دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر

پایان نامه کارشناسی ارشد

ریاضی محض (آنالیز)

عنوان

میانگین پذیری تقریبی و شبه-میانگین پذیری رده‌های مختلف جبرهای باناخ

تدوین

علی جباری

استاد راهنما

دکتر علیرضا مدقالچی

بهمن ۱۳۸۷

تقدیر و تشکر

علم دریایی است بی حد و کنار	طالب علم است غواص بحار
گر هزاران سال باشد عمر او	او نگردد سیر، خود، از جستجو

بر خود لازم می‌دانم که در این مجال، از زحمات استاد بزرگوار و ارجمندم جناب آقای دکتر علیرضا مدقالچی که با راهنمایی ایشان این پایان‌نامه را تدوین کردم تقدیر و سپاسگذاری کنم و همچنین اساتید ارجمند جناب آقای دکتر امیر خسروی، خانم دکتر ماهیار و آقای دکتر علی اکبر عالم زاده که از محضر ایشان تلمذ نموده‌ام کمال سپاس و قدردانی را دارم و امیدوارم همیشه موفق و مؤید باشند.

از جناب آقای دکتر ریاضی و آقای دکتر لآلی که قبول زحمت فرموده و داوری این پایان‌نانه را پذیرفتند تشکر می کنم. از خانم اسکندرزاده و خانم گلزاری (مسئولین آموزش دانشکده) و خانم رحیمی (مسؤل کتابخانه) به خاطر زحمات بی‌دریغشان تشکر می‌کنم.

از دوستان گرامی‌ام آقایان مجید راهرو زرگر، حمزه ابراهیمی، مرتضی آقابابایی که در این چند سال همیشه نسبت به اینجانب لطف داشته‌اند صمیمانه تشکر می‌کنم و موفقیت‌شان را در تمام مراحل زندگی از خداوند منّان خواستارم.

در پایان از خانواده‌ی دلسوز و مهربانم که در تمام مراحل زندگی همیشه پشتیبان و همراهم بوده‌اند تشکر کرده و امیدوارم جوابگوی محبت‌هایشان باشم.

چکیده

جبرباناخ A را میانگین‌پذیرتقریبی گوییم هرگاه برای هر Aـمدول X و هر مشتق کراندار $D : A \longrightarrow X^*$، تور (D_α) از مشتق‌های داخلی چنان موجود باشد که برای هر $a \in A$، $\lim_\alpha D_\alpha = D(a)$. ثابت می‌شود که اگر A دارای همانی‌تقریبی‌کراندارمرکزی و قطرتقریبی‌ضربی-کراندار باشد، آنگاه $A^\sharp$ نیز چنین خواهد بود و به رده‌های مختلف جبرهای‌باناخ مانند، جبرهای‌فوریه، زیرجبرهای‌سیگال $L^1(G)$ و جبرهای نیم‌گروهی ℓ^1، می‌پردازیم که چه زمانی میانگین‌پذیرتقریبی یا شبه-میانگین‌پذیر هستند.

واژه‌های کلیدی: انقباض‌پذیرتقریبی، انقباض‌پذیرتقریبی‌دنباله‌ای، جبرسیگال، جبر فوریه، شبه-میانگین‌پذیری، قطر تقریبی، میانگین‌پذیری.

رده‌بندی موضوعی ریاضی ۲۰۰۰: ۴۶H۲۰، ۴۳A۲۰.

فهرست مطالب

پیشگفتار

مفهوم میانگین‌پذیری توسط جان فون نویمن[1] در سال ۱۹۲۹، تحت عنوان آلمانی "messbar"، در مورد اندازه‌ی پایای متناهی‌جمعپذیر، روی زیرمجموعه‌های گروه موضعاً فشرده‌ی G، در رابطه با پارادوکس باناخ-تارسکی[2] ارائه شد و در سال ۱۹۴۹، ماهلون م. دِی[3] آنرا با عنوان میانگین‌پذیری‌در انگلیسی، ترجمه کرد.

جبرهای‌باناخ دارای ساختار جبری و توپولوژیکی هستند و ریاضیدانها به مطالعه‌ی روابط بین این دو ساختار علاقه‌مند هستند. یکی از راههای حصول موفقیت در مورد جبرهای باناخ مطالعه‌ی میانگین‌پذیری آنها است. اگر چه این موضوع تمام خواص آنها را بیان نمی‌کند، با این حال هنوز مطالعات اساسی و زیادی در این مورد انجام می‌شود. مفهوم میانگین‌پذیری جبرهای‌باناخ بیشتر توسط جانسون[4] ارائه شده است. یکی از مواردی که در سالهای اخیر توسط قهرمانی[5] و لوی[6] ارائه شده «میانگین‌پذیری‌تقریبی» جبرهای‌باناخ است.

در این پایان نامه به میانگین پذیری‌تقریبی و شبه-میانگین پذیری جبرهایی باناخ می پردازیم که منبع اصلی، مقاله‌ی

Y. Choi, F. Ghahramani and Y. Zhang, ‘Approximate and pseudo-amenablity of various classes of Banach algebras. http://adsabs.harvard.edu/abs/2008arXiv0801.3415C

است و از مقاله‌های زیر نیز استفاده‌های زیادی شده است:

F. Ghahramani and R. J. Loy, ‘Generalized notions of amenability’, J. funct. Anal, 208(1): 229-260, 2004.

F. Ghahramani and R. J. Loy, ‘Generalized notions of amenability II’, J. funct. Anal,

[1] John Von Neumann
[2] Banach-Tarski paradox
[3] Mahlon M. Day
[4] Johnson
[5] Ghahramani
[6] Loy

2008.

F. Ghahramani and R. Stoke, 'Approximate and pseudo-amenability of Fourier algebra', Indiana Univ. Math. J., 56(2): 909-930, 2007.

فصل اول شامل تعاریف و مفاهیم اولیه جهت استفاده در فصل‌های بعدی است که شامل چهار بخش، آنالیزتابعی، جبرهای‌باناخ و C^*-جبرها، آنالیز هارمونیک و میانگین‌پذیری گروه‌ها و جبرهای‌باناخ است. در بخش میانگین‌پذیری تعاریف و قضایای مهم از جمله قضیه‌ی جانسون بیان شده است.

در فصل دوم ابتدا تعاریف میانگین‌پذیری‌تقریبی، تقریبی‌کراندار، تقریبی‌دنباله‌ای و انقباض‌پذیری تقریبی، تقریبی‌کراندار، تقریبی‌دنباله‌ای، شبه-میانگین‌پذیری و شبه-انقباض‌پذیری و قضایای اساسی مرتبط با آنها را بیان می‌کنیم. در پایان فصل به دو لم بسیار مهم می‌پردازیم که در فصل چهارم برای اثبات میانگین‌پذیرتقریبی نبودن $A(F_2)$ بکار می‌روند.

در فصل سوم به نتایج عمومی و کلی در مورد میانگین‌پذیری جبرهای باناخ می‌پردازیم. در این فصل نشان می‌دهیم که چه زمان وجود قطر تقریبی در جبرباناخ A وجود قطر تقریبی در یکدار شده‌ی آن را تضمین می‌کند و نتایجی را برای قطرهای ضربی-کراندار بدست می‌آوریم.

فصل چهارم درباره‌ی میانگین‌پذیری‌تقریبی جبر فوریه[7] $A(F_2)$ است که F_2 گروهی آزاد با دو مولد است.

فصل پنجم به میانگین‌پذیری‌تقریبی و شبه-انقباض‌پذیری جبرهای سیگال[8] می‌پردازد. در این فصل ابتدا به روابط بین فشردگی گروه G و شبه-انقباض‌پذیری جبرهای‌سگال روی آن را بررسی می‌کنیم، سپس به نتایجی در مورد جبرهای سیگال‌مجرد[9] می‌پردازیم و در آخر به n-میانگین‌پذیری ضعیف پایداری جبرهای‌سگال می‌پردازیم و اینکه $L^1(G)$، میانگین‌پذیرضعیف پایدار است را ثابت می‌کنیم.

فصل ششم مربوط به جبرهای ℓ^1-پیچشی روی نیم مشبکه‌های مجموعه‌های کلاً مرتب است. در این فصل ثابت می‌کنیم که جبر ℓ^1-پیچشی روی یک مجموعه‌ی خوش ترتیب ناشمارا، میانگین‌پذیر تقریبی نیست.

[7] Fourier algbra

[8] Segal algebra

[9] abstract Segal algebra

در پایان ابتدا مراجع مورد استفاده، آورده شده و سپس واژه‌نامه‌ی فارسی به انگلیسی و انگلیسی به فارسی گنجانده شده است.

فصل ۱

مفاهیم و مقدمات اولیه

در این فصل تعاریف و مفاهیم اولیه را جهت استفاده در فصل‌های بعدی بیان می‌کنیم که شامل چهار بخش، آنالیزتابعی، جبرهای‌باناخ و C^*-جبرها، آنالیز هارمونیک و میانگین‌پذیری گروه‌ها و جبرهای‌باناخ است.

۱-۱ آنالیز تابعی

تعریف ۱.۱ . نگاشت T از فضای برداری X به فضای برداری Y را یک نگاشت خطی یا یک عملگر خطی می‌نامیم، هرگاه برای هر $x_۱, x_۲ \in X$ و اسکالر α داشته باشیم:

$$T(\alpha x_۱ + x_۲) = \alpha T(x_۱) + T(x_۲).$$

تعریف ۲.۱ . هر عملگر خطی از فضای برداری X به توی فضای اعداد مختلط را یک تابعک خطی می‌نامیم.

تعریف ۳.۱ . فرض کنید X و Y، فضاهای‌خطی‌نرمدار و $T : X \longrightarrow Y$ عملگر خطی باشد. گوییم T کراندار است هرگاه عددی ثابت مانند M موجود باشد که برای هر $x \in X$، $\|T(x)\| \leq M\|x\|$. نرم T را با $\|T\|$ نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\|T\| = \sup\{\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} : \|x\| \neq ۰\} = \sup_{\|x\|\leq ۱} \|T(x)\|.$$

قضیه ۳.۱ (اصل کرانداری یکنواخت[۱]) . فرض کنید B فضایی‌باناخ و N فضایی خطی نرمدار باشد. اگر $\{T_i\}$ مجموعه‌ی ناتهی تبدیلات خطی از B به توی N باشد که $\{T_i(x)\}$، زیرمجموعه‌یی کراندار از N،

برای هر $x \in B$ باشد. آنگاه $\{\|T_i\|\}$، مجموعه‌یی کراندار خواهد بود.

برهان. ر.ک [۱.۵.۳ و۲٦].■

قضیه ۴.۱ (نشاندن طبیعی[۲]) . فرض کنید N، فضایی خطی نرمدار باشد. آنگاه هر $x \in N$، تابعکی مانند F_x، روی N^* القا می‌کند که $\|F_x\| = \|x\|$ و برای هر $f \in N^*$، $F_x(f) = f(x)$. نگاشت $J : N \longrightarrow N^{**}$ که برای هر $x \in N$، $J(x) = F_x$، یک همریختی طولپا از N به N^{**} خواهد بود.

برهان. ر.ک [۱.۸.۲ و ۲٦].■

قضیه ۵.۱ (قضیه‌ی ساختار حد مکرر[۳]) . فرض کنید D، مجموعه‌یی سودار و برای هر m درD E_m، مجموعه‌یی سودار باشد. فرض کنید $F = D \times \prod\{E_m : m \in D\}$ و برای هر $(m, f) \in F$، فرض کنید $R(m, f) = (m, f(m))$. اگر به ازای هر $m \in D$ و $n \in E_m$، $S(m, n)$ عضوی از فضایی توپولوژیک باشد آنگاه $SoR(m, f)$ که $f(m) = n$، همگرا به $\lim_m \lim_n S(m, n)$ است، زمانی که این حد مکرر موجود باشد.

برهان. ر.ک [۴.۲ و ۱۹].■

تعریف ٦.۱ . فرض کنید X مجموعه‌ی دلخواه غیر تهی و $\{X_i\}$، خانواده‌یی از فضاهای توپولوژیک باشد. برای هر i، نگاشت $f_i : X \longrightarrow X_i$ را در نظر می‌گیریم. اشتراک تمام توپولوژی‌هایی که تحت آنها، تمام f_iها پیوسته باشند را توپولوژی ضعیف می‌نامیم. بنابراین

[۱] Uniform boundedness theorem

[۲] Natural imbeding theorem

[۳] Theorem-on itrated limits

اگر هر f_i پیوسته باشد، آنگاه برای هر O_i باز در X_i، $f_i^{-1}(O_i)$ باید در X باز باشد. بنابراین توپولوژی ضعیف بوسیله‌ی خانواده‌ی $\{f_i^{-1}(O_i) : O_i \in X_i\}$ تولید می‌شود.

تعریف ۷.۱ . فرض کنید N یک فضای‌خطی‌نرمدار و $F_x \in N^{**}$ تابعک القایی به وسیله‌ی $x \in N$ باشد. w^*_توپولوژی روی N^*، ضعیف‌ترین توپولوژی روی N^* است که تمام تابعک‌های مثل F_x، تحت آن پیوسته باشند.

تعریف ۸.۱ . فرض کنید X فضایی باناخ باشد. زیرفضای بسته E از X را کامل شده‌ی ضعیف در X می‌گوییم اگر $E^{\perp} = \{\phi \in X^* : \langle x, \phi \rangle = 0, x \in E\}$، در X^*، کامل باشد.

تعریف ۹.۱ . زیرفضای E از فضای باناخ X را کامل شده‌ی تقریبی در X می‌گوییم، اگر تور (ρ_α) از عملگرهای پیوسته از X به E موجود باشد که برای هر $a \in E$، $\lim_\alpha \rho_\alpha(a) = a$ و همگرایی روی هر زیرمجموعه‌ی E، با نرم یکنواخت باشد. اگر تور (ρ_α) را بتوان کراندار انتخاب کرد، آنگاه E را کامل شده‌ی تقریبی کراندار می‌گوییم.

۱—۲ جبرهای‌باناخ و C^*_جبرها

تعریف ۱۰.۱ . فضای بردای A، روی میدان $\mathbb{F}$ را یک جبر می‌نامیم هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

- A نسبت به جمع و ضرب برداری، یک حلقه باشد؛
- برای هر $\alpha \in \mathbb{F}$ و هر $x, y \in A$، $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$.

اگر جبر A، فضایی خطی‌نرمدار، با نرم $\|.\|$، باشد. آنگاه A را یک جبر نرمدار می‌نامیم هرگاه برای هر $x, y \in A$، $\|xy\| \le \|x\|\|y\|$.

تعریف ۱۱.۱ . اگر جبر A فضایی‌باناخ با نرم $\|.\|$ باشد. آنگاه A را یک جبر باناخ می‌نامیم هرگاه برای هر $x, y \in A$، $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$.

اگر A دارای عضو همانی باشد آن را یک جبرباناخ واحددار(همانی) می‌نامیم و اگر دارای عضو همانی نباشد، آن را به صورت زیر واحددار می‌کنیم و واحددار شده‌ی آن را با $A^\sharp$ نمایش می‌دهیم:

$$(a, \lambda)(b, \mu) = (\lambda b + \mu a + ab, \lambda\mu) \qquad (\lambda, \mu \in \mathbb{F}, a, b \in A).$$

بنابراین $A^\sharp$، فضایی برداری به صورت $A \times \mathbb{F}$، با ضرب تعریف شده در بالا، عنصر همانی (۰, ۱) و نرم $\|(a, \mu)\| = \|a\| + |\mu|$ است. $A^\sharp$، با نرم تعریف شده یک جبرباناخ و A، ایده‌آلی از آن خواهد بود که اگر عنصر همانی $A^\sharp$ را با 1_A نمایش دهیم داریم، $A^\sharp := A \oplus \mathbb{F}1_A$.

تعریف ۱۲.۱ . فرض کنید A یک جبر روی میدان $\mathbb{F}$ باشد. یک کاراکتر(مشخصه) روی A، همریختی غیر صفر از A به توی $\mathbb{F}$ است. مجموعه‌ی تمام کاراکترهای روی A را فضای کاراکتری A می‌نامیم و با Φ_A نمایش می‌دهیم. برای هر $\phi \in \Phi_A$ داریم:

$$\phi(xy) = \phi(x)\phi(y) \qquad (x, y \in A).$$

تعریف ۱۳.۱ . فرض کنید A، یک جبر باشد. تابعک خطی τ روی A را یک تابعک اثر گوییم، هرگاه برای هر $a, b \in A$، $\tau(ab) = \tau(ba)$.

تعریف ۱۴.۱ . فرض کنید A یک جبر نرمدار با نرم $\|.\|$، باشد. همانی‌تقریبی‌چپ(راست) A، توری مانند (e_α) در A است که برای هر $a \in A$، $\lim_\alpha e_\alpha.a = a$ $(\lim_\alpha a.e_\alpha = a)$.

تعریف ۱۵.۱ . همانی تقریبی A، توری مانند (e_α) در A است که همانی تقریبی چپ و راست باشد. همانی تقریبی (e_α)، کراندار است اگر $\sup_\alpha \|e_\alpha\| < \infty$ و همانی تقریبی (e_α)، دنباله‌یی است اگر $\alpha \in \mathbb{N}$.

تعریف ۱۶.۱ . همانی تقریبی (e_α) را همانی تقریبی مرکزی می گوییم اگر (e_α) در مرکز A باشد (یعنی برای هر $a \in A$، $e_\alpha.a = a.e_\alpha$).

تعریف ۱۷.۱ . گوییم جبرباناخ A، دارای همانی تقریبی ضربی چپ (راست) است اگر برای هر زیرمجموعه‌ی متناهی $F \subset A$ و $\varepsilon > 0$، $u \in A$ (وابسته به F و ε) چنان موجود باشد که برای هر $f \in F$، $\|uf - f\| < \varepsilon$ $(\|fu - f\| < \varepsilon)$.

همانی تقریبی ضربی-کراندارچپ (راست) برای جبرباناخ A همانی تقریبی ضربی چپ (راست) است که برای $C > 0$یی، مستقل از $f \in A$ و $\varepsilon > 0$، $\|u\| \leq C$.

نکته: در همانی تقریبی کراندار، کرانداری از نرم جبر باناخ می آید ولی در همانی تقریبی ضربی-کراندار، کرانداری از نرم عملگری روی جبرباناخ می آید.

تعریف ۱۸.۱ . فرض کنید A، یک جبر روی میدان $\mathbb{F}$ و E فضایی برداری روی $\mathbb{F}$ باشد. می گوییم E یک A-مدول چپ است هرگاه نگاشت دوخطی $A \times E \longrightarrow E$ که $(a, x) \longmapsto a.x$، موجود باشد به طوری که:

$$a.(b.x) = (ab).x \qquad (a, b \in A, x \in E)$$

به همین ترتیب E را یک A-مدول راست می گوییم هرگاه نگاشت دوخطی $E \times A \longrightarrow E$ که $(x, a) \longmapsto x.a$، موجود باشد به طوری که:

$$(x.a).b = x.(ab) \qquad (a, b \in A, x \in E)$$

فضای‌برداری E را یک A-دومدول یا به طور خلاصه A-مدول گوییم هرگاه هم A-مدول چپ و هم راست باشد.

تعریف ۱۹.۱ . فرض کنید A یک جبرباناخ باشد. فضای باناخ E را که A-مدول چپ (راست) است یک باناخ A-مدول چپ (راست) می نامیم هرگاه

نگاشت دوخطی $A \times E \longrightarrow E$ که $a.x \longmapsto (a,x)$ ($E \times A \longrightarrow E$ که $x.a \longmapsto (x,a)$)، پیوسته باشد یا $K > 0$یی موجود باشد که برای هر $a \in A$ و هر $x \in E$:

$$\|a.x\| \leq K\|a\|\|x\| \qquad (\|x.a\| \leq K\|a\|\|x\|).$$

حال اگر E، هم باناخ Aـمدول چپ و هم راست باشد، می‌گوییم E یک باناخ Aـدومدول است که به اختصار می‌نویسیم E یک باناخ Aـمدول است.

تعریف ۲۰.۱ . فرض کنید A یک جبر باناخ و E^* فضای دوگان E باشد. اگر E یک باناخ Aـمدول باشد آنگاه برای هر $a \in A$، $x \in E$ و $\lambda \in E^*$ با تعاریف زیر E^* نیز یک باناخ Aـمدول خواهد بود:

$$\langle x, \lambda.a\rangle = \langle a.x, \lambda\rangle \qquad \langle x, a.\lambda\rangle = \langle x.a, \lambda\rangle.$$

تعریف ۲۱.۱ . فرض کنید E یک باناخAـمدول باشد، در این صورت تور (e_α) در A، همانی تقریبی برای E است اگر برای هر $x \in E$، $\lim_\alpha e_\alpha.x = \lim_\alpha x.e_\alpha = x$.

قضیه ۲۲.۱ (قضیه‌ی تجزیه‌ی کوهن[۴]) . فرض کنید A یک جبرباناخ روی $\mathbb{F}$($\mathbb{C}$ یا $\mathbb{F} = \mathbb{R}$) و E یک باناخ Aـمدول باشد که A دارای همانی تقریبی برای E باشد. آنگاه برای هر $z \in E$ و $\varepsilon > 0$، $a \in A$ و $y \in E$یی موجودند به طوری که $z = ay$ و $\|z - y\| < \varepsilon$.

برهان. ر.ک [۱۰.۱۱ و ۲].■

از قضیه‌ی تجزیه‌ی کوهن نتیجه می‌شود که اگر A یک جبرباناخ با همانی‌تقریبی کراندار باشد، آنگاه $A^۲ = A$.

تعریف ۲۳.۱ . فرض کنید A یک جبر باشد. عضو $x \in A$ را خودتوان گوییم هرگاه $x^۲ = x$.

[۴] Cohen's factorization theorem

قضیه ۲۴.۱ (قضیه‌ی گلدشتاین[۵]) . برای هر $\phi \in E^{**}$ تور (x_α) در E موجود است که برای هر α، $\|x_\alpha\| \leq \|\phi\|$ و $x_\alpha \xrightarrow{w^*} \phi$. به عبارت دیگر E در E^{**} با w^*ـتوپولوژی، چگال است.

برهان. ر.ک [A.۲۹.۳ و ۳].■

تعریف ۲۵.۱ . فرض کنید E_1،...، E_n، فضاهای خطی باشند. ضرب تانسوری E_1،...، E_n، زوج (τ, T) است که T فضایی خطی و $\tau : E_1 \times ... \times E_n \longrightarrow T$ یک نگاشت nـخطی با خواص زیر است:

برای هر فضای‌خطی F و هر نگاشت nـخطی $V : E_1 \times ... \times E_n \longrightarrow F$، نگاشت خطی یکتای $\tilde{V} : T \longrightarrow F$ موجود خواهد بود که $V = \tilde{V} o \tau$. حال T را می‌نویسیم $E_1 \otimes ... \otimes E_n$ و تعریف می‌کنیم:

$$x_1 \otimes ... \otimes x_n := \tau(x_1, ..., x_n) \qquad (x_1 \in E_1, ..., x_n \in E_n)$$

قضیه ۲۶.۱ . فرض کنید E_1،...، E_n، فضاهای خطی باشند. آنگاه ضرب تانسوری آنها، یعنی $E_1 \otimes ... \otimes E_n$ موجود خواهد بود.

برهان. ر.ک [B.۱۳ و ۲۵].■

حال فرض کنید E_1،...، E_n، فضاهای باناخ باشند. آنگاه بنا به قضیه‌ی بالا، ضرب تانسوری $E_1 \otimes ... \otimes E_n$ موجود خواهد بود.

تعریف ۲۷.۱ . فرض کنید E_1،...، E_n، فضاهای باناخ باشند. آنگاه برای هر $x \in E_1 \otimes ... \otimes E_n$ تعریف می‌کنیم:

$$\|x\|_\pi := \inf\{ \sum_{k=1}^{m} \|x_1^{(k)}\| ... \|x_n^{(k)}\| \ : \ x = \sum_{k=1}^{m} x_1^{(k)} \otimes ... \otimes x_n^{(k)} \}$$

نرم $\|.\|_\pi$ را نرم تانسوری‌تصویری $E_1 \otimes ... \otimes E_n$ می‌نامیم.

[۵] Goldstine theorem

تعریف ۲۸.۱ . فرض کنید E_1،...، E_n، فضاهای باناخ باشند. آنگاه حاصلضرب تانسوری تصویری $E_1\widehat{\otimes}...\widehat{\otimes}E_n$، کامل شده‌ی $E_1 \otimes ... \otimes E_n$ تحت نرم $\|.\|_\pi$ است.

قضیه ۲۹.۱ . اگر $m \in A\widehat{\otimes}A$، آنگاه مجموعه‌های مستقل خطی، $\{a_i\}$ و $\{b_i\}$ در A موجودند به طوری که $m = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i$.

برهان. ر.ک [۶.۳ و ۲].■

قضیه ۳۰.۱ . فرض کنید E_1،...، E_n، جبرهای‌نرمدار باشند. آنگاه $\otimes_{i=1}^{n} E_i$ با نرم $\|.\|_\pi$ یک جبر نرمدار و $(\widehat{\bigotimes}_{i=1}^{n} E_i, \|.\|_\pi)$ یک جبرباناخ خواهد بود.

برهان. ر.ک [۲۲.۱.۲ و ۳].■

تعریف ۳۱.۱ . فرض کنید A یک جبر و E و F، Aـمدول چپ(راست) باشند. نگاشت $T \in L(E,F)$($L(E,F)$ تمام تبدیلات خطی از E به F) را یک همریختی Aـمدولی چپ(راست) گوییم، هرگاه برای هر $a \in A$ و $x \in E$:

$$T(a.x) = a.T(x) \qquad (T(x.a) = T(x).a).$$

حال اگر E و F، Aـمدول باشند، نگاشت $T \in L(E,F)$ یک همریختی Aـمدولی خواهد بود.

مثال ۳۲.۱ . فرض کنید A یک جبرباناخ و $A \otimes A$ یک Aـمدول باشد. نگاشت حاصلضربی $\pi : A \otimes A \longrightarrow A$ یک همریختی Aـمدولی است و همچنین $\ker\pi$، زیر مدولی از $A \otimes A$ خواهد بود.

تعریف ۳۳.۱ . فرض کنید A یک جبرباناخ باشد، آنگاه نگاشت خطی پیوسته‌ی $\pi : A\widehat{\otimes}A \longrightarrow A$ که برای هر $a,b \in A$، $\pi(a\otimes b) = ab$ را نگاشت ضربی‌القایی‌تصویری می‌نامیم.

تعریف ۳۴.۱ . فرض کنید E و F به ترتیب Aـمدولهای چپ و راست باشند. برای هر $a \in A$، نگاشتهای $(x,y) \mapsto a.x \otimes y$ و $(x,y) \mapsto x \otimes y.a$ از $E \times F$ به توی $E \otimes F$ دو خطی

هستند و همچنین $\rho_l(a), \rho_r(a) \in L(E, F)$ موجودند به طوری که برای هر $x, y \in E$:

$$\rho_l(a)(x \otimes y) = a.x \otimes y \quad , \quad \rho_r(a)(x \otimes y) = x \otimes y.a$$

بنا به بالا $E \otimes F$ یک Aـمدول خواهد بود:

$$a.(x \otimes y) = a.x \otimes y \quad , \quad (x \otimes y).a = x \otimes y.a$$

تعریف ۳۵.۱ . جبر A را یک $*$ـجبر می‌نامیم اگر A یک جبر مختلط با برگشت $*$، خطی الحاقی باشد که برای هر $a, b \in A$ و $\alpha \in \mathbb{C}$

$$(a+b)^* = a^* + b^* \quad , \quad (\alpha a)^* = \bar{\alpha} a^* \quad , \quad a^{**} = a \quad , \quad (ab)^* = b^* a^*.$$

حال اگر A یک $*$ـجبرباناخ باشد و برای هر $a \in A$، $\|a^* a\| = \|a\|^۲$، آنگاه A را یک C^*ـجبر می‌نامیم.

مثال ۳۶.۱ . اگر X فضای هاسدورف موضعاً فشرده باشد. آنگاه $L^\infty(X)$، یک C^*ـجبر واحددار خواهد بود.

تعریف ۳۷.۱ . فرض کنید A یک جبرباناخ تعویض‌پذیر باشد. $h : A \longrightarrow \mathbb{C}$ را یک عملگر ضربی گوییم اگر $h \neq ۰$ و برای هر $x, y \in A$، $h(xy) = h(x)h(y)$ و طیف (اسپکتروم) A را با $\sigma(A)$ نمایش می‌دهیم که $\sigma(A) = \{h : h : A \longrightarrow \mathbb{C}\}$.

قضیه ۳۸.۱ . فرض کنید A یک جبرباناخ تعویض‌پذیر با عنصر همانی باشد. آنگاه $\sigma(A)$، نسبت به W^*ـتوپولوژی فشرده و هاسدورف خواهد بود.

برهان. ر.ک [۵.۹.۷ و ۲۶].■

تعریف ۳۹.۱ . فرض کنید A یک جبرباناخ تعویض‌پذیر باشد. تبدیل گلفاند روی A را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\Gamma : A \longrightarrow C(\sigma(A)) \qquad x \mapsto \hat{x}$$

$$\hat{x} : \sigma(A) \longrightarrow \mathbb{C} \qquad h \mapsto h(x)$$

قضیه ۴۰.۱ (قضیه‌ی گلفاند_نایمارک[۶]) . اگر A یک C^*_جبرتعویض‌پذیر واحددار باشد، آنگاه $\Gamma : A \longrightarrow C(\sigma(A))$ یک $*$_یکریختی طولپا است.

برهان. ر.ک [۲۰.۱ و ۹].■

۱—۳ آنالیز هارمونیک

تعریف ۴۱.۱ . گروه جبری G را یک گروه توپولوژیک موضعاً فشرده گویند، هرگاه گروه G هاسدورف و موضعاً فشرده باشد به طوری که نگاشت‌های

$$G \to G, \qquad x \mapsto x^{-1} \qquad \text{و} \qquad G \times G \to G, \qquad (x,y) \mapsto xy$$

پیوسته باشند.

تعریف ۴۲.۱ . فرض کنید G گروهی موضعاً فشرده باشد. μ را یک اندازه‌ی رادون روی G نامیم هرگاه برای هر مجموعه‌ی فشرده مانند K، $\mu(K) < \infty$، برای هر مجموعه‌ی بورل مانند E، $\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K, K \subseteq E$ فشرده$\}$ و برای هر مجموعه‌ی بورل مانند $E \subseteq G$، $\mu(E) = \inf\{ \mu(O) : O, E \subseteq O$ باز$\}$. آنگاه اندازه‌ی رادون μ روی گروه موضعاً فشرده‌ی G را اندازه‌ی هار چپ (راست) روی G می‌نامیم، اگر برای هر زیرمجموعه‌ی بورل E از G و هر $x \in G$ داشته باشیم:

$$\mu(xE) = \mu(E) \quad (\mu(Ex) = \mu(E)).$$

قضیه ۴۳.۱ . هر گروه موضعاً فشرده دارای یک اندازه‌ی هار چپ منحصربفرد است. (منحصربفرد بودن اندازه‌ی هار یعنی اگر λ اندازه‌ی هار(چپ) باشد و μ اندازه‌ی رادون پایای چپ دیگری باشد آنگاه $C > 0$یی هست که $\mu = C\lambda$).

[۶] Gel'fand-Naimark theorem

برهان. ر.ک [۱۰.۲ و ۹].■

تعریف ۴۴.۱ . فرض کنید f، تابعی روی گروه موضعاً فشرده‌ی G باشد. آنگاه برای هر $x, y \in G$، تعریف می‌کنیم:

$$R_y f(x) = f(xy) \qquad \text{و} \qquad L_y f(x) = f(y^{-1}x)$$

که L_y و R_y را به ترتیب نمایش‌های منظم[۷] چپ و راست می‌نامیم.

تعریف ۴۵.۱ . فرض کنید λ یک اندازه‌ی هار چپ روی G باشد. تعریف می‌کنیم:

$$\lambda_x(E) := \lambda(Ex) \qquad (x \in G).$$

بنا به تعریف بالا λ_x یک اندازه‌ی هار چپ است ولی بنا به یکتایی اندازه‌ی هار چپ، وجود دارد $\Delta(x) > 0$یی که:

$$\lambda_x(E) := \Delta(x)\lambda(E).$$

تابع $\Delta = \Delta_G : G \to (0, \infty)$ را تابع مدولار(هنگی)[۸] G می‌نامیم.

قضیه ۴۶.۱ . تابع مدولار $\Delta_G : G \to (0, \infty)$ یک همریختی است و

$$\int_G R_y f(x) d\lambda(x) = \Delta(y^{-1}) \int_G f(x) d\lambda(x).$$

برهان. ر.ک [۲۴.۲ و ۹].■

تعریف ۴۷.۱ . فرض کنید G یک گروه موضعاً فشرده باشد. فضای تمام اندازه‌های رادون مختلط روی G را با $M(G)$ نمایش می‌دهیم. که برای هر $\mu \in M(G)$، $\|\mu\| = |\mu|(G)$.

---

[۷] Regular representation

[۸] Modular function

تعریف ۴۸.۱ . نگاشت $M(G)\times M(G)\to M(G)$ که $(\mu,\nu)\to\mu*\nu$، را پیچش[۹] μ و ν می‌نامیم. که اگر $\mu,\nu\in M(G)$ و $f\in C_\circ(G)$ آنگاه داریم:

$$\langle f,\mu*\nu\rangle=\int_{G\times G} fd\mu*\nu=\int_G\int_G f(xy)\,d\mu(x)d\nu(y) \qquad (x,y\in G).$$

بنابراین $(M(G),*)$، یک جبرباناخ واحددار خواهد بود که واحد آن، اندازه‌ی دیراک δ_e است و $L^1(G)$، ایده‌آلی از $M(G)$ خواهد بود وبرای هر $f,g\in L^1(G)$، داریم:

$$f*g(x)=\int_G f(y)g(y^{-1}x)d\lambda(y).$$

و همچنین داریم:

$$C_\circ(G)^*=M(G).$$

اگر G، گسسته باشد آنگاه $\ell^1(G)=M(G)$ خواهد بود و برای هر $f\in\ell^1(G)$ داریم:

$$f(x)=\sum_{a\in G} f(a)\delta_a(x)$$

که δ_a، اندازه‌ی دیراک در نقطه‌ی a است.

تعریف ۴۹.۱ . فرض کنید G یک گروه موضعاً فشرده باشد. برای هر $g\in G$، $\delta_g\in M(G)$ و برای هر $f\in C_\circ(G)$ داریم:

$$\langle f,\delta_g\rangle:=f(g)$$

قضیه ۵۰.۱ . فرض کنید G و H گروههایی موضعاً فشرده باشند. آنگاه $*$-یکریختی طولپای $T:L^1(G)\hat{\otimes}L^1(H)\longrightarrow L^1(G\times H)$ موجود است که

$$T(f\otimes g)(s,t)=f(s)g(t) \qquad (f\in L^1(G),g\in L^1(H),(s,t)\in G\times H)$$

برهان. ر.ک [۲۰.۳.۳ و ۳].■

---

[۹] Convolution

قضیه ۵۱.۱ . فرض کنید G یک گروه موضعاً فشرده باشد. آنگاه

(i) $L^1(G)\hat{\otimes}L^1(G)$، به عنوان یک $M(G)$ـمدول، بطور طولپا یکریخت با $(L^1(G\times G),*)$ است؛

(ii) $(L^1(G)\hat{\otimes}L^1(G))^*$، به عنوان یک $M(G)$ـمدول، بطور طولپا یکریخت با $(L^\infty(G\times G),.)$ است.

که عمل‌های مدولی روی $L^\infty(G\times G)$ بصورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\mu.(f\otimes g)=(\mu.f)\otimes g \qquad (f\otimes g).\mu=f\otimes(g.\mu) \qquad (f,g\in L^\infty(G),\mu\in M(G))$$

برهان. ر.ک [۲۱.۳.۳ و ۳].■

تعریف ۵۲.۱ . فرض کنید G یک گروه موضعاً فشرده‌ی آبلی و T گروه دایره‌ی واحد باشد. تابع $\xi:G\to T$ را یک کاراکتر روی گروه G می‌نامیم.

$$\hat{G}=\{\xi:\xi:G\to T\}$$

$$\langle -x,\xi\rangle=\langle x,-\xi\rangle=\langle x,\xi\rangle^{-1}=\overline{\langle x,\xi\rangle}$$

$$\langle x+y,\xi\rangle=\langle x,\xi\rangle\langle y,\xi\rangle \text{ و } \langle x,\xi_1\xi_2\rangle=\langle x,\xi_1\rangle\langle x,\xi_2\rangle.$$

مجموعه‌ی تمام این کاراکترهای پیوسته روی G را، دوگان G می‌نامیم و با $\hat{G}$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۵۳.۱ . برای هر $f\in L^1(G)$، تابع $\hat{f}$ روی $\hat{G}$ را که به صورت زیر تعریف می‌شود تبدیل فوریه f می‌نامیم:

$$\hat{f}(\xi)=\int_G f(x)\overline{\langle x,\xi\rangle}dx \qquad (\xi\in\hat{G})$$

تعریف ۵۴.۱ . مجموعه‌ی همه‌ی توابع مانند $\hat{f}$ روی $\hat{G}$ را با $A(\hat{G})$ نمایش می‌دهیم و آن را جبرفوریه‌ی روی G می‌نامیم، که با ضرب نقطه‌وار یک جبرباناخ است.

$$\widehat{f*g}(\xi)=\hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)=(\hat{f}\hat{g})(\xi)$$