دانشگاه شاهد

دانشکده علوم پایه

پایان‌نامه دوره کارشناسی ارشد

تعمیم‌های بردعددی

استاد راهنما

دکتر محمدباقراسدی
و دکتر رحیم علیزاده

نگارش

ندانوری

شهریور ۱۳۹۰

تقدیم به:

پدر و مادرم؛ برای همه محبت‌ها و دلگرمی‌هایشان،

همسرم؛ برای یاری و تشویقش در کسب علم،

و فرزند دلبندم محمدرضا.

تقدیر و تشکر

تو را سپاس می‌گویم که عظمت و قدرت خویش را چنان بر من نموده ای که جز از تو استعانت نخواهم و برای شکرگزاری از تو، خود را رهین منت همه ی آنهایی بدانم که بزرگوارانه در سامان یافتن این رساله یاریم کردند.

از استاد ارجمند جناب آقای دکتر علیزاده که فراتر از وظیفه خویش در قبال این امر، احساس مسئولیت کرده و متواضعانه مرا یاری کردند سپاس‌گزاری می‌کنم.

از استاد گرانقدر جناب آقای دکتر اسدی که علیرغم مشغله های فراوان و در تنگنای زمان بسیار سودمند و مثمر ثمر، مرا راهنمایی کردند تشکر می‌کنم.

همچنین از مجموعه کارکنان دانشگاه شاهد بالأخص دانشکده علوم پایه که شرایط کار علمی را فراهم نمودند تشکر می‌کنم.

امیدوارم روزگار مرا به جبران زحمتهایی که برای یک یک عزیزان فراهم آورده ام، توفیق دهد.

چکیده

کلمات کلیدی: مدول مینیمم القایی [1] ، بردعددی ماکزیمال [2] ، بردعددی

درسال های اخیرمطالعات زیادی روی بردعددی ماتریس ها و عملگرهای کراندار صورت گرفته است. دراین پایان نامه ابتدا مفهوم بردعددی را بیان کرده و سپس به بیان برد عددی مینیمم تقلیل یافته برای هر عملگر $A \in B(H)$ می پردازیم. درادامه بردعددی مینیمال وبردعددی ماکسیمال را تعریف کرده وبه بررسی یک قضیه مهم پیرامون ارتباط آنها با یکدیگر می پردازیم.

[1] reduced minimum numerical range
[2] maximal numerical range

فهرست مطالب

[۳] moore penrose inverse

مقدمه

مطالعه عملگرهای کراندار یکی از موضوعات مهم در بحث نظریه عملگرها می باشد. ساده ترین نمونه ماتریس ها هستند که در تمام گرایش های ریاضی وجود دارند. ماتریس ها در ریاضیات معرفی شدند و تا امروز ویژگی های آنها بررسی می شود زیرا آنها نقش مهمی در ریاضی و کاربردهای آن بازی می کنند. .

مفهوم بردعددی اولین بار برای عملگرهای خطی روی C^n درسال ۱۹۱۸ توسط تئوپلیتز [۴] درارتباط با مبحث سری های فوریه مطرح گردید. او با الهام از قضیه فجر [۵] که ارتباط بین منحنی های مسطح و سری های فوریه را بیان می کند، به هر ماتریس $n \times n$ یک مجموعه فشرده درصفحه مختلط نسبت داد. درسال ۱۹۱۹ دانشمندان آلمانی تئوپلیتز و هاسدورف [۶] قضیه تحدب بردعددی را اثبات نمودند که به قضیه تئوپلیتز ـ هاسدورف معروف است. این دو همچنین تئوری بردعددی عملگرهای خطی را روی فضای هیلبرت مطرح کردند. این قضیه درسال ۱۹۳۲ توسط استون [۷] در فضای هیلبرت ثابت شد، در سال ۱۹۹۰ این تئوری در شاخه های آنالیزتابعی و آنالیزعددی نیز معرفی گردید. امروزه بردعددی یک مفهوم شناخته شده در آنالیز ماتریس ها است که در تئوری عملگرها بسیار مورد بررسی قرار می گیرد. بردعددی را می توان روی مجموعه انواع مختلف عملگرها به ویژه عملگرهای هرمیتی و فشرده و همینطور جبر عملگرها مثل جبر باناخ و C^* جبرها نیز معرفی و مورد استفاده قرار داد. به طور مثال لامر [۸] نشان داد که بردعددی ابزار موثری برای مرتبط کردن ویژگی های جبری و هندسی جبرهای باناخ است و به وسیله آن اثبات قضیه ها در این حوزه ساده تر می شود. به طور کلی آنالیز تابعی بر پایه بردعددی هنوز هم حوزه مجهول و ناشناخته ای برای تحقیق است. از دیگر کاربردهای بردعددی درزمینه آنالیزعددی می توان به نقش بردعددی درنظریه های ارتعاش های کوچک و تکرارهای چبیشف برای دستگاه های خطی وغیره اشاره نمود. همچنین تعمیم هایی از بردعددی درسیستم های پایدار به کارآمده که منجربه شکوفایی تحقیقات مهندسی دراین زمینه و

[۴] $Toeplitz$
[۵] $Fejer$
[۶] $Huasdorff$
[۷] $M.H.Stone$
[۸] $Lumer$

پروژه های مشترکی میان ریاضی دانان و مهندسان الکترونیک شده است.
هدف اصلی این پایان نامه مطالعه بردعددی عملگرهای خطی کراندار روی فضای هیلبرت وآشنایی با مسائل مطرح شده دراین زمینه می باشد. این پایان نامه مشتمل بر شش فصل است .فصل اول را باتعاریف واصطلاحات مقدماتی آغازکرده و با مفهوم فضای هیلبرت وخواص مقدماتی آن آشنا می شویم . همچنین جبرباناخ عملگرهای خطی کراندار روی فضای هیلبرت ، $B(H)$ و الحاق یک عملگر را نیز بیان می کنیم. تجزیه همانی وانتگرال روی آن را تعریف کرده ونشان می دهیم که برای هر عملگر خطی کراندار یک تجزیه قطبی وجود دارد .مطالب این فصل از [۱۶] اقتباس شده است.
در فصل دوم برد عددی روی ماتریسها و خاصیت تحدب وفشردگی آن را بیان می کنیم. درفصل سوم وقتی دامنه H نامتناهی باشد برد عددی عملگر خطی کراندار را تعریف کرده وخاصیت تحدب وقضایای مهمی پیرامون آن را بیان می کنیم. مطالب فصل دو و سه از [۱۰،۱۲] اقتباس شده است.
در فصل چهارم برای عملگر $A \in B(H)$ قدرمطلق مینیمم تقلیل یافته و معکوس مورپنرز و شرایط وجودی آن را تعریف می کنیم. همچنین نمایش طیفی وخواص مقدماتی آن را نیز نشان می دهیم. مطالب این فصل از [۶،۲۴]اقتباس شده است. در فصل پنجم برد عددی مینیمال تقلیل یافته وارتباط آن با مدول مینیمم را بیان می کنیم.درفصل ششم برد عددی ماکسیمال را تعریف کرده ونشان می دهیم که آن یک مجموعه ناتهی ، محدب ومشمول دربردعددی می باشد. درانتهای فصل نیز یک قضیه مهم درباره ارتباط بین مدول مینیمم با برد عددی مینیمال و برد عددی ماکسیمال مطرح می کنیم. مطالب این دوفصل از [۱۸،۲۰] اقتباس شده است.

فصل ۱

مقدمات ومفاهیم اولیه

۱.۱ مقدمه

در این فصل به مقدمات و مفاهیم مورد نیاز برای مطالعه فصل های بعدی می پردازیم. مطالب این فصل به طور وسیعی در فصل های آتی، به ویژه فصل سوم مورد استفاده قرار خواهند گرفت.

تعریف ۱.۱.۱. *فرض کنید که X یک فضای برداری باشد. $A \subseteq X$ رامحدب گویند هرگاه داشته باشیم*

$$tA + (1-t)A \subseteq A \qquad ,0 \leq t \leq 1.$$

تعریف ۲.۱.۱. *فرض کنیم S زیر مجموعه ای از فضای برداری روی میدان اعداد حقیقی باشد. غلاف محدب[۱] مجموعه S که با نماد $co\,(S)$ نشان داده می شود، از ترکیبات متناهی و محدب از اعضای S تشکیل شده است. یعنی هر عضو $x \in co\,(S)$ به صورت زیر می‌باشد*

$$x = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x_j \quad ,\sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1 \quad ,\lambda_j \geqslant 0 \quad ,k \in \{0,...,n\}.$$

در این جا $x_1,...,x_k \in S$ می‌باشد. به عبارت دیگر $co\,(S)$ کوچکترین مجموعه محدبی است که شامل S باشد.

تعریف ۳.۱.۱. *فضای برداری توپولوژیکیX را موضعاً محدب گویند هرگاه مبدا و درنتیجه هرنقطه دارای پایه ی موضعی باشد که هرعضوآن محدب باشد.*

تعریف ۴.۱.۱. *فرض کنید که X یک فضای نرمدارباشد و $K, S \subseteq X$. دراینصورت K را در S چگال گویند هرگاه به ازای هر$x \in S$ وبه ازای هر $\epsilon > 0$*

$$\exists r \in K, \|x - r\| < \epsilon.$$

[۱] convex hull

لم ۵.۱.۱. *فرض کنید که $A \subseteq \mathbb{C}$ بسته و برای هر $x, y \in A$ داشته باشیم*

$$\frac{x+y}{2} \in A,$$

آنگاه A محدب است .

اثبات. فرض کنید که $x, y \in A$. نشان می دهیم

$$L = \{\lambda x + (1-\lambda)y : 0 \leq \lambda \leq 1\} \subseteq A.$$

حال مجموعه های زیر را می سازیم

$$E_0 = \{x, y\},$$
$$E_1 = \{\frac{s+t}{2} : s, t \in E_0\} = \{x, y, \tfrac{x+y}{2}\},$$
$$\dots$$
$$E_n = \{\frac{s+t}{2} : s, t \in E_{n-1}\},$$
$$E_{x,y} = \textstyle\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n.$$

نشان می دهیم که $E_{x,y}$ در Lچگال است یعنی

$$\{\lambda x + (1-\lambda)y : \lambda \in [0,1]\} \subseteq \overline{E_{x,y}}.$$

برای اثبات این مطلب نشان می دهیم که به ازای هر $u \in L$ وبه ازای هر $\epsilon > 0$

$$\exists s \in E_{x,y} : |u - s| < \epsilon.$$

باتوجه به ساختن مجموعه E_n به ازای هر $u \in L$

$$\exists s \in E_n : |u - s| \leqslant \frac{|y - x|}{2^n}.$$

حال باتوجه به خاصیت ارشمیدوسی اعداد، به ازای هر $\epsilon > 0$

$$\exists n > 0 : \frac{|y - x|}{2^n} < \epsilon.$$

پس به ازای هر $u \in L$ وبه ازای هر $\epsilon > 0$

$$\exists s \in E_n \subseteq E_{x,y} : |u - s| \leqslant \frac{|y - x|}{2^n} < \epsilon.$$

پس نشان دادیم که $E_{x,y}$ در L چگال است . حال باتوجه به بسته بودن A داریم

$$E_{x,y} \subseteq A \Longrightarrow \overline{E_{x,y}} \subseteq \overline{A} = A.$$

پس $\{\lambda x + (1 - \lambda)y : \lambda \in [0, 1]\} \subseteq A$ درنتیجه A محدب است. □

تعریف ۶.۱.۱. *فرض کنید X و Y فضاهایی نرم دار باشند. نگاشت خطی $T : X \longrightarrow Y$ را کراندار گوییم، هرگاه $c > 0$ موجود باشد که برای هر $x \in X$ داشته باشیم*

$$\|Tx\| \leq c\|x\|.$$

باتوجه به این تعریف، نرم عملگری عملگر کراندار $T : X \longrightarrow Y$ به ازای هر x به شکل زیر بیان می شود

$$\|T\| = inf\{c : \|Tx\| \leq c\|x\|\}.$$

یا به طورمعادل

$$\|T\| = sup\{\|Tx\| : \|x\| \leq 1\}.$$

نکته ۷.۱.۱. *فضای تمامی عملگر های کراندار از X به Y را با $B(X,Y)$ نمایش می دهیم. این فضا با نرم بالا تبدیل به یک فضای نرم دار می شود. در ضمن اگر Y یک فضای باناخ باشد ، آنگاه $B(X,Y)$ نیز باناخ خواهد شد. بنابراین اگر X یک فضای نرم دار باشد، آنگاه $X^* = B(X,\mathbb{C})$ ، یک فضای باناخ است. به X^* دوگان X می گوییم.*

قضیه ۸.۱.۱. [16] [*قضیه نگاشت باز*] *اگر X و Y هر دو فضای باناخ و $T : X \longrightarrow Y$ یک تبدیل خطی پیوسته و پوشا باشد، آنگاه T یک نگاشت باز است.*

قضیه ۹.۱.۱. [16][*قضیه گراف بسته*] *اگر X و Y هر دو فضای باناخ و $T : X \longrightarrow Y$ یک تبدیل خطی باشد که گراف T ($\{(x,y) : T(x) = y\}$) بسته باشد، آنگاه T پیوسته است. به عبارت دیگر، T پیوسته است اگروفقط اگر هر جا $x_n \longrightarrow 0$ و $Tx_n \longrightarrow y$ ، $y = 0$ برقرار باشد.*

تعریف ۱۰.۱.۱. *فرض کنید $T : X \longrightarrow Y$ عملگر خطی باشد. T را عملگر فشرده گوئیم هر گاه برای هر دنباله کراندار $\{x_n\}$ در X ، دنباله $\{T(x_n)\}$ دارای زیردنباله ای کشی در Y باشد.(البته اگر X فضای باناخ باشد آنگاه T فشرده است، اگر برای هر دنباله کراندار $\{x_n\}$ در X ، $\{T(x_n)\}$ دارای زیر دنباله ای همگرا در Y باشد.)*

تعریف ۱۱.۱.۱. *اندیس*[۲] *(پیچش) نقطه $z \in \mathbb{C}$ نسبت به مسیربسته Γ که از z نگذرد با $Ind_\Gamma(z)$ نمایش داده وبه صورت زیر تعریف می کنیم*

$$Ind_\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}.$$

قضیه ۱۲.۱.۱. [12] [*جداسازی هان باناخ*[۳]] *فرض کنید A و B دومجموعه محدب باشتراک ناتهی*

---

[۲] index

[۳] Han Banach separation

درفضای برداری توپولوژیکی X باشند آنگاه

۱. *اگر A بازباشد آنگاه $\Lambda \in X^*$ و $\alpha \in \mathbb{R}$ موجودندکه به ازای هر $x \in A$ وبه ازای هر $x \in B$*

$$Re(\Lambda(x)) < \alpha < Re(\Lambda(y)).$$

۲. *اگر A فشرده و B بسته باشد و X فضای موضعاً محدب باشد آنگاه $\alpha_1 < \alpha_2$ در $\mathbb{R}$ و $\Lambda \in X^*$ چنان موجودندکه به ازای هر $x \in A$ وبه ازای هر $x \in B$*

$$Re(\Lambda(x)) < \alpha_1 < \alpha_2 < Re(\Lambda(y))$$

۱.۱.۱ نگاشت های خطی درجه دوم

تعریف ۱.۱.۱۳. *فرض کنید X و Y و Z فضاهای نرم دار روی میدان $\mathbb{C}$ یا $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ باشند. نگاشت $\varphi : X \times Y \to Z$ دو خطی نامیده می شود اگر در شرط های زیر صدق کند*

$$\varphi(x_1 + x_2, y_1) = \varphi(x_1, y_1) + \varphi(x_2, y_1),$$

$$\varphi(x_1, y_1 + y_2) = \varphi(x_1, y_1) + \varphi(x_1, y_2),$$

$$\varphi(ax_1, y_1) = \varphi(x_1, ay_1) = a\varphi(x_1, y_1),$$

که در آن x_1, x_2 در X، y_1, y_2 در Y و $a \in \mathbb{F}$ می باشند.

نگاشت دو خطی $\varphi : X \times Y \longrightarrow Z$ کراندار گفته می شود، اگر $M > 0$ موجود باشد که

$$\|\varphi(x, y)\| \leq M\|x\|\|y\|, \qquad x \in X, y \in Y.$$

مجموعه تمامی توابع دو خطی کراندار از $X \times Y$ بتوی Z را با $B(X \times Y, Z)$ نمایش می دهیم که با جمع و ضرب نقطه به نقطه تبدیل به یک فضای برداری می شود.

$B(X \times Y, Z)$ را می توان به نرم زیر مجهز کرد

$$\|\varphi\| = \sup\{\|\varphi(x,y)\| : \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1\}, \qquad \varphi \in B(X \times Y, Z).$$

تعریف ۱۴.۱.۱. نگاشت $\Lambda : X \to Y$ *درجه دوم نامیده می شود هرگاه تابع دوخطی* $\varphi : X \to Y$ *موجودباشد که*

$$\Lambda(\alpha x) = \varphi(x,x).$$

Λ *کراندارگفته می شود ، اگر* $M > 0$ *موجود باشدکه به ازای هر* $x \in X$

$$|\Lambda(x)| \leq M\|x\|^2.$$

قضیه ۱۵.۱.۱. [10] *تابع درجه دوم* Λ *القاء شده توسط تابع دوخطی* φ *کرانداراست اگر وفقط اگر* φ *کراندارباشد؛ اگر* φ *و* Λ *کراندارباشند آنگاه*

$$\|\Lambda\| \leq \|\varphi\| \leq 2\|\Lambda\|.$$

۲.۱.۱ پوچ ساز ها

در این جا عناصر دوگان X^* *از* X *رابا* x^* *نشان می دهیم و به جای* $x^*(x)$، $\langle x, x^* \rangle$ *را جایگزین می کنیم.*

فرض کنید X *یک فضای باناخ،* M *زیر فضایی از* X *و* N *زیر فضایی از* X^* *باشد. پوچ سازهای* $M^\perp$ *و* $^\perp N$ *به صورت زیر تعریف می شوند*

$$M^\perp = \{x^* \in X^* : \langle x, x^* \rangle = 0, x \in M\},$$

$$^{\perp}N = \{x \in X : \langle x, x^* \rangle = 0, x^* \in N\}.$$

لذا $M^{\perp}$ از تمام تابعک های خطی کراندار بر X که روی M صفر هستند، تشکیل شده است و $^{\perp}N$ زیر مجموعه ای از X است که بر آن هر عضو N صفر گردد. به وضوح $M^{\perp}$ و $^{\perp}N$ فضاهای برداری هستند.

۲.۱ جبر های باناخ

جبر مختلط A ، یک فضای برداری روی میدان مختلط $\mathbb{C}$ است که باضرب $. : A \times A \longrightarrow A$ برای $x, y, z \in A$ و $\alpha \in \mathbb{C}$ دارای ویژگی های زیر است:

$$x(yz) = (xy)z,$$

$$(x+y)z = xz + yz, \qquad x(y+z) = xz + yz,$$

$$\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y).$$

تعریف ۱.۲.۱. *اگر A جبر مختلط و $(A, \|.\|)$ فضایی باناخ باشد که برای هر $a, b \in A$ نامساوی $\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$ برقرار باشد، آنگاه $(A, \|.\|)$ را یک جبر باناخ می گوییم.*

اگر A یکدار با عنصر یکه ۱ بوده و $\|1\| = 1$ باشد،گوییم A یک جبر باناخ یکدار است. هر جبر باناخ غیر یکدار را می توان در یک جبر باناخ یکدار نشاند. اکنون چند مثال از جبر های باناخ را ارائه می دهیم.

مثال ۱. *فرض کنیم $C(K)$ فضای توابع پیوسته مختلط بر فضای فشرده و هاسدورف ناتهی K بانرم سوپریمم باشد. ضرب را به طریق معمول به صورت $(fg)(p) = f(p)g(p)$ تعریف می کنیم. این ضرب $C(K)$ را به یک جبر باناخ یکدار تعویض پذیر بدل می کند.*
اگر K مجموعه ای متناهی مرکب از n نقطه باشد، آنگاه $C(K)$ چیزی جز $\mathbb{C}^n$ باضرب نقطه به

نقطه نیست. به خصوص وقتی $n = 1$، ساده ترین جبر باناخ، یعنی $\mathbb{C}$، باقدر مطلق به عنوان نرم بدست می آید.

مثال ۲. *فرض کنید X یک فضای باناخ باشد. دراین صورت $B(X)$، یعنی جبر تمام عملگرهای خطی کراندار بر X، یک جبر باناخ، نسبت به نرم عملگری است. عملگر همانی I عنصر همانی آن است. هر گاه $dimX > 1$ باشد، $B(X)$ تعویض پذیر نیست.*

تعریف ۲.۲.۱. *فرض کنید که A یک جبرمختلط و φ یک تابعک خطی ناصفر بر A باشد .هرگاه به ازای هر $x \in A$ و $y \in A$، $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ برقرارباشد، آنگاه φ یک همریختی مختلط بر A نام دارد.*

۱.۲.۱ طیف

طیف عملگر $A \in B(X)$، مجموعه تمام اسکالرهای λ است که $A - \lambda I$ وارون پذیرنباشد، وطیف A رابا $\sigma(A)$ نمایش می دهیم. باتوجه به تعریف، $\lambda \in \sigma(A)$ اگر وفقط اگر حداقل دریکی از دو حکم زیر درست باشد

۱. عملگر $A - \lambda I$ پوشانباشد.

۲. عملگر $A - \lambda I$ یک به یک نباشد.

اگر حکم دو برقرارباشد گوییم λ یک مقدارویژه A است. فضای نظیر λ، همان $N(A - \lambda I)$ بوده وهر $x \in N(A - \lambda I)$ (جز $x = 0$) یک بردار ویژه آن است که در معادله $Ax = \lambda x$ صدق می کند.

تعریف ۳.۲.۱. شعاع طیفی A را بانماد $\rho(A)$ نمایش داده وبه صورت زیر تعریف می کنیم

$$\rho(A) = sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

قضیه ۴.۲.۱. [16] هرگاه A یک جبرباناخ و $x \in A$ باشد، آنگاه

۱. طیف$\sigma(x)$ از x فشرده و ناتهی است .

۲. شعاع طیفی $\rho(x)$ از x دررابطه زیرصدق می کند

$$\rho(x) = lim_{n\to\infty}\|x^n\|^{\frac{1}{n}} = inf_{n\geq 1}\|x^n\|^{\frac{1}{n}}$$

نامساوی $\rho(x) \leq \|x\|$ را فرمول شعاع طیفی گویند.

قضیه ۱.۲.۵. [16] فرض کنید که A یک جبرباناخ باشد،$x \in A$ ، Ω یک مجموعه باز در$\mathbb{C}$ باشد و$\sigma(x) \subseteq \Omega$. در این صورت $\delta > 0$ وجوددارد به طوریکه به ازای هر $y \in A$ با $\|y\| < \delta$ داریم

$$\sigma(x+y) \subseteq \Omega.$$

تعریف ۱.۲.۶. فرض کنید که A یک جبرباناخ باشد، Ω مجموعه بازی در$\mathbb{C}$ باشد و$H(\Omega)$ جبرتمام توابع تحلیلی مختلط رویΩ باشد . بنابر قضیه ۱.۲.۵

$$A_\Omega = \{x \in A : \sigma(x) \subseteq \Omega\}.$$

مجموعه بازی ازA است .

مجموعه $H^{\sim}(\Omega)$ را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$H^{\sim}(\Omega) = \{f^{\sim} : A_\Omega \to A : f \in H(\Omega)\},$$

که داریم

$$f^{\sim}(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(\lambda)(\lambda e - x)^{-1} d\lambda.$$

و Γ محیطی که درآن $\sigma(x) \subseteq \Omega$ می باشد.

قضیه ۱.۲.۷. [16][قضیه نگاشت طیفی] فرض کنید که $x \in A_\Omega$ و $f \in H(\Omega)$. دراینصورت داریم

$$\sigma(f^{\sim}(x)) = f^{\sim}(\sigma(x))$$

تعریف ۱.۲.۸. فرض کنید X یک فضای باناخ و $T \in B(X)$ باشد. زیر فضای پایا نسبت به عملگر T، زیر فضای بسته نابدیهی مانند M از X است که $T(M) \subseteq M$ است.

قضیه ۱.۲.۹. [16] فرض کنید A که یک جبرباناخ بوده ، $x \in A$ ، $y \in A$ و $xy = yx$. دراینصورت داریم

۱. $\sigma(x+y) \subseteq \sigma(x) + \sigma(y)$.

۲. $\sigma(xy) \subseteq \sigma(x)\sigma(y)$.

تعریف ۱.۲.۱۰. زیر مجموعه J از جبرمختلط جابه جایی A را ایده آل گویند اگر

۱. J زیرفضای از A (به مفهوم فضای برداری) باشد .

۲. اگر $x \in A$ و $y \in J$ باشد، $xy \in J$.

۱.۲.۲ تبدیل گلفاند

قضیه ۱.۲.۱۱. [16] فرض کنید که A یک جبر باناخ جابه جایی بوده و Δ مجموعه تمام همریختیهای مختلط A باشد دراینصورت داریم

۱. هرایده آل ماکزیمال A هسته یک عضو Δ است .

۲. اگر $h \in \Delta$ ، هسته h یک ایده آل ماکزیمال A است.

تعریف ۱.۲.۱۲. فرض کنید که Δ مجموعه تمام همریختیهای مختلط جبرباناخ جابه جایی A باشد. دراینصورت فرمول $\widehat{x}(h) = h(x)$ به هر $x \in A$ تابعی مانند $\widehat{x} : \Delta \to C$ را نسبت می

دهد. $\widehat{x}$را تبدیل گلفاند x می نامند. فرض کنید که $\widehat{A}$ مجموعه تمام $\widehat{x}$ ها به ازای $x \in A$ باشد. توپولوژی گلفاند Δ توپولوژی ضعیف القا شده توسط $\widehat{A}$ است ؛ یعنی ضعیفترین توپولوژی که هر $\widehat{x}$ را پیوسته می سازد. دراین صورت به وضوح $\widehat{A} \subseteq C(\Delta)$. چون بنابه قضیه بالا یک تناظریک به یک بین ایده آل های ماکزیمال A و اعضا ی Δ وجوددارد ، Δ همراه با توپولوژی گلفاند آن را معمولاً فضای ایده آل ماکزیمال A می نامند. اصطلاح تبدیل گلفاند درمورد نگاشت $x \to \widehat{x}$ از A به روی $\widehat{A}$ نیز اطلاق می شود.

۳.۲.۱ برگشت ها

تعریف ۱۳.۲.۱. نگاشت $x \longrightarrow x^*$ از جبر مختلط A بتوی خودش را یک برگشت روی A گوییم، اگر چهار خاصیت زیر را برای هر $x \in A$ ، $y \in A$ و $c \in \mathbb{C}$ برقرار باشد

$$(x+y)^* = x^* + y^*,$$

$$(cx)^* = \overline{c}x^*,$$

$$(xy)^* = y^*x^*,$$

$$x^{**} = x.$$

به عبارت دیگر، هر برگشت یک پادخودریختی مزدوج-خطی با دوره تناوب ۲ است.

تعریف ۱۴.۲.۱. یک تابعک خطی مانند f بر یک جبر باناخ مانند A با یک برگشت که به ازای هر $x \in A$ در نامساوی

$$f(xx^*) \geq 0,$$

صدق کند، یک تابعک مثبت نام دارد.