
بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه بین المللی امام خمینی

IMAM KHOMEINI INTERNATIONAL UNIVERSITY

وزارت علوم تحقیقات و فناوری

دانشگاه بین‌المللی امام خمینی (ره)

دانشکده علوم پایه

پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد ریاضی کاربردی

عنوان:

ایده های یافتن ریشه ها در فضای کواترنیون

استاد راهنما :

آقای دکتر داود رستمی

استاد مشاور:

آقای دکتر سعید عباس بندی

تدوین:

کبری کریمی

بهمن ماه ۸۷

بسمه تعالی

دانشگاه بین المللی امام خمینی(ره)

معاونت آموزشی دانشگاه- مدیریت تحصیلات تکمیلی

(فرم شماره ۲۶)

IMAM KHOMEINI INTERNATIONAL UNIVERSITY

تعهد نامه اصالت پایان نامه

اینجانب کبری کریمی دانشجوی رشته ریاضی کاربردی مقطع تحصیلی کارشناسی ارشد بدین وسیله اصالت کلیه مطالب موجود در مباحث مطروحه در پایان نامه / تز تحصیلی خود، با عنوان ایده‌های پایه‌ای ریشه‌ها در فضاهای کواترنیون را تأیید کرده، اعلام می نمایم که تمامی محتوی آن حاصل مطالعه ، پژوهش و تدوین خودم بوده و به هیچ وجه رونویسی از پایان نامه و یا هیچ اثر یا منبع دیگری، اعم از داخلی، خارجی و یا بین المللی ، نبوده و تعهد می نمایم در صورت اثبات عدم اصالت آن و یا احراز عدم صحت مفاد و یا لوازم این تعهد نامه در هر مرحله از مراحل منتهی به فارغ التحصیلی و یا پس از آن و یا تحصیل در مقاطع دیگر و یا اشتغال و ... دانشگاه حق دارد ضمن رد پایان نامه نسبت به لغو و ابطال مدرک تحصیلی مربوطه اقدام نماید. مضافاً اینکه کلیه مسئولیت ها و پیامدهای قانونی و یا خسارت وارده از هر حیث متوجه اینجانب می باشد.

نام و نام خانوادگی دانشجو کبری کریمی

امضاء و تاریخ

بسمه تعالی

دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره)

جلسه دفاع از پایان نامه خانم کبری کریمی
دانشجوی مقطع کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی
در مورخ ۸۷/۱۱/۷ تحت عنوان «ایده های یافتن
ریشه ها در فضای کواترنیون» در دانشگاه تشکیل
گردید و مورد تأیید نهایی هیأت داوران قرار گرفت
.

هیأت داوران :

۱- استاد راهنما: آقای دکتر داوود رستمی

امضاء

۲- استاد مشاور: آقای دکتر سعید عباس بندی

امضاء

۳- عضو هیأت علمی به عنوان داور خارجی:

آقای دکتر غلامرضا رکنی

امضاء

۴- عضو هیأت علمی به عنوان داور داخلی:

آقای دکتر عبدالرحمن رازانی

امضاء

۵- نماینده تحصیلات تکمیلی:

آقای دکتر محمد اخویزادگان

امضاء

اداره تحصیلات تکمیلی
حوزه اموزشی
دانشگاه بین المللی امام خمینی

سپاس

پروردگار را که توفیقم بخشید و ذره ای از دانش بیکران خویش را به این حقیر ارزانی داشت و در همه حال با من بود.

تقدیم به مادر عزیزم:

که سپاس و ستایش در برابرش حقیر است.

تقدیم به او که وجودش آرامش و اطمینان دلم بود و در سایه پرمهرش نوشتم و آموختم زندگی کردن را.

تقدیم به پدر عزیزم:

که معنای واقعی انسانیت و فداکاری و صداقت را در وجودش یافتم و در راه علم همیشه مشوق و حامی من بود و با حمایت و پشتیبانی اش با سختیها مبارزه کردم.

تقدیم به همسر عزیزم:

که لحظه ای عطوفت خویش را از من دریغ نکرد و با وجودش تنهایی را احساس نمی کنم.

تقدیم به مونس و همدم زندگیم که تا ابد همراهش خواهم بود و عشق پاک خود را نثار راهش خواهم کرد.

وتقدیم به آنانیکه همواره دوستشان دارم:

خواهران و برادرهای عزیزم...

دوست همیشه همراهم...

قدردانی و تشکر

اکنون که به خواست و عنایت خداوند متعال، این پایان‌نامه به پایان رسیده است، لازم می‌دانم از کلیه سروران محترمی که در تهیه و گردآوری این مجموعه مرا یاری نموده‌اند صمیمانه قدردانی نمایم. از خداوند متعال، موفقیت روزافزون این عزیزان را در راه خدمت به علم و بشریت آرزومندم.

از استاد ارجمندم، جناب آقای دکتر رستمی به پاس راهنماییهای ارزنده‌شان صمیمانه سپاسگزاری می‌نمایم. همچنین از استاد گرامی، جناب آقای دکتر عباس‌بندی، که مرا در این راستا یاری فرمودند، قدردانی می‌کنم.

چکیده

در این پایان‌نامه، به معرفی کواترنیون‌ها می‌پردازیم. سپس، کاربرد آن در علوم مختلف را به اجمال بیان می‌کنیم. و دوران در فضای سه بعدی به کمک کواترنیون را به عنوان یکی از مهمترین ویژگی‌های آن مورد بررسی قرار می‌دهیم.

در ادامه، بحث پیدا کردن ریشه nام یک عدد کواترنیون مطرح خواهد شد. در این راستا، ابتدا به کمک روشهای کلاسیک و فضای مختلط، به بحث ریشه‌یابی می‌پردازیم و سپس، از روشهای عددی مانند روش نیوتن ـ رافسون استفاده می‌کنیم.

بنابر ویژگی تعویض‌ناپذیری کواترنیون‌ها، تعریف مشتق معمولی در توابع کواترنیونیک دچار مشکل می‌شود. بنابراین از فرم‌های دیگر مشتق، مانند مشتق گتوس استفاده می‌کنیم.

در نهایت، روش وتری، نیوتن با مرتبهٔ همگرایی بالاتر (تکرارهای هاوس هولدر) و همچنین حل دو معادله ـ دو مجهول در فضای کواترنیون، برای اولین بار بیان می‌شود.

واژه‌های کلیدی: کواترنیون، روش نیوتن، مشتق گتوس، دوران سه بعدی.

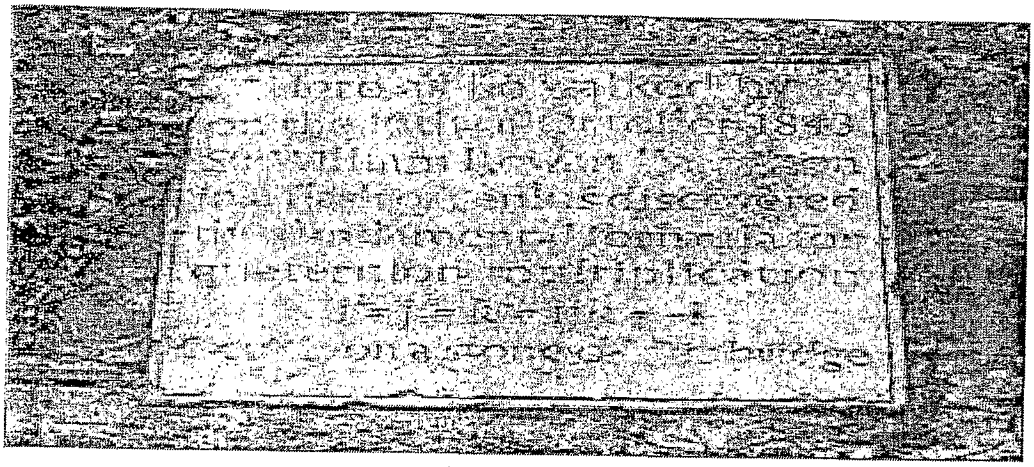
مقدمه

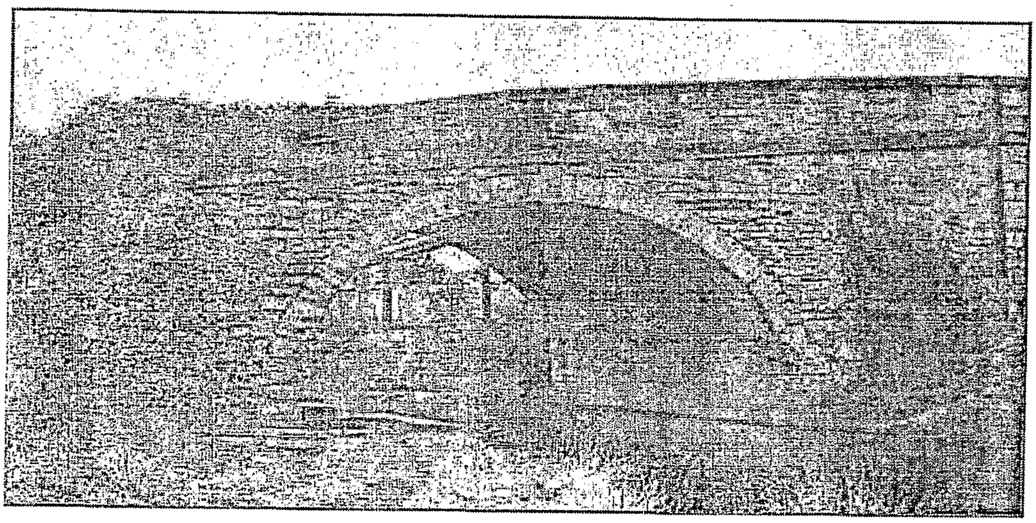
کواترنیون‌ها به وسیلهٔ ریاضی‌دانان ایرلندی، آقای ویلیام همیلتون، در سال ۱۸۴۳ میلادی کشف شدند. همیلتون به دنبال روشی بود تا مجموعهٔ اعداد مختلط را به مجموعه اعداد، با ابعاد بالاتر گسترش دهد. ابتدا، مجموعه اعداد سه تایی را انتخاب کرد ولی علی‌رغم سالها تلاش، وی نتوانست ضرب و در نتیجه تقسیم را در این مجموعه تعریف کند. لذا، کوشش خود را جهت تعریف مجموعه چهارتایی آغاز کرد.

در شانزدهم اکتبر ۱۸۴۳، قوانین اساسی ضرب چهارتایی‌ها را هنگامی که با همسرش از روی پل بروم شهر دابلین[۱] می‌گذشتند، کشف کرد (شکل ۱). سالها بعد این قوانین بر روی آن پل به یادگار، این چنین حک شد:

$$i^{۲} = j^{۲} = k^{۲} = ijk = -۱.$$

1) Dublin





Here as he walked by
on the 16th of October 1843
Sir William Rowan Hamilton
in a flash of genius discovered
the fundamental formula for
quaternion multiplication
$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$
cut on a stone of this bridge

شکل (۱)

بدین ترتیب او توانست ضرب و در نتیجه تقسیم چهارتایی‌ها را تعریف کند و نیز نقطه را در فضا در سیستم جدید نشان دهد. همیلتون، چهارتایی‌ها را با این قوانین ضرب کواترنیون نامید و باقی ماندهٔ عمر خود را به مطالعه و تدریس آنها پرداخت. حاصل تلاشهای او در این زمینه، کتاب ۸۰۰ صفحه‌ای به نام عنصرهای کواترنیون[1] است که مدتی کوتاه پس از درگذشت او به چاپ رسید [۱۴].

1) Elements of Quaternion

بعد از مرگ همیلتون شاگرد او پیتر تایت[1]، کواترنیون‌ها را ارتقاء داد. در اواخر قرن نوزدهم، جوسیا گیبس[2] و الیور هویساید[3] کواترنیون‌ها را جایگزین بردارها نمودند و موضوعاتی در فیزیک و هندسه مانند سینماتیک در فضا و معادلات ماکسول با کمک کواترنیون‌ها بررسی گردید. همچنین در سال ۱۹۹۹، کو پرز[4]، اطلاعات جامعی دربارهٔ کواترنیون‌ها را در کتابی تحت عنوان کواترنیون‌ها و دنباله‌های دورانی به چاپ رساند.

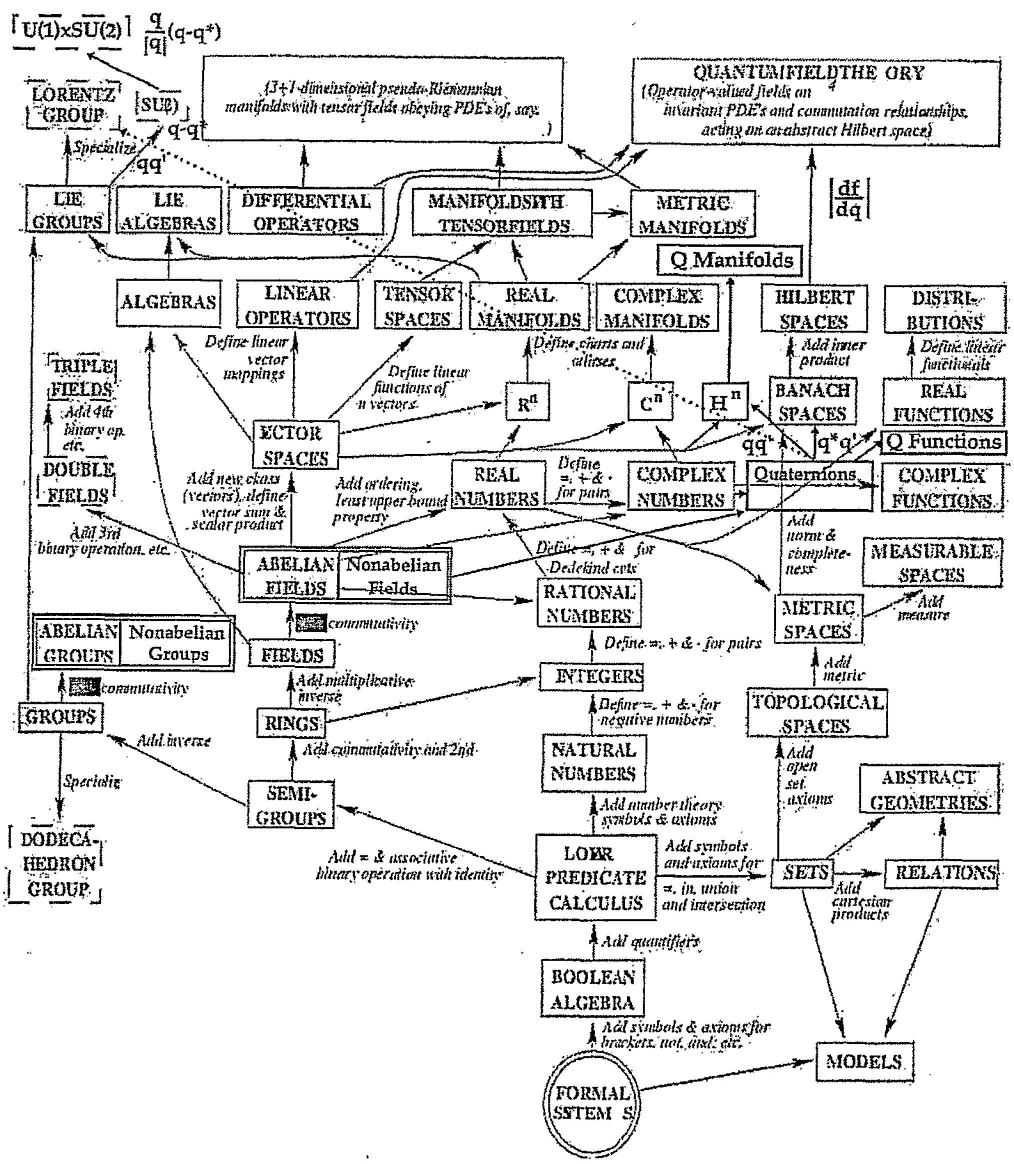
دونگرا[5] و رُسچ[6]، در دههٔ هشتم قرن بیستم به ترتیب کاربرد کواترنیون در مکانیک کوانتوم و شیمی را بیان و بررسی کردند. در اواخر قرن بیستم ماتریس‌ها درکواترنیون توسط ژانگ[7]، بحث شد [۲۷].

در دههٔ اول قرن بیست و یکم جانوفسکا و آپفر[8]، ریشه‌یابی و تجزیه‌ء ماتریس‌ها درکواترنیون‌ها را به تفصیل بیان نمودند.

عمده مطالب موجود در این پایان‌نامه بحث ریشهٔ nام یک عدد کواترنیون است. ابتدا فرمول‌هایی به صورت کلاسیک ارائه و سپس، ابزاری آنالیزی، به نام نیوتن رافسون به کارگرفته می‌شود. همچنین، در شکل (۲) جایگاه کواترنیون‌ها در ساختارهای مختلف ریاضی نشان داده شده است.

---

1) Peter Taiit 2) Josial Gibbs 3) Oliver Heaviside 4) Kui Pers 5) Dongral 6) Rosch 7) Zhang 8) Janovska & Opfer



شکل (۲) جایگاه کواترنیون در ریاضیات

به طورکلی در این پایان‌نامه ۲۹ مقاله مورد مطالعه قرارگرفت که مقالات ۵ و ۱۴ و ۱۶ مراجع اصلی در این تحقیق بودند. و در فصل چهارم ایده‌های جدید که تاکنون مورد بحث قرار نگرفته است آورده شده‌اند.

فهرست مطالب

فصل اول پیشنیاز ۱

۱-۱ مقدمه ۱

۱-۲ اعداد مختلط ۱

۱-۳ ریشه‌های اعداد مختلط ۲

۱-۴ کواترنیون ۳

۱-۵ جبر کواترنیون ۸

۱-۶ کواترنیون واحد ۹

۱-۷ توابع کواترنیونیک ۱۰

۱-۸ مشتق گتوس ۱۳

۱-۹ روش نیوتن ـ رافسون ۱۵

فصل دوم کاربرد کواترنیون ۱۷

۲-۱ کواترنیون و انیمیشن ۱۷

۲-۲ کواترنیون و رباتیک ۱۸

۲-۳ چند امضایی دیجیتال موازی براساس کواترنیون ۱۹

۲-۴ دوران سه بعدی ۲۰

۲-۵ مزیت‌های استفاده از کواترنیون ۲۴

فصل سوم ریشه‌یابی در فضای کواترنیون توسط روش نیوتن ۲۷

۳-۱ مقدمه ۲۷

۳-۲ ریشهٔ nام یک عدد کواترنیون ۳۱

۳-۳ تکرارهای نیوتن برای ریشه‌های کواترنیونیک ۴۱

۳-۴ ویژگی‌های تکرارها ۴۶

۳-۵ رفتارهای عددی از تکرارهای نیوتن ۴۷

۳-۶ همگرایی تکرارهای نیوتن ۴۹

۳-۷ مشتق گتوس و تکرارهای نیوتن کاهشی ۵۳

۳-۸ مجموعه‌های ژولیا ۵۶

۳-۹ سری تیلور در فضای کواترنیون ۶۰

فصل چهارم ایده‌های جدید در حل عددی ریشه‌یابی در فضای کواترنیون ۶۵

۴-۱ مقدمه ۶۵

۴-۲ فرمولهایی برای معادلهٔ درجه دو ۶۶
۴-۳ تکرارهای مرتبه بالاتر نیوتن ۷۱
۴-۴ روش وتری ۷۴
۴-۵ روش وتری برای ریشه‌های کواترنیونیک ۷۵
۴-۶ حل دو معادله ـ دو مجهول ۷۹
۴-۷ نتیجه‌گیری ۸۰

پیوست (برنامه‌های کامپیوتری) ۸۲

واژه‌نامه (انگلیسی به فارسی) ۹۰

واژه‌نامه (فارسی به انگلیسی) ۹۱

مراجع ۹۲

چکیده انگلیسی ۹۵

فصل اول

پیشنیاز

۱-۱ مقدمه

در این فصل ابتدا اشاره‌ای مختصر به اعداد مختلط شده است؛ و کواترنیون‌ها و خواص آن بیان گردیده است.

۲-۱ اعداد مختلط

مجموعهٔ اعداد مختلط را می‌توان به صورت زیر نمایش داد:

$$\mathbb{C} = \left\{ z \middle| \begin{array}{ll} z = (x, y), & x, y \in \mathbb{R} \\ z = x + iy, & i^{۲} = -۱ \\ z = (r, \theta) = re^{i\theta}; & r \geq ۰,\ ۰ \leq \theta < ۲\pi \end{array} \right\}.$$

اعداد حقیقی x و y را به ترتیب، قسمتهای حقیقی و موهومی z می‌نامند و اگر عدد حقیقی را به صورت x یا $(x, \circ)$ بگیریم و i نمایش عدد موهومی محض باشد، دومین فرم نمایش را در مجموعهٔ بالا خواهیم داشت و داریم $i^{۲} = -۱$.

مجموع $z_۱ + z_۲$ و حاصلضرب $z_۱ z_۲$ برای دو عددِ مختلط $z_۱ = (x_۱, y_۱)$ و $z_۲ = (x_۲, y_۲)$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$z_۱ + z_۲ = (x_۱, y_۱) + (x_۲, y_۲) = (x_۱ + x_۲, y_۱ + y_۲),$$

$$z_۱ z_۲ = (x_۱, y_۱)(x_۲, y_۲) = (x_۱ x_۲ - y_۱ y_۲, y_۱ x_۲ + x_۱ y_۲).$$

۱-۳ ریشه‌های اعداد مختلط

سومین فرم نمایش در مجموعهٔ اعداد مختلط را فرم قطبی می‌نامند و در یافتن ریشه از این فرم استفاده می‌کنیم.

نتیجهٔ مهمی که می‌توان به طور صوری با استفاده از قواعد حقیقی به دست‌آورد عبارت است از:

$$z^n = r^n e^{in\theta} \qquad n = \circ, \pm ۱, \pm ۲, \ldots.$$

عبارت $z^n = r^n e^{in\theta}$ در پیدا کردن ریشه‌های nام هر عدد مختلط ناصفر $z_\circ = r_\circ e^{i\theta_\circ}$ مفید است. ریشهٔ nام $z_\circ$، عدد ناصفری مانند $z = re^{i\theta}$ است به طوری که $z^n = z_\circ$ یا $r^n e^{in\theta} = r_\circ e^{i\theta_\circ}$.

حال، داریم:

$$n\theta = \theta_\circ + ۲k\pi, \qquad r^n = r_\circ$$

که در آن $k = \circ, \pm ۱, \pm ۲, \ldots$.

بنابراین $r = \sqrt[n]{r_\circ}$، که در آن رادیکال معرف ریشهٔ nام یکتای عدد حقیقی و مثبت $r_\circ$ است و

$$\theta = \frac{\theta_\circ + ۲k\pi}{n} = \frac{\theta_\circ}{n} + \frac{۲k\pi}{n} \qquad k = \circ, \pm ۱, \pm ۲, \ldots.$$

در نتیجه، اعداد مختلط

$$z = \sqrt[n]{r_\circ} \exp\left[i\left(\frac{\theta_\circ}{n} + \frac{۲k\pi}{n}\right)\right] \qquad (k = \circ, \pm ۱, \pm ۲, \ldots).$$

ریشه‌های nام $z_\circ$ هستند. از این صورت نمایی ریشه‌ها بی‌درنگ می‌توان دید که همهٔ آنها روی دایرهٔ $|z| = \sqrt[n]{r_\circ}$ حول مبداء واقع و به فاصله‌های مساوی $\frac{۲\pi}{n}$ رادیان با شروع از آوند $\frac{\theta_\circ}{n}$ قرار دارند. پس بدیهی است که همهٔ ریشه‌های متمایز وقتی $k = \circ, ۱, ۲, \ldots, n - ۱$ به دست می‌آیند و از بقیهٔ مقادیر k ریشه‌های تکراری حاصل می‌شود ([۴]).

۱-۴ کواترنیون

مجموعهٔ همهٔ کواترنیون‌ها را به افتخار نام مخترع آن همیلتون، با $\mathbb{H}$ نشان می‌دهیم.

مجموعهٔ $\mathbb{H}$، فضای برداری چهاربعدی روی اعداد حقیقی است. در حقیقت مجموعهٔ $\mathbb{R}^۴$ای است که مجهز به عملگر ضربی $\mathbb{H} \times \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$ می‌باشد که با توجه به جدول (۱) برای ۴ عنصر پایه

$$(۱, \circ, \circ, \circ) = ۱, \qquad (\circ, ۱, \circ, \circ) = i,$$

$$(\circ, \circ, ۱, \circ) = j, \qquad (\circ, \circ, \circ, ۱) = k.$$

به راحتی تعریف می‌شود [۱۷].

مجموعهٔ $\mathbb{H}$ به صورتهای زیر نمایش داده می‌شود:

$$\mathbb{H} = \left\{ a \,\middle|\, a = (a, b, c, d) = a_۱ + b_۱ i + c_۱ j + d_۱ k;\ a_۱, b_۱, c_۱, d_۱ \in \mathbb{R} \right\}.$$

a_1 را قسمت حقیقی a، ($\mathrm{Real}\, a = a_1$) $b_1 i + c_1 j + d_1 k$ قسمت موهومی a می‌نامند. ($\mathrm{Im}\, a = (b_1 i + c_1 j + d_1 k)$).

جدول (۱) جدول ضرب برای کواترنیونهای واحد

	۱	i	j	k
۱	۱	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

نکته: $ij = k$ و $ji = -k$، بنابراین ضرب خاصیت تعویض‌پذیری ندارد.

همان طور که در مقدمه بیان شد، همیلتون تلاش کرد اعداد مختلط را به اعداد سه بعدی به فرم

$$\mathbb{H}' = \{h' | h' = a + ib + jc;\ i^2 = j^2 = -1, a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

گسترش دهد. همیلتون هرگز نتوانست مجموعهٔ اعداد سه بعدی را تولید کند.

۱-۴-۱ قضیه مجموعه اعداد سه بعدی $\mathbb{H}'$ نسبت به ضرب تعریف شده بسته نیست.

اثبات: فرض کنیم $i^2 = j^2 = -1$، و مجموعهٔ اعداد سه بعدی نسبت به ضرب بسته باشند، عدد ij را از این مجموعه در نظر می‌گیریم به طوری که $a, b, c \in \mathbb{R}$، $ij = a + ib + jc$ باشد. سپس، i را از سمت چپ در ij ضرب کرده و خواهیم داشت:

$$-j = -b + ia + ijc$$

حال، مقدار ij را در عبارت بالا جایگذاری می‌کنیم

$$-j = -b + ia + (a + ib + jc)c$$

در نتیجه، پس از ساده کردن به دست می‌آوریم:

$$-(ac-b)+i(a+bc)+j(c^{2}+1)=0,$$

$$ac-b=0,$$

$$a+bc=0,$$

$$c^{2}+1=0.$$

معادله $c^{2}+1=0$، ایجاد تناقض می‌کند زیرا $c\in\mathbb{R}$، فرض شده بود.$\square$

۱-۴-۲ تعریف: جمع بین دو کواترنیون فرض کنید داشته باشیم:

$$a=(a_{1}+b_{1}i+c_{1}j+d_{1}k)\in\mathbb{H},\qquad b=(a_{2}+b_{2}i+c_{2}j+d_{2}k)\in\mathbb{H}$$

در آن صورت عمل جمع به صورت عملگر $+:\mathbb{H}\times\mathbb{H}\longrightarrow\mathbb{H}$ تعریف می‌شود به طوری که:

$$a+b=(a_{1}+b_{1}i+c_{1}j+d_{1}k)+(a_{1}+b_{2}i+c_{2}j+d_{2}k)$$
$$=(a_{1}+a_{2})+(b_{1}+b_{2})i+(c_{1}+c_{2})j+(d_{1}+d_{2})k$$

۱-۴-۳ تعریف: ضرب در کواترنیون‌ها اگر $a,b\in\mathbb{H}$، آنگاه ضرب کواترنیون‌ها به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$.:\mathbb{H}\times\mathbb{H}\longrightarrow\mathbb{H}$$

$$ab=(a_{1}+b_{1}i+c_{1}j+d_{1}k)(a_{2}+b_{2}i+c_{2}j+d_{2}k)$$
$$=a_{1}+a_{2}+a_{1}b_{2}i+a_{1}c_{2}j+a_{1}d_{2}k+b_{1}a_{2}i$$
$$+b_{1}b_{2}i^{2}+b_{i}c_{2}ij+b_{1}d_{2}ik+c_{1}a_{1}j+c_{1}b_{2}ji$$
$$+c_{1}c_{2}j^{2}+c_{1}d_{2}jk+d_{1}a_{1}k+d_{1}b_{2}ki+d_{1}c_{2}kj+d_{1}d_{2}k^{2}.$$

با توجه به جدول (۱) می‌توان نوشت:

$$(a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2) + (a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2)i$$
$$+ (a_1c_2 - b_1d_2 + c_1a_2 + d_1b_2)j + (a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2 + d_1a_2)k.$$

۱-۴-۴ تعریف: معکوس جمعی یک عدد کواترنیون اگر $a \in \mathbb{H}$ در آن صورت

$$-a = -a_1 - b_1i - c_1j - d_1k \in \mathbb{H}$$

۱-۴-۵ تعریف: مزدوج یک کواترنیون اگر $a \in \mathbb{H}$ آنگاه

$$\bar{a} = a_1 - b_1i - c_1j - d_1k \in \mathbb{H}$$

نکته: به جای $\bar{a}$ می‌توان از نماد a^*، نیز استفاده کرد.

۱-۴-۶ تعریف: نرم در فضای کواترنیون فرض کنیم $a \in H$، نگاشت زیر را نگاشت نرم اقلیدسی می‌نامیم.

$$||\cdot|| : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$||a|| = \sqrt{a\bar{a}} = \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2}$$

۱-۴-۷ قضیه فرض کنید $a, b \in \mathbb{H}$، ثابت کنید: $||ab|| = ||a||||b||$.

برهان:

$$||ab|| = \sqrt{ab(ab)^*} = \sqrt{abb^*a^*} = \sqrt{a||b||^2a^*}$$

و با توجه به این که $||b||^2$ عددی از اعداد حقیقی است می‌توان نوشت:

$$\sqrt{a||b||^2a^*} = \sqrt{aa^*||b||^2} = \sqrt{||a||^2||b||^2} = ||a||||b||.\square$$