۱	۱	۲	۳	۵	۸	$\cdots$

[۱] Fibonacci Sequence

۲. **دنبالهٔ لوکاس** L_n[۲]، که از رابطهٔ بازگشتی زیر حاصل می‌شود:

$$L_\circ = ۲,\ L_۱ = ۱, \quad L_n = L_{n-۱} + L_{n-۲} \ \ (n \geq ۲),$$

بنابراین

n	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	$\cdots$
L_n	۲	۱	۳	۴	۷	۱۱	۱۸	$\cdots$

۳. **دنبالهٔ پل** P_n[۳]، که از رابطهٔ بازگشتی زیر حاصل می‌شود:

$$P_\circ = \circ,\ P_۱ = ۱, \quad P_n = ۲P_{n-۱} + P_{n-۲} \ \ (n \geq ۲),$$

بنابراین

n	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	$\cdots$
P_n	۰	۱	۲	۵	۱۲	۲۹	۷۰	$\cdots$

۴. **دنبالهٔ جیکوبسال** J_n[۴]، که از رابطهٔ بازگشتی زیر حاصل می‌شود:

$$J_\circ = \circ,\ J_۱ = ۱, \quad J_n = J_{n-۱} + ۲J_{n-۲} \ \ (n \geq ۲),$$

بنابراین

n	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	$\cdots$
J_n	۰	۱	۱	۳	۵	۱۱	۲۱	$\cdots$

تبصره ۲.۰.۱ فرض می‌کنیم a, b, r, s اعدادی صحیح باشند به طوری که $r, s \geq ۱$. در این صورت در حالت کلی دنبالهٔ جیبوناچی[۵] به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$G_\circ^{(a,b,r,s)} = a, \quad G_۱^{(a,b,r,s)} = b, \quad G_n^{(a,b,r,s)} = rG_{n-۱}^{(a,b,r,s)} + sG_{n-۲}^{(a,b,r,s)} \quad (n \geq ۲).$$

---

[۲] Lucas Sequence

[۳] Pell Sequence

[۴] Jacobsthal Sequence

[۵] Gibonacci Sequence

واضح است که دنباله‌های فوق‌الذکر حالت خاص دنبالهٔ جیبوناچی می‌باشند. یعنی به ازای $a = b = r = s = 1$ دنبالهٔ فیبوناچی، به ازای $a = 2, b = r = s = 1$ دنبالهٔ لوکاس، به ازای $a = 0, b = 1, r = 2, s = 1$ دنبالهٔ پِل و به ازای $a = 0, b = 1, r = 1, s = 2$ دنبالهٔ جیکوبسال را داریم.

یکی از ماتریس‌هایی که در این پایان‌نامه به کرات با آن سروکار خواهیم داشت، ماتریس توپلیتز[۶] می‌باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود:

تعریف ۲.۰.۲ فرض می‌کنیم $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ و $\beta = (\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n)$ دو دنبالهٔ دلخواه باشند به طوری که $\alpha_0 = \beta_0 = \gamma$. ماتریس توپلیتز $T_{\alpha,\beta}(n) = (t_{i,j})_{i,j\geq 0}$ ماتریسی است $(n+1)\times(n+1)$ که به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$T_{\alpha,\beta}(n) = \begin{pmatrix} \gamma & \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_{n-1} & \beta_n \\ \alpha_1 & \gamma & \beta_1 & \cdots & \beta_{n-2} & \beta_{n-1} \\ \alpha_2 & \alpha_1 & \gamma & \cdots & \beta_{n-3} & \beta_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n-1} & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-3} & \cdots & \gamma & \beta_1 \\ \alpha_n & \alpha_{n-1} & \alpha_{n-2} & \cdots & \alpha_1 & \gamma \end{pmatrix}.$$

به طور کلی می‌توانیم بنویسیم:

$$t_{i,j} = \begin{cases} \alpha_{i-j} & i \geq j \\ \beta_{j-i} & i < j. \end{cases}$$

همان‌طور که ممکن است از دوران دبیرستان به خاطر داشته باشیم، مثلث پاسکال– خیام به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\ . & & . & & . & & . & & . & & . \end{array}$$

[۶] Toeplitz matrix

در حقیقت می‌توان با آرایش مجدد درایه‌های این مثلث ماتریس‌هایی جالب بسازیم. در ادامه به یک نمونهٔ مهم از این آرایش‌ها اشاره می‌کنیم:

تعریف ۳.۰.۲ ماتریس $P = (p_{i,j})_{i,j \geq 0}$ را یک ماتریس پایین مثلثی تکتوان پاسکال می‌گوییم هرگاه مثلث پاسکال را از چپ در ماتریس قرار داده و بقیهٔ درایه‌های آن را با صفر پر کنیم. به عبارت دیگر:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & \cdots \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

در حقیقت درایهٔ (i,j)–ام این ماتریس به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$p_{i,j} = \begin{cases} \binom{i}{j} & i \leq j \\ 0 & i > j. \end{cases}$$

توجه داشته باشید که زیرماتریس شامل $n+1$ سطر و ستون اول از این ماتریس را با P_n نشان می‌دهیم.

تعریف ۴.۰.۲ فرض کنیم هر درایهٔ $\binom{i}{j}$ از ماتریس پایین مثلثی تکتوان پاسکال، با یک یک‌جمله‌ای جایگزین شود که ضریب این یک‌جمله‌ای خود $\binom{i}{j}$ باشد، مانند $\binom{i}{j}u^{i-j}$، $\binom{i}{j}u^{i-j}v^{i+j}$ یا $\binom{i}{j}u^{i}v^{j-i}$. در این‌صورت ماتریس به دست آمده را ماتریس تابعی پاسکال می‌نامند.

ماتریس تابعی پاسکالی را که درایهٔ (i,j)–ام آن $\binom{i}{j}u^{j}v^{i-j}$ باشد، با $P(u,v) = (\binom{i}{j}u^{j}v^{i-j})_{i,j\geq 0}$ نمایش داده و قضایا و لم‌های زیر را در مورد آن داریم که در فصل‌های بعد کاربرد زیادی دارند.

لم ۱.۰.۲ اگر $D_u = \operatorname{diag}(1, u, u^2, \ldots, u^n)$، آنگاه $P_n(u,v) = D_v P_n D_{uv^{-1}}$.

برهان. قرار می‌دهیم $t = uv^{-1}$. چنانچه حاصلضرب ماتریسی $D_v P_n D_t$ را محاسبه نماییم، خواهیم داشت:

$$
\begin{aligned}
D_vP_nD_t &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & v & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & v^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & v^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \cdots & \binom{n}{n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & t & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & t^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & t^n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ v & u & 0 & \cdots & 0 \\ v^2 & 2uv & u^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{n}{0}v^n & \binom{n}{1}uv^{n-1} & \binom{n}{2}u^2v^{n-2} & \cdots & \binom{n}{n}u^n \end{pmatrix} \\
&= P_n(u,v)
\end{aligned}
$$

آنچه مطلوب بود. ■

توجه داشته باشید که مطابق لم فوق، همواره روابط زیر برقرار می‌باشند:

(الف) $P_n = P_n(1,1)$

(ب) $P_n(1,-1) = D_{-1}P_nD_{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^n\binom{n}{0} & (-1)^{n+1}\binom{n}{1} & (-1)^{n+2}\binom{n}{2} & \cdots & \binom{n}{n} \end{pmatrix}$

در لم زیر نشان می‌دهیم ماتریس پایین مثلثی تکتوان پاسکال همواره معکوس‌پذیر می‌باشد.

لم ۲.۰.۲ فرض می‌کنیم Q_n یک ماتریس $(n+1)\times(n+1)$ باشد که درایهٔ (i,j)–ام آن به صورت $q_{i,j} = (-1)^{i+j}\binom{i}{j}$ تعریف شده باشد، در این صورت $Q_n = P_n^{-1}$.

برهان. کافی است نشان دهیم $P_nQ_n = I$. فرض می‌کنیم $P_nQ_n = (a_{i,j})_{(n+1)\times(n+1)}$. در این صورت

$$a_{i,j} = \sum_{k=0}^{n} p_{i,k}q_{k,j} = \sum_{k=0}^{n} \binom{i}{k}\binom{k}{j}(-1)^{k+j}.$$

در ادامه سه حالت زیر را جداگانه مورد بررسی قرار می‌دهیم:

(الف) اگر $i<j$، آنگاه

$$a_{i,j}=\sum_{k=0}^{n}\binom{i}{k}\binom{k}{j}(-1)^{k+j}$$

بنابر این به ازای $i<j$ داریم $a_{i,j}=0$.

(ب) اگر $i=j$، آنگاه

$$a_{i,i}=\sum_{k=0}^{n}p_{i,k}q_{k,i}=\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{i}\binom{i}{k}(-1)^{i+k}=\sum_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n}\binom{k}{i}\binom{i}{k}(-1)^{i+k}+\binom{k}{k}\binom{k}{k}(-1)^{2k}=1$$

خاطر نشان می‌کنیم که $\sum\limits_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n}\binom{k}{i}\binom{i}{k}(-1)^{i+k}=0$. در نتیجه هنگامی که $i=j$ داریم $a_{i,i}=1$.

(ج) اگر $i>j$، آنگاه به ازای عددی مانند $l>0$ می‌توان نوشت $i=j+l$. پس

$$a_{i,j}=\sum_{k=0}^{n}p_{i,k}q_{k,j}=\sum_{k=0}^{n}p_{j+l,k}q_{k,j}$$

حال اگر $k\leq j$، آنگاه $p_{j+l,k}q_{k,j}=0$ و اگر $k>j$، آنگاه واضح است که به ازای یک $t>0$ داریم $k=j+t$. بنابر این:

$$\begin{aligned}a_{i,j} &= \sum_{t=0}^{l}p_{j+l,j+t}q_{j+t,j}=\sum_{t=0}^{l}\binom{j+l}{j+t}\binom{j+t}{j}(-1)^{2j+t}=\sum_{t=0}^{l}\frac{(j+l)!}{(j+t)!(l-t)}\frac{(j+t)!}{j!t!}(-1)^{t}\\ &= \frac{(j+l)!}{j!l!}\sum_{t=0}^{l}(-1)^{t}\frac{l!}{(l-t)!t!}=\binom{j+l}{j}\sum_{t=0}^{l}(-1)^{t}\binom{l}{t}=\binom{i}{j}(1-1)^{l}=0\end{aligned}$$

پس در حالت کلی وقتی $i>j$، نتیجه می‌شود $a_{i,j}=0$.

اکنون از (الف) و (ب) و (ج) نتیجه می‌گیریم $P_nQ_n=(a_{ij})=I$ و به این ترتیب حکم ثابت می‌شود. ■

توجه داشته باشید همان‌طور که قبلاً اشاره کردیم $P_n(1,-1)=D_{-1}P_nD_{-1}=P_n^{-1}$. حال با استفاده از لم فوق نشان می‌دهیم ماتریس تابعی پاسکال $P_n(u,v)$ نیز معکوس‌پذیر است.

قضیه ۲.۰.۱ اگر $u\neq 0$، آنگاه $P_n(u,v)$ معکوس‌پذیر است و داریم:

$$P_n(u,v)^{-1}=P_n(1/u,-v/u).$$

برهان. اینکه ماتریس تابعی $P_n(u,v)$ یک ماتریس معکوس‌پذیر است، کاملاً واضح است. در ادامه نشان می‌دهیم $P_n(u,v)^{-1} = P_n(1/u, -v/u)$. با توجه به اینکه D_u یک ماتریس قطری است، داریم $D_u^{-1} = D_{u^{-1}}$. همچنین برای ضرب دو ماتریس قطری کافی است فقط درایه‌های روی قطر اصلی آنها را در هم ضرب کنیم. با توجه به این نکات و لم ۱.۰.۲ و ۲.۰.۲ داریم:

$$\begin{aligned}
P_n(u,v)^{-1} &= (D_v P_n D_{uv^{-1}})^{-1} = D_{uv^{-1}}^{-1} P_n^{-1} D_v^{-1} = D_{(uv^{-1})^{-1}} P_n^{-1} D_{v^{-1}} \\
&= D_{vu^{-1}} P_n^{-1} D_{v^{-1}} = D_{vu^{-1}} (D_{-1} P_n D_{-1}) D_{v^{-1}} = D_{-vu^{-1}} P_n D_{-v^{-1}} \\
&= D_{-vu^{-1}} P_n D_{-u^{-1}(-vu^{-1})^{-1}} = P_n(u^{-1}, -vu^{-1}) = P_n(1/u, -v/u),
\end{aligned}$$

آنچه مطلوب بود. ■

لم ۳.۰.۲ $P_n(u_1,v_1) \cdot P_n(u_2,v_2) = P_n(u_1u_2, v_1 + u_1v_2)$

برهان. چنانچه قرار دهیم: $t = v_1 + u_1 v_2$، آنگاه با محاسبه‌ای ساده ملاحظه می‌کنیم

$$\begin{aligned}
&P_n(u_1,v_1)P_n(u_2,v_2) \\
&= \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
v_1 & u_1 & 0 & \cdots & 0 \\
v_1^2 & 2u_1v_1 & u_1^2 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
v_1^n & \binom{n}{1}u_1v_1^{n-1} & \binom{n}{2}u_1^2v_1^{n-2} & \cdots & u_1^n
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
v_2 & u_2 & 0 & \cdots & 0 \\
v_2^2 & 2u_2v_2 & u_2^2 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
v_2^n & \binom{n}{1}u_2v_2^{n-1} & \binom{n}{2}u_2^2v_2^{n-2} & \cdots & u_2^n
\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
v_1 + u_1v_2 & u_1u_2 & 0 & \cdots & 0 \\
v_1^2 + 2u_1v_1v_2^2 + (u_1v_2)^2 & 2u_1u_2v_1 + 2u_2v_2u_1^2 & (u_1u_2)^2 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
t^n & \binom{n}{1}u_1u_2t^{n-1} & \binom{n}{2}(u_1u_2)^2t^{n-2} & \cdots & (u_1u_2)^n
\end{pmatrix} \\
&= P_n(u_1u_2, t)
\end{aligned}$$

آنچه مطلوب بود. ■

اثبات نتیجهٔ زیر نیز به سادگی انجام می‌شود و بعنوان یک تمرین مقدماتی به خواننده واگذار می‌شود.

نتیجه ۱.۰.۲

$$
\begin{aligned}
P_n^{۲}(u,v) &= P_n(u^{۲}, v+uv) \\
P_n^{۳}(u,v) &= P_n^{۲}(u,v)P_n(u,v) = P_n(u^{۲}, v+uv)P_n(u,v) = P_n(u^{۳}, v+uv+u^{۲}v) \\
&\vdots \\
P_n^{m}(u,v) &= P_n(u^m, v+uv+u^{۲}v+\cdots+u^m v) = P_n(u^m, \tfrac{۱-u^m}{۱-u}v)
\end{aligned}
$$

همچنین داریم:

$$P_n^m(۱,v) = P_n(۱,mv).$$

فصل ۳

ماتریس‌هایی که به وسیلهٔ روابط بازگشتی به دست می‌آیند

فرض می‌کنیم $\alpha = (\alpha_۰, \alpha_۱, \alpha_۲, \ldots)$ و $\beta = (\beta_۰, \beta_۱, \beta_۲, \ldots)$ دو دنبالهٔ دلخواه باشند، به طوری که $\alpha_۰ = \beta_۰ = \gamma$. در این فصل قصد داریم به مطالعهٔ ماتریس‌هایی بپردازیم که آنها را با نماد $D_{\alpha,\beta}^{[u,v,w]} = (d_{i,j})_{i,j\geq ۰}$ نشان می‌دهیم. در اینجا α و β به ترتیب، دنباله‌های ستون صفر و سطر صفر این ماتریس می‌باشند و بقیهٔ درایه‌های آن به ازای $i,j \geq ۱$ و اعداد صحیح u، v و w، از رابطهٔ

$$d_{i,j} = ud_{i-۱,j} + vd_{i-۱,j-۱} + wd_{i,j-۱} \qquad (۱)$$

به دست می‌آیند، به طوری که $uvw \neq ۰$. به هر حال به ازای $u = ۰$، $v = ۰$ یا $w = ۰$، ماتریس‌های جدیدی حاصل می‌شوند که به بررسی آنها نیز خواهیم پرداخت. از مهم‌ترین اهداف این فصل، یافتن توابع مولد ماتریس‌های مذکور و تجزیهٔ این ماتریس‌ها می‌باشد.

تبصره ۲.۰.۳ توجه داشته باشید که در ماتریس‌های فوق، سطر صفر و ستون صفر با شرط $\alpha_۰ = \beta_۰ = \gamma$ به دلخواه انتخاب می‌شوند.

۱.۳ $7_{u,v}$—ماتریس‌ها

ماتریس پایین مثلثی تکتوان پاسکال P_n را به خاطر بیاورید. با کمی دقت در این ماتریس مشاهده می‌کنیم که یک رابطهٔ بازگشتی بین درایه‌های آن برقرار می‌باشد، به این صورت که اگر سطر و ستون اول آن یعنی دنباله‌های $(1, 0, 0, \ldots)$ و $(1, 1, 1, \ldots)$ را در نظر بگیریم، آنگاه درایهٔ (i, j)—ام آن، به ازای $i, j \geq 1$، از رابطهٔ

$$p_{i,j} = p_{i-1,j} + p_{i-1,j-1}$$

به دست می‌آید. این ماتریس را می‌توانیم به صورت $D^{[1,0,1]}_{(1,1,1,\ldots),(1,0,0,\ldots)}$ نیز نشان دهیم. در حقیقت این ماتریس یک مثال و در واقع نقطهٔ شروع از ماتریس‌هایی موسوم به 7—ماتریس می‌باشد، که در ادامه به تعریف آن می‌پردازیم.

تعریف ۱.۱.۳ فرض می‌کنیم $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ و $\beta = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots)$ دو دنبالهٔ دلخواه باشند، به طوری که $\alpha_0 = \beta_0 = \gamma$. اگر $A = (a_{i,j})_{i,j\geq 0}$ ماتریسی باشد که ستون صفر و سطر صفر آن به ترتیب، دنباله‌های α و β باشند و بقیهٔ درایه‌های آن به ازای $i, j \geq 1$ و اعداد صحیح u و v، از رابطهٔ بازگشتی $a_{i,j} = ua_{i-1,j} + va_{i-1,j-1}$ به دست آید، آنگاه A را $7_{u,v}$—ماتریس می‌نامیم.

متذکر می‌شویم که $7_{u,v}$—ماتریس همان $D^{[u,v,0]}_{\alpha,\beta}$ می‌باشد که برای راحتی کار در همه جای این بخش، آن را با $A = (a_{i,j})_{i,j\geq 0}$ نشان خواهیم داد، مگر اینکه خلاف آن بیان شده باشد. همچنین یک $7_{1,1}$—ماتریس را به طور خلاصه 7—ماتریس می‌نامیم. مجموعهٔ همهٔ $7_{u,v}$—ماتریس‌های $(n+1) \times (n+1)$ را با $V_n(u, v)$ نمایش داده و در لم زیر نشان می‌دهیم که در حقیقت این مجموعه همراه با ضرب اسکالر و جمع ماتریسی یک فضای برداری را روی میدان اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ تشکیل می‌دهد. یادآوری می‌کنیم که دراین بخش $\mathbf{e}_i$ به ازای $i = (1, 2, 3, \ldots)$، نمایندهٔ i امین ستون I_n می‌باشد. همچنین نماد $\mathbf{f}_i$ به ازای $i = (0, 1, 2, \ldots)$، برای نمایش ستون $(i + 1)$—ام I_{n+1} به کار می‌رود، بنابر این $I_{n+1} = [\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n]$.

قضیه ۱.۱.۳ مجموعهٔ $V_n(u, v)$ به ازای $n \geq 2$، با اعمال ضرب اسکالر و جمع ماتریسی تشکیل یک فضای برداری با بعد $2n + 1$ می‌دهد.