بسم الله الرحمن الرحيم

٩٦٢٢٤

دانشگاه مازندران
مجتمع آموزش عالی فنی و مهندسی نوشیروانی

عنوان پایان نامه:

# حل تحلیلی ـ عددی معادلات سینماتیک مستقیم و معکوس روبات ها

جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

مهندسی مکانیک ـ طراحی کاربردی

استاد راهنما:

**دکتر حمیدرضا محمدی دانیالی**

استاد مشاور:

**دکتر داود دومیری گنجی**

۱۳۸۷ /۷/ ۱۱

نگارش:

**میرمجتبی واردی کولایی**

**تیر ۱۳۸۷**

۹۷۲۲۳

باسمه تعالی

دانشگاه صنعتی
نوشیروانی بابل

تحصیلات تکمیلی

# ارزشیابی پایان نامه در جلسه دفاعیه

نام و نام خانوادگی دانشجو : میر مجتبی واردی کولائی — شماره دانشجوئی : ۸۵۵۱۳۶۷۰۰۵

رشته تحصیلی : مهندسی مکانیک – طراحی کاربردی — مقطع : کارشناسی ارشد

عنوان پایان نامه :

«حل تحلیلی – عددی معادلات سینماتیک مستقیم و معکوس روباتها»

تاریخ دفاع : ۸۷/٤/۹

نمره پایان نامه ( به عدد) : ۱۹/۲۵

نمره پایان نامه ( به حروف) : نوزده و بیست و پنج صدم

هیات داوران :

استاد راهنما : دکتر حمید رضا محمدی دانیالی — امضا

استاد مشاور : دکتر داود دومیری گنجی — امضا

استاد مدعو : دکتر محمد حسن حجتی — امضا

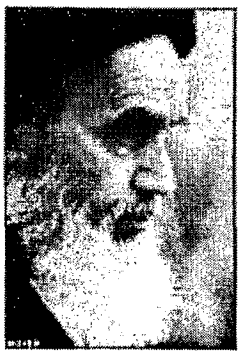
استاد مدعو : دکتر هادی پاشائی — امضا

نماینده کمیته تحصیلات تکمیلی : دکتر محسن شاکری — امضا

دانشگاه صنعتی «نوشیروانی» بابل
دانشکده مهندسی مکانیک

خدایا تا ظهور دولت یار

گل پیغمبر ما را نگهدار



## بیا مهدی شب هجران سحر کن ...

رسیده به لب، جان، ز درد فراقت،

بگو دل چه ها سازد از اشتیاقت،

من آن کوچه گرد شب انتظارم،

که جز دیدنت آرزویی ندارم

# اللهم عجل لولیک الفرج

تقدیم به سرمایه های زندگی ام

**پدر عزیز**

**و**

**مادر مهربانم**

آنان که خاک پایشان، سرمه چشمانم است

و دعایشان، توشه راهم.

## تشکر و قدردانی

پژوهش حاضر حاصل تقریباً یک سال تلاش مداوم و پیوسته نگارنده بوده است که دست یابی به آن، جز با عنایت و یاری **پروردگار** و با راهنمایی و مساعدت دیگران ممکن نبوده است.

در این راستا، بر خود لازم می دانم تا از استاد محترم **جناب آقای دکتر محمدی دانیالی**، استاد راهنمای پایان نامه، که همواره مشوق و راهنمای علمی اینجانب بوده اند، کمال تشکر و قدردانی را داشته باشم. صبر، توجه، دقت، همیاری و همفکری این بزرگوار، پشتوانه اصلی اینجانب در انجام مراحل این کار بوده است.

همچنین از مساعدت ها و راهنمایی های ارزنده و گره گشای استاد ارجمند، **جناب آقای دکتر دومیری گنجی**، تشکر و قدردانی می کنم.

در پایان بر خود وظیفه می دانم از تمامی دوستان و عزیزانی که با همفکری و همدلی خود، این حقیر را در انجام مراحل این پایان نامه یاری کرده اند، و از تمامی اساتید محترم در طول دوران تحصیلی ام، تشکر و قدردانی نمایم.

سلامتی، موفقیت و بهروزی همگان، آرزوی همیشگی ماست.

**امام علی (ع):**

هر ظرفی با ریختن چیزی در آن پر می شود، جز ظرف **دانش**، که هر چه در آن جای دهی، وسعتش بیشتر می شود.

## چکیده:

روبات های موازی به دلیل مزایایی که نسبت به روبات های سری دارند نظر بسیاری از محققـان را بـه خـود جلب نموده اند و استفاده از آن ها روز به روز در حال افزایش است. از جملـه مزایـای آن هـا مـی تـوان بـه تحمل بار زیاد، صلبیت و دقت نقطه کاری اشاره کرد.

برای اکثر روبات های موازی، تحلیل سینماتیک مستقیم به دستگاه معادلات غیر خطی منجر می شود. حـل این دستگاه معادلات غیر خطی همواره با دشواری هایی همراه بوده است، به ویژه هنگامی که تعداد پاسخ ها و یا تعداد موقعیت سینماتیک مستقیم ، افزایش می یابد، ایـن دشـواری بـه اوج خـود مـی رسـد. از جملـه مکانیزم هایی که به دلیل تعداد بالای موقعیت سینماتیک مستقیم و در نتیجـه دشـواری در حـل معـادلات سینماتیک مستقیم آن، همواره مورد توجه محققان قرار گرفته است، روبات استوارت اسـت، کـه بـه عنـوان مکانیزم پایه در شبیه ساز ها و به ویژه در شبیه ساز پرواز مورد استفاده قرار می گیرد.

در این کار از روش تحلیلی عددی هموتوپی کانتینوایشن برای حل معادلات سینماتیکی روبات های مـوازی ۳UPU، ۳PRC ، TTP و استوارت استفاده شده است. در این روش با تشکیل جملات هموتوپی و با انتخاب توابع اختیاری، دستگاه معادلات غیر خطی به دست آمده با استفاده از روش نیوتون رافسون حل می شـوند. این روش محدودیت های روش نیوتون-رافسون را بر طرف می سازد و از مزایای آن این است که مـی توانـد تمامی پاسخ ها را پیدا کند

در این کار سعی شده است تا قابلیت ها و کاربردهای این روش در حل معادلات سینماتیک نشان داده شود.

# فهرست مطالب


چکیده ..... *i*
فهرست مطالب ..... *ii*
فهرست اشکال ..... *iv*
فهرست جداول ..... *vi*

**فصل اول- مقدمه** ..... ۱
۱-۱- روبات ..... ۲
۱-۲- جفت های سینماتیکی ..... ۴
۱-۳- ماتریس دوران $R$ ..... ۶
۱-۳-۱- زوایای $X$-$Y$-$Z$ ثابت (رول، پیچ، یاو) ..... ۸
۱-۴- انواع روبات از نظر زنجیره سینماتیکی ..... ۱۰
۱-۵- سینماتیک روبات ..... ۱۱
۱-۵-۱- سینماتیک مستقیم ..... ۱۱
۱-۵-۲- سینماتیک معکوس ..... ۱۲
۱-۶- سازمان این پایان نامه ..... ۱۳

**فصل دوم- روبات های موازی** ..... ۱۴
۲-۱- توصیف روبات های موازی ..... ۱۴
۲-۲- دوگانگی روبات های سریال- موازی ..... ۱۶
۲-۳- معرفی چند روبات موازی ..... ۲۰
۲-۳-۱- روبات موازی ۳ UPU ..... ۲۰
۲-۳-۲- روبات موازی ۳PRC ..... ۲۳
۲-۳-۳- روبات موازی T T P ..... ۲۶
۲-۳-۴- روبات استوارت ..... ۲۸
۲-۳-۴-۱- کارهای پیشین در مورد استوارت ..... ۳۲
۲-۳-۴-۲- انواع مختلف روبات استوارت ..... ۳۵

**فصل سوم- روش های حل معادلات سینماتیک مستقیم** ..... ۳۸
۳-۱- حل بسته معادلات سینماتیکی برای برخی موارد خاص ..... ۳۹
۳-۲- روش های عددی ..... ۴۱
۳-۲-۱- روش نیوتون-رافسون ..... ۴۲
۳-۳- روش های تحلیلی ..... ۴۳

۳-۳-۱- روش حذفی ..... ۴۵
۳-۳-۲- روش نیمه گرافیکی ..... ۴۶
۳-۳-۳- روش بهینه سازی ..... ۴۶
۳-۴- روش هموتوپی کانتینوایشن ..... ۴۸

**فصل چهارم- حل سینماتیک مستقیم روبات های موازی به روش HCM ..... ۵۲**
۴-۱- حل سینماتیک مستقیم روبات ۳UPU ..... ۵۳
۴-۲- حل سینماتیک مستقیم روبات ۳PRC ..... ۵۹
۴-۲-۱- حالت اول $d_1 = 0, d_2 = 0, d_3 = 0$ ..... ۶۳
۴-۲-۲- حالت دوم $d_1 = -0.1, d_2 = -0.15, d_3 = -0.17$ ..... ۶۴
۴-۳- حل سینماتیک مستقیم روبات موازی T.T.P ..... ۶۵
۴-۴- حل سینماتیک مستقیم استوارت ..... ۷۰
۴-۴-۱- مثال عددی ..... ۷۵
۴-۴-۱-۱- مثال اول ..... ۷۵
۴-۴-۱-۲- مثال دوم ..... ۷۷

**فصل پنجم- جمع بندی و نتیجه گیری ..... ۷۹**
۵-۱- خلاصه کارهای انجام شده ..... ۸۰
۵-۲- پیشنهاداتی برای ادامه کار محققین در آینده ..... ۸۱

منابع و مراجع ..... ۸۲

پیوست الف- کد برنامه MATLAB برای حل سینماتیک مستقیم روبات ۳UPU ..... ۸۶
پیوست ب- کد برنامه MATLAB برای حل سینماتیک مستقیم روبات ۳PRC ..... ۸۷
پیوست پ- کد برنامه MATLAB برای حل سینماتیک مستقیم روبات TTP ..... ۸۹
پیوست ت- کد برنامه MATLAB برای حل سینماتیک مستقیم روبات استوارت ..... ۹۱
پیوست ث- توابع هموتوپی و پاسخ های مربوط به مثال اول روبات استوارت ..... ۹۸
پیوست ج- توابع هموتوپی و پاسخ های مربوط به مثال دوم روبات استوارت ..... ۱۰۱

# فهرست اشکال


شکل ۱-۱- طرح واره یک روبات صفحه ای با دو محرک چرخنده و یک محرک خطی ..... ۳

شکل ۱-۲- انواع مفاصل سینماتیکی ..... ۵

شکل ۱-۳- دو مثال از جفت سینماتیکی مرتبه بالا ..... ۶

شکل ۱-۴- "رول، پیچ، یاو" حول محورهای ثابت ..... ۸

شکل ۱-۵- روبات صفحه ای موازی (زنجیره سینماتیکی بسته و پیچیده) ..... ۱۰

شکل۱-۶- روبات درختی سه انگشتی ..... ۱۱

شکل ۱-۷- رابطه بین سینماتیک مستقیم و معکوس ..... ۱۲

شکل ۲-۱- روبات موازی ۳UPU ..... ۲۱

شکل ۲-۲- یکی از ساق های روبات ۳UPU ..... ۲۱

شکل ۲-۳- صفحه پایه و مختصات سراسری متصل به آن در ۳UPU ..... ۲۲

شکل ۲-۴- سکوی متحرک و مختصات متصل به آن در ۳UPU ..... ۲۳

شکل ۲-۵ - نمای کلی ۳PRC ..... ۲۴

شکل ۲-۶- نمایش طرح واره ۳PRC ..... ۲۴

شکل ۲-۷- هندسه نمونه یکی از ساق های ۳PRC ..... ۲۵

شکل ۲-۸- جزییات روبات TTP ..... ۲۶

شکل ۲-۹- نمونه ای عملی از روبات TTP ..... ۲۷

شکل ۲-۱۰- معرفی زوایای $\alpha_i$ و $\eta_i$ در روبات TTP ..... ۲۸

شکل ۲-۱۱- شبیه ساز پرواز ساخته شده در ارتش جمهوری اسلامی ایران ..... ۲۹

شکل ۲-۱۲- روبات استوارت ۶-SPS ..... ۳۰

شکل۲-۱۳- روبات استوارت ۶-UPS ..... ۳۱

شکل۲-۱۴- روبات استوارت ۳-۳ (ساختار ۸ وجهی) ..... ۳۴

**شکل۲-۱۵- روبات استوارت ۶-۶ (RPS)** ..... ۳۴

**شکل۲-۱۶-** روبات استوارت ۶-۶ ضربدری ..... ۳۵

**شکل۲-۱۷-** نوع دیگری از روبات استوارت ۶-۶ ..... ۳۶

**شکل۲-۱۸-** روبات استوارت ۴-۶ (نوع ۱-۱-۱-۳) ..... ۳۷

**شکل۲-۱۹-** روبات استوارت ۳-۶ (نوع ۱-۲-۳) ..... ۳۷

**شکل ۳-۱-** روبات موازی استوارت ..... ۴۷

**شکل ۴-۱-** مدل سینماتیکی استوارت ۶-۶ ..... ۷۱

**شکل ۴-۲-** دیاگرام برداری برای ساق $i$ ام استوارت ..... ۷۲

# فهرست جداول


**جدول ۲-۱-** سینماتیک مستقیم و معکوس روبات های سری ..... ۱۸

**جدول ۲-۲-** سینماتیک مستقیم و معکوس روبات های موازی ..... ۱۸

**جدول ۲-۳-** مقایسه عمومی میان روبات های سری و موازی ..... ۱۹

**جدول ۴-۱-** نتایج عددی حل معادلات (۴-۱۲) ..... ۵۷

**جدول۴-۲-** نتایج کلی حل معادلات سینماتیک مستقیم UPU ۳ ..... ۵۷

**جدول۴-۳-** نتایج حل تحلیلی Wu ..... ۵۸

**جدول۴-۴-** توابع مختلفی که پاسخ مشابه دارند ..... ۵۸

**جدول۴-۵-** تغییر حدس اولیه و تولید پاسخ مشابه ..... ۵۹

**جدول۴-۶-** توابع اختیاری و ۸ پاسخ روبات PRC ۳ ، در حالت اول ..... ۶۴

**جدول۴-۷-** توابع اختیاری و ۸ پاسخ روبات PRC ۳ ، در حالت دوم ..... ۶۵

**جدول۴-۸-** توابع اختیاری و ۸ پاسخ حقیقی برای سینماتیک مستقیم TTP ..... ۶۸

**جدول۴-۹-** توابع اختیاری و ۸ پاسخ موهومی برای سینماتیک مستقیم TTP..... ۶۸

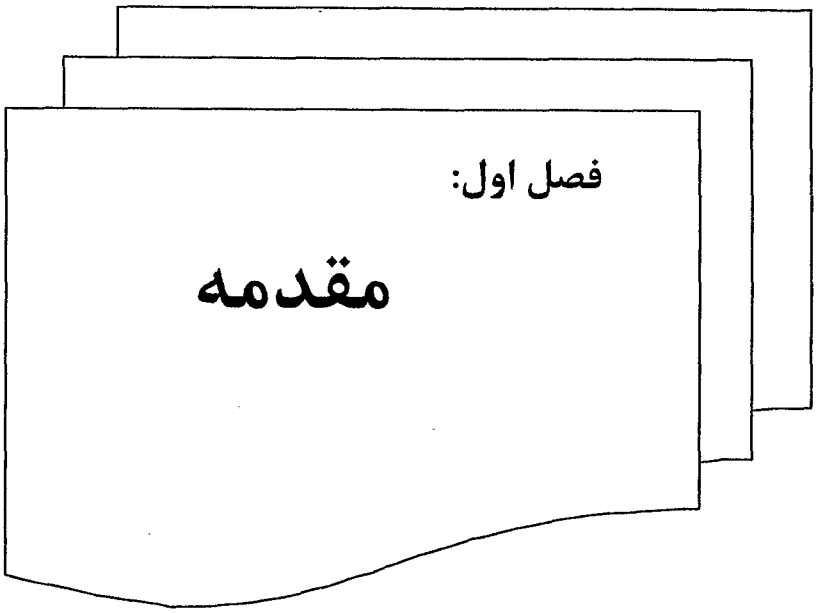
**جدول۴-۱۰-** پاسخ های نهایی سینماتیک مستقیم TTP ..... ۶۹

**جدول ۴-۱۱-** داده های مثال اول استوارت ..... ۷۵

**جدول ۴-۱۲-** ۴۰ پاسخ مثال اول برای سینماتیک مستقیم استوارت ..... ۷۶

**جدول ۴-۱۳-** داده های مثال دوم استوارت ..... ۷۷

**جدول ۴-۱۴-** ۴۰ پاسخ حقیقی برای مثال دوم سینماتیک مستقیم استوارت ..... ۷۸




امروزه استفاده از مکانیزم ها به عنوان یکی از عناصر مهم در صنعت مورد توجه قرار گرفته است، به گونه ای که اکثر حرکات و انتقال ها در صنعت توسط مکانیزم ها و یا به عبارتی توسط روبات ها انجام مـی شـود. در این میان روبات های موازی به دلیل مزایایی که نسبت به روبـات هـای سـری دارنـد، همـواره مـورد توجـه محققان و صنعتگران قرار گرفته اند، به ویژه روبات ۶ درجه آزادی استوارت، که به عنوان مکانیزم پایه بـرای تولید حرکت در شبیه سازها (از جمله شبیه ساز پرواز) مورد استفاده قرار می گیرد.

حل سینماتیک مستقیم مکانیزم های موازی برای پیدا کردن تعداد موقعیت آن، همواره بـا دشـواری هـایی همراه بوده است، به طوری که روش های متعددی برای حل آن ارائه شده است. در این کـار معـادلات غیـر خطی حاصل از سینماتیک مستقیم روبات های موازی توسط روش تحلیلی-عددی هموتوپی کانتینوایـشن[۱]، حل می شوند.

[۱] Homotopy Continuation Method

در این فصل مقدمات و تعاریف جهت شناخت بیشتر روبات[۱] ها، مطرح می شود. در ابتدا تعریف کوتاهی از واژه روبات مطرح شده و انواع مفاصل مورد استفاده در اتصال اجزای یک روبات تشریح می شود. پس از آن دسته بندی روبات ها از نظر زنجیره سینماتیکی بیان می شود. سپس مفهوم سینماتیک مطرح می شود و به توضیح سینماتیک مستقیم و معکوس پرداخته می شود.

## ۱-۱- روبات

واژه عمومی روبات به معنی ماشین انسان نما می باشد که قابلیت انجام کارهای شبیه انسان را دارد. یک روبات را به صورت زیر نیز می توان معرفی کرد:

روبات یا بازوی ماهر[۲]، یک ماشین چند کاره با قابلیت برنامه ریزی مجدد می باشد که برای جابجا کردن مواد، قطعات، ابزار یا وسائل ویژه تحت حرکت های برنامه ریزی شده به کار می رود [۲].

از دیدگاه مکانیکی، یک روبات یا یک بازوی مکانیکی ماهر مکانیزمی است که از رابط های نسبتاً صلبی تشکیل می شود. این رابط ها به وسیله مفصل[۳] هایی، که حرکت نسبی رابط های مجاور را ممکن می سازند، به یکدیگر اتصال یافته اند [۱]. در قسمت بعد انواع مفاصل مورد استفاده در مکانیزم ها معرفی می شوند.

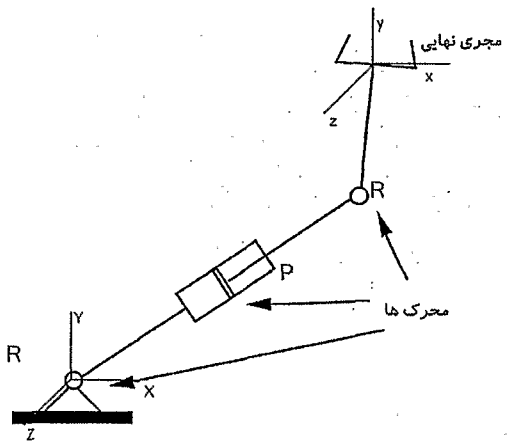
در انتهای آزاد زنجیره رابط های تشکیل دهنده روبات یا بازوی مکانیکی ماهر، مجری نهایی[۴] قرار دارد. براساس کاربردی که از روبات انتظار می رود، مجری نهایی می تواند گیره، چنگک، مشعل جوشکاری، آهنربای الکتریکی و یا ابزاری دیگر باشد. به طور کلی مکان بازوی مکانیکی ماهر را با توصیف چهارچوب ابزار، که به مجری نهایی متصل است، نسبت به چهارچوب پایه، که به پایه غیر متحرک اتصال دارد، تعیین می کنند (شکل ۱-۱) [۱].

---

۱ robot
۲ manipulator
۳ joint
۴ End effector

حرکت یک روبات با استفاده از محرک[۱] یا فعال کننده صورت می گیرد. این محرک ها به دو صورت محرک های خطی و محرک های چرخنده وجود دارند. شکل ۱-۱ روباتی را با دو محرک چرخنده و یک محرک خطی نشان می دهد. همانطور که مشخص است محرک های خطی روی مفاصل کشویی و محرک های چرخنده روی مفاصل چرخشی نصب می شوند. شایان ذکر است که در یک روبات فقط تعداد اندکی از مفاصل دارای محرک هستند و بقیه مفاصل متحرک می شوند یعنی با حرکت مفاصل محرک، مفاصل متحرک نیز حرکت می کنند.

همچنین محرک ها می توانند الکتریکی[۲]، پنوماتیک[۳] یا هیدرولیک[۴] باشند. محرک های الکتریکی یا موتورها برای سرعت های بالا و بار کم مناسب اند در حالی که محرک های هیدرولیک برای بارهای زیاد و سرعت های پایین استفاده می شوند. کاربرد محرک های پنوماتیک نیز همانند محرک های هیدرولیک است مگر اینکه برای بارهای خیلی زیاد به کار نمی روند [۳].




شکل ۱-۱- طرح واره یک روبات صفحه ای با دو محرک چرخنده و یک محرک خطی.

---

۱ actuator
۲ electric actuators
۳ Pneumatic actuators
۴ hydraulic actuators

## ۱-۲- جفت های سینماتیکی

لینک ها یا اعضای صلب در روبات ها در حالت کلی به وسیله جفت های سینماتیکی به هم متصل می شوند، اما جفت های سینماتیکی به دو گروه جفت های سینماتیکی مرتبه بالا[۱] و مرتبه پایین[۲] قابل تقسیم اند. جفت سینماتیکی مرتبه بالا هنگامی است که تماس میان دو عضو روی یک خط یا یک نقطه اتفاق بیفتد، همانند آنچه در اتصال بادامک و پیرو و یا در برخورد دو چرخدنده رخ می دهد (شکل ۱-۳). اما جفت سینماتیکی مرتبه پایین در حالتی است که تماس در طول یک صفحه برقرار شود [۴].

در این قسمت انواع مختلفی از جفت های مرتبه پایین و یا مفاصل که در زنجیره های سینماتیکی استفاده می شود به طور مختصر معرفی می شوند. این مفاصل عبارتند از:

۱ - مفصل چرخشی[۳] (شکل ۱-۲- الف)

۲- مفصل کشویی[۴] (شکل ۱-۲- ب)

۳- مفصل پیچی[۵] (شکل ۱-۲- ج)

۴- مفصل یونیورسال[۶] (شکل ۱-۲- د)

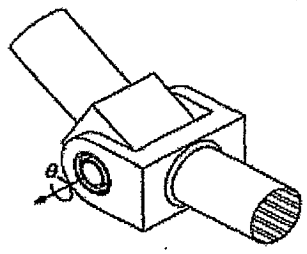
۵- مفصل استوانه ای[۷] (شکل ۱-۲- ه)

۶- مفصل کروی[۸] (شکل ۱-۲- و)

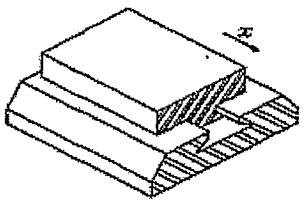
۷- مفصل صفحه ای[۹] (شکل ۱-۲- ز)

---

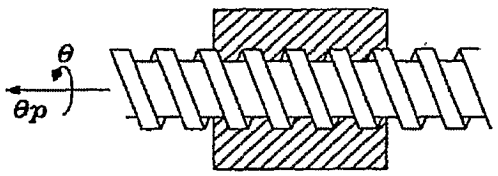
۱ Upper kinematic pairs
۲ Lower kinematic pairs
۳ Revolute joint (R)
۴ Prismatic joint (P)
۵ Helical joint (H)
۶ Universal joint (U)
۷ Cylindrical joint (C)
۸ Spherical joint (S)
۹ Planar joint (E)



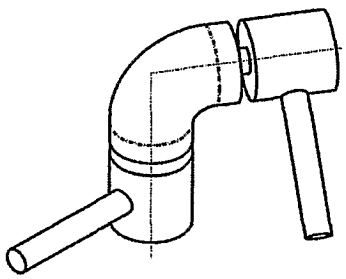

(شکل ۱-۲- الف)



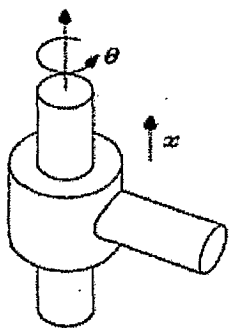

(شکل ۱-۲- ب)



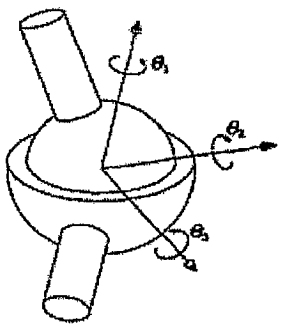

(شکل ۱-۲- ج)



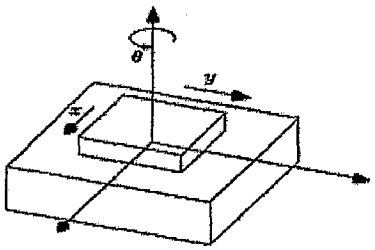
(شکل ۱- ۲- د)




(شکل ۱-۲ - ه)




(شکل ۱-۲- و)

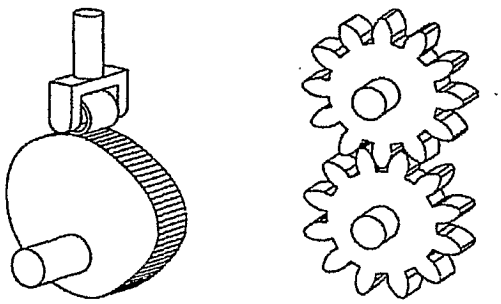



(شکل ۱-۲- ز)

شکل ۱-۲- انواع مفاصل سینماتیکی [۵].

شکل ۱-۲ تعدادی از جفت های سینماتیکی مرتبه پایین یا مفاصل را نشان می دهد اما شایان ذکر است که تمام این مفاصل را می توان در دو گروه کلی جفت های چرخشی[۱] (مفصل چرخشی $R$) و جفت های لغزشی[۲] (مفصل کشویی $P$) جای داد [۴]. به طور مثال مفصل یونیورسال از ترکیب دو مفصل چرخشی تشکیل می شود که محورهای این دو مفصل چرخشی بر هم عمودند و یا مفصل استوانه ای از ترکیب هر دو مفصل چرخشی و کشویی تشکیل شده است.

همچنین شکل ۱-۳ دو نوع جفت سینماتیکی مرتبه بالا را نمایش می دهد.



شکل ۱-۳- دو مثال از جفت سینماتیکی مرتبه بالا [۵].

## ۱-۳- ماتریس دوران $R$

در بسیاری از مسائل رباتیک، با تعریف یک کمیت در دستگاه های مختصات مختلف روبرو هستیم. در این بخش به بحث پیرامون انتقال کمیت ها از یک چهارچوب به چهارچوب دیگر خواهیم پرداخت.

جهت گیری چهارچوب ها نسبت به یکدیگر را به وسیله ماتریس دوران ۳×۳ نمایش می دهند. همانطور که می دانیم [۱]، ویژگی ماتریس دوران آن است که کلیه ستون های آن دو به دو بر هم عمودند و اندازه آن ها برابر واحد است. ماتریس های دوران را ماتریس های یکامتعامد سره نیز می نامند. منظور از سره آن است

---

[۱] Rotating pair ( Revolute joint)

[۲] Sliding pair ( Prismatic joint)

که دترمینان ماتریس مقدار عددی برابر با ۱+ دارد (ماتریس های یکامتعامد ناسره دترمینانی برابر با ۱- دارند) [۱].

بر طبق فرمول کیلی[۱]، برای هر ماتریس یکامتعامد سره, می توان یک ماتریس "پادمتقارن" تعریف کرد، به گونه ای که [۱]

$$R=(I_3-S)^{-1}(I_3+S) \qquad (۱-۱)$$

که در آن $I_3$ ماتریس یکه ۳×۳ است. ماتریس پاد متقارن (یعنی $S=-S^T$) که خود ماتریسی ۳×۳ است، بر حسب سه پارامتر ($s_x, s_y, s_z$) چنین به دست می آید [۱]:

$$S=\begin{bmatrix} 0 & -s_z & s_y \\ s_z & 0 & -s_x \\ -s_y & s_x & 0 \end{bmatrix} \qquad (۱-۲)$$

از رابطه فوق نتیجه می شود که هر ماتریس دوران ۳×۳ را می توان به وسیله تنها سه پارامتر مشخص کرد. روشن است که عضوهای نه گانه ماتریس دوران، از یکدیگر مستقل نیستند. در واقع با داشتن ماتریس دوران $R$ ، می توان بین اعضای آن شش معادله وابستگی نوشت. ماتریس $R$ را، می توان ماتریسی سطری، با سه ستون در نظر گرفت [۱]:

$$R=[\hat{X}\ \hat{Y}\ \hat{Z}\ ] \qquad (۱-۳)$$

چون این بردارها اولاً یکه هستند و ثانیاً دو به دو بر هم عمودند, شش قید زیر در مورد ۹ عضو ماتریس برقرار خواهد بود [۱]:

---

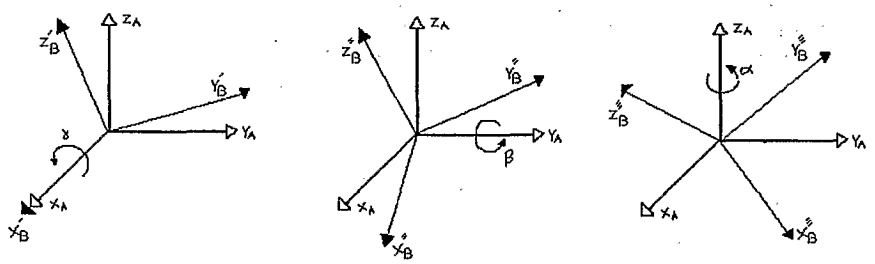
[۱] Cayley

$$\begin{cases} |\hat{X}|=1 \\ |\hat{Y}|=1 \\ |\hat{Z}|=1 \end{cases} \quad \begin{cases} \hat{X}.\hat{Y}=0 \\ \hat{X}.\hat{Z}=0 \\ \hat{Y}.\hat{Z}=0 \end{cases} \qquad (۴-۱)$$

### ۱-۳-۱- زوایای *X-Y-Z* ثابت (رول، پیچ، یاو)

یکی از روش های توصیف جهت گیری چهارچوب متحرک {B} نسبت به چهارچوب {A} چنین است [۱]:

"از چهارچوبی که بر چهارچوب مرجع و معلوم {A} منطبق است, شروع کنید. {B} را ابتدا حول $X_A$ به اندازه $\gamma$، سپس حول $Y_A$ به اندازه $\beta$ و سرانجام حول $Z_A$ به اندازه $\alpha$ دوران دهید." (شکل ۱-۴)




شکل ۱-۴- "رول، پیچ، یاو" حول محورهای ثابت [۱].

هر یک از این سه دوران, حول محوری از چهارچوب ثابت و مرجع {A} صورت می گیرد. این جهت گیری زوایای *X-Y-Z* ثابت نامیده می شود. کلمه "ثابت" به ثابت بودن چهارچوبی که دوران ها حول محورهای آن انجام می گیرد, اشاره می کند. گاهی هم آن را زوایای "**رول**[۱]**, پیچ**[۲]**, یاو**[۳]" می نامند.

---

[۱] Roll دوران حول محور طولی

[۲] Pitch دوران حول محور عرضی

[۳] Yaw دوران حول محور قائم