بسم الله الرحمن الرحیم

آ

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی کاربردی

پایان نامه کارشناسی ارشد

فرایند پرش و برخی از کاربردهای آن در ریاضیات مالی

از:

سمیه فلاح لیچایی

استاد راهنما:

دکتر فرشید مهردوست

آبان ۱۳۹۳

تقدیم به...

روح پاک برادرم...

فرشید...

سپاس‌گزاری...

سپاس خدای را که ثنای او فروزان از نیروی سخنوران، بیرون از گنجایش شمارش‌گران و پرداختن به‌حق او فراتر از توان سخت‌کوشان است. خداوندی که آدمی را در اوج ناتوانی‌های بشری، کانون مکاشفات و مبدا و مقصد تحولات نهاد. خداوندی که در ضمیر هر یک از ما علم حضور و محاسبه‌ی آیاتش را جزئی لاینفک نهاد. به‌راستی به قلم چرخاندن اندیشه‌وران هم از اوست، او که هیچ اندیشه‌ی دور پردازی شناختنش را فرا چنگ نیاورد و هیچ هوش ژرف بینی به ژرفایش راه نیابد. خداوندی که آدمی را خرد و اختیار ورزید و فرمان داد بخوان و بنویس به حق رسالت نوشتن، بدان و بیاموز به رسالت علم و ببخش و بخوان به کرامت علم که بی‌شک آموزگار و یادآورنده‌ی ذره‌ای از دریای علمش چون مروارید در آب‌های شور است.

به‌دلیل رسالت گران‌مایه‌ی علم‌آموزی جایگاه منزلت معلم، اجلّ از آن است که در مقام قدردانی از زحمات بی‌شائبه‌ی او، با زبان قاصر و دست ناتون، چیزی بنگاریم. اما از آن‌جایی که تجلیل از معلم، سپاس از انسانی است که هدف و غایت آفرینش را تامین می‌کند و سلامت امانت‌هایی را که به دستش سپرده‌اند، تضمین؛ بر حسب وظیفه و از باب «من لم یشکر المنعم من المخلوقین لم یشکر اللّٰه عزّ و جلّ»:

از استاد راهنمای بزرگوارم جناب آقای دکتر فرشید مهردوست و استاد محترم مشاورم جناب آقای دکتر حسین صمیمی حق‌گذار که در کمال سعه صدر، با حسن خلق و فروتنی، از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننمودند و زحمت راهنمایی این پایان‌نامه را بر عهده گرفتند؛

از جناب آقای دکتر بهروز فتحی و جناب آقای دکتر مازیار صلاحی که زحمت داوری این پایان‌نامه را متقبل شدند؛

از پدر و مادر عزیزم که همواره بر کوتاهی و درشتی من، قلم عفو کشیده و کریمانه از کنار غفلت هایم گذشته اند و در تمام عرصه های زندگی یار و یاوری بی چشم داشت برای من بوده اند؛

کمال تشکر و قدردانی را دارم.

در پایان از زحمات خواهر دوست‌داشتنی‌ام و تمام دوستانی که در تدوین این تحقیق با محبت و دلگرمی مرا یاری نمودند تشکر کرده و از خداوند منان سلامت و سعادت ایشان را خواستارم.

باشد که این خردترین، بخشی از زحمات آنان را سپاس گوید.

فهرست مطالب

لیست تصاویر

چکیده:

فرایند پرش و برخی از کاربردهای آن در ریاضیات مالی

سمیه فلاح لیچایی

در این پایان‌نامه ضمن معرفی فرایند پرش، کاربرد این نوع فرایند را در مدل‌سازی مالی بیان می‌کنیم. هم‌چنین تابع خاصی به‌نام Hh را معرفی کرده و با استفاده از این تابع، مجموع توزیع‌های نرمال و نمایی مضاعف را محاسبه خواهیم کرد. در پایان نیز روشی برای قیمت‌گذاری اختیارات اروپایی و آمریکایی بر اساس این مدل را مطالعه خواهیم کرد.

کلید واژه:
اختیار معامله، فرایندهای پرش، قیمت‌گذاری اختیار، توزیع نمایی مضاعف.

Abstract:

Jump process and some of its applications in financial mathematics

Somayeh Fallah Lichaii

In this disertation, by introducing jump process, we describe application of this kind of process in financial modeling. Also, we propose a special function, namely Hh function, and by using this function, we calculate the total distributions of normal and double exponential. Finally, we will study European and American option pricing based on this model.

Key words:

Option, Jump process, Option pricing, Double exponential distribution.

مقدمه

قیمت‌گذاری اوراق مشتقه از مباحث اساسی مطرح در ریاضیات مالی است و متخصصان زیادی در این زمینه فعالیت می‌کنند. یکی از حیطه‌های فعالیت آنان تعیین مدل برای قیمت اختیار معامله است. از آنجا که اختیار معامله بر روی دارایی تعریف می‌شود پس قیمت اختیار از قیمت آن دارایی خاص نتیجه می‌شود. بنابراین لازمه‌ی قیمت‌گذاری اختیار، قیمت‌گذاری دارایی پایه‌ی آن است. در سال ۱۹۷۳ بلک، شولز و مرتون[۱] با ارائه تئوری قیمت گذاری اختیار معامله بر پایه معادله دیفرانسیل تصادفی حرکت براونی هندسی انقلابی در این زمینه بوجود آوردند. بر اساس این مدل قیمت سهام در یک بازار سهام دارای توزیع احتمال لگ نرمال می‌باشد. فرض اساسی در مدل بلک شولز این است که قیمت دارایی از یک حرکت براونی هندسی با یک مقدار ثابت تلاطم پیروی می‌کند. اما داده های به‌دست آمده از بازار سرمایه نشان داده است که این مقدار نسبت به قیمت توافقی و زمان سررسید متغیر است. همچنین داده های تجربی نشان داده است که لگاریتم بازده قیمت سهام نرمال نیست بلکه دارای دم سنگین‌تر و کشیدگی بیشتری نسبت به توزیع نرمال است. لذا باید به نحوی قیمت گذاری اختیار معامله صورت گیرد تا با تلاطم ضمنی و لگاریتم بازده بازار مالی سازگار باشد. یک راه کار برای حل این مشکل استفاده از مدل‌های انتشار–پرش است. مرتون در سال ۱۹۷۶ پرش‌های پواسن را به فرایند حرکت براونی استاندارد اضافه نمود و اولین مدل انتشار–پرش را برای قیمت‌گذاری مشتقات مالی ارائه داد. مدل ارائه داده شده توسط مرتون شامل دو بخش است، یک بخش انتشار که یک حرکت براونی[۲] با رانش خطی است و تغییرات نرمال را منعکس می‌نماید و یک بخش فرایند پواسن مرکب که قادر است تغییرات ناگهانی و غیرمنتظره‌ای که بر اساس شرایط خاص در قیمت دارایی به‌وجود می‌آید، را منعکس نماید. کو[۳] نیز این مدل را بر اساس توزیع نمایی مضاعف بیان می‌کند. در این پایان‌نامه، ابتدا به بررسی مدل‌های انتشار–پرش می‌پردازیم، سپس مدل ارائه شده توسط کو را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

این پایان‌نامه شامل سه فصل است:

- در فصل اول ساختار فرایندهای پرشی را مورد مطالعه قرار می‌دهیم و به بررسی قیمت‌گذاری تحت مدل پرش خواهیم پرداخت.

---

[۱] Black-Scholes-Merton

[۲] Brownian motion

[۳] Kou

- در فصل دوم به معرفی تابع Hh می‌پردازیم و استفاده از این تابع در قیمت‌گذاری را مورد بررسی قرار می‌دهیم.
- در فصل سوم قیمت‌گذاری اختیارات اروپایی و آمریکایی را تحت مدل نمایی مضاعف مورد مطالعه قرار می‌دهیم و با کمک نرم‌افزار mathematica به بیان نتایجی توصیفی از قیمت‌گذاری اختیارات خواهیم پرداخت.

فصل ۱

فرایند پرش

□□□□□. □□□□□ □□ □□□□ □□ □□□□□□□ □ □□□□ □□ □□□□□□□□□، □ □□

در این بخش نگاهی کلی به فرایندهای انتشار پرش خواهیم داشت که در آن بخش انتشار به این امر اشاره دارد که این فرایندها می‌توانند دارای مولفه‌ی حرکت براونی باشند و هم‌چنین مسیرهای این فرایند دارای پرش‌هایی نیز هستند. در ادامه ضمن مطالعه‌ی ساختار فرایند پرش به بررسی قیمت‌گذاری تحت مدل پرش خواهیم پرداخت.

۱-۱ ساختار فرایند پرش

دستگاهی را که کارش در زمان 0 از وضعیت n_0 شروع می‌شود در نظر بگیرید. فرض می‌کنیم که دستگاه تا زمان مثبتی مانند X_1 در وضعیت n_0 می‌ماند و در این زمان به وضعیت جدید $n_1 \neq n_0$ می‌جهد. ما این امکان را می‌دهیم که دستگاه برای همیشه در وضعیت n_0 باقی بماند، که در این حالت قرار می‌دهیم $X_1 = \infty$. اگر X_1 متناهی باشد، دستگاه به محض رسیدن به n_1 تا زمانی مانند $X_2 > X_1$ در آن‌جا می‌ماند و در این زمان به وضعیت $n_2 \neq n_1$ می‌جهد. اگر دستگاه هرگز n_1 را ترک نکند، قرار می‌دهیم $X_2 = \infty$. این شیوه به‌طور نامحدود تکرار می‌شود. اگر $X_m = \infty$، برای $n > m$ قرار می‌دهیم $X_n = \infty$.

فرض کنیم $N(t)$ وضعیت دستگاه را در زمان t نمایش دهد، که به‌صورت زیر تعریف شده است

$$N(t) = \begin{cases} n_0, & 0 \leq t < X_1, \\ n_1, & X_1 \leq t < X_2, \\ n_2, & X_2 \leq t < X_3, \\ \vdots \end{cases} \tag{1-1}$$

فرایندی که به وسیله‌ی (۱-۱) تعریف می‌شود را فرایند پرش گوییم. اساس همه‌ی فرایندهای پرشی فرایند پواسن است. در ادامه به بیان کلیات در مورد این فرایند خواهیم پرداخت.

تعریف ۱-۱-۱. یک فرایند تصادفی $\{X(t),\ t \in T\}$ خانواده‌ای از متغیرهای تصادفی است. یعنی، به ازای هر $t \in T$، $X(t)$ یک متغیر تصادفی است. مجموعه‌ی اندیس‌گذار T را معمولا زمان در نظر گرفته و $X(t)$ را حالت فرایند در زمان t می‌نامیم. اگر مجموعه‌ی اندیس‌گذار T شمارا باشد، فرایند را زمان گسسته و اگر T پیوسته باشد فرایند را زمان پیوسته می‌نامیم. مقادیری که متغیر تصادفی $X(t)$ اختیار می‌کند را فضای حالات گویند و این فضا می‌تواند گسسته یا پیوسته باشد.

گوییم فرایند دارای نمو مستقل است، هرگاه به ازای هر دنباله از اندیس‌ها مانند $t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n$، متغیرهای تصادفی $X(t_1) - X(t_0), X(t_2) - X(t_1), \cdots, X(t_n) - X(t_n - 1)$ مستقل از هم باشند. هم‌چنین گوییم فرایند دارای نمو ایستا است اگر توزیع $X(t) - X(s)$ به ازای هر $t > s$ از T به $t - s$ بستگی داشته باشد.

تعریف ۱-۱-۲. فرایند تصادفی $\{N(t),\ t \geq 0\}$ را فرایند شمارشی گوییم، هرگاه $N(t)$ تعداد کل پیشامدهایی

باشد که تا زمان t رخ داده‌اند. بنابراین فرایند شمارشی دارای ویژگی‌های زیر است

الف) $N(t) \geq 0$.

ب) به ازای هر $s < t$، $N(s) \leq N(t)$.

ت) برای $s < t$، $N(t) - N(s)$ برابر تعداد پیشامدهایی است که در فاصله‌ی $(s, t]$ رخ داده‌اند.

تعریف ۱-۱-۳. در نظریه‌ی احتمالات یک مارتینگل مدلی از یک بازی منصفانه است که در آن اطلاعات گذشته در پیش‌بینی آینده تاثیرگذار نیستند. به‌عبارت دیگر یک مارتینگل یک فرایند تصادفی است که در هر لحظه، امید ریاضی مقدار بعدی برابر با مقدار مشاهده شده‌ی کنونی است.
به‌طور دقیق‌تر اینکه یک فرایند تصادفی یک مارتینگل است، اگر در شرایط زیر صدق کند

الف) $\mathbb{E}[|X_n|] < \infty$

ب) $\mathbb{E}[X_{n+1} \mid X_1, X_2, \cdots, X_n] = X_n$.

تعریف ۱-۱-۴. فرایند شمارشی $\{N(t),\ t \geq 0\}$ را یک فرایند پواسن با نرخ $\lambda > 0$ گوییم، هرگاه

الف) $N(0) = 0$.

ب) فرایند دارای نموهای مستقل باشد.

ت) تعداد پیشامدها در هر فاصله‌ی دلخواه به‌طول t دارای توزیع پواسن با میانگین λt باشد $(\mathbb{E}[N(t)] = \lambda t)$.
این مطلب به این معنی است که فرایند پواسن دارای نموهای ایستا است، یعنی به ازای هر $s, t \geq 0$

$$\mathbb{P}\big(N(t+s) - N(s) = n\big) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}\ , \quad n = 0, 1, 2, \cdots .$$

پس برای اثبات پواسن بودن یک فرایند شمارشی، باید شرایط سه‌گانه‌ی فوق را بررسی نمود. می‌توان از تعریف زیر نیز برای فرایند پواسن استفاده نمود. این دو تعریف معادل یکدیگر هستند.

تعریف ۱-۱-۵. فرایند شمارشی $\{N(t),\ t \geq 0\}$ را یک فرایند پواسن با نرخ $\lambda > 0$ گوییم، هرگاه

الف) $N(0) = 0$.

ب) فرایند دارای نموهای مستقل و ایستا باشد.

ت) $\mathbb{P}(N(\delta) = 1) = \lambda\delta + o(\delta)$.

ث) $\mathbb{P}(N(\delta) \geq ۲) = o(\delta)$

$o(\delta)$ تابعی از δ است به‌طوری‌که

$$\lim_{\delta\to ۰} \frac{o(\delta)}{\delta} = ۰.$$

این خاصیت بیانگر این است که در یک فاصله‌ی زمانی کوچک حداکثر یک پیشامد رخ می‌دهد، یعنی این فرایند بر وقوع پیشامدهای کمیاب تاکید دارد.

تعریف ۱-۱-۶. فرض کنیم در یک فرایند پواسن $X_۱$ زمان انتظار تا وقوع اولین پیشامد باشد، و به ازای $n \geq ۱$، X_n زمان انتظار بین $(n-۱)$–امین و n–امین پیشامد باشد. در این‌صورت دنباله‌ی $\{X_n,\ n \geq ۱\}$ را دنباله‌ی زمان‌های بین ورود می‌نامند.

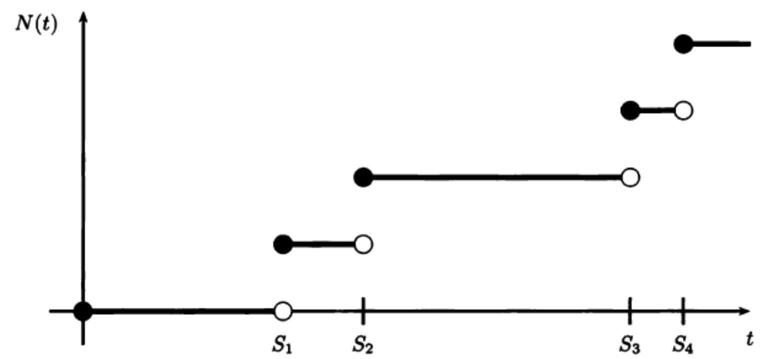
قضیه ۱-۱-۷. فرض کنیم دنباله‌ی $\{X_n,\ n \geq ۱\}$، دنباله‌ی زمان‌های بین ورود باشد، آن‌گاه X_n ها، $n = ۱, ۲, \ldots$، متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع با توزیع نمایی هستند و میانگین $\frac{۱}{\lambda}$ دارند.

برهان. [۵]. □

نتیجه ۱-۱-۸. اگر فرایند $\{X_n,\ n \geq ۱\}$، فرایند زمان‌های بین ورود در یک فرایند پواسن باشد و به ازای $n \geq ۱$، $S_n = \sum_{i=۱}^{n} X_i$ زمان انتظار تا وقوع n–امین پیشامد باشد، آن‌گاه S_n دارای توزیع گاما با پارامترهای n و λ است و چگالی آن عبارت است از

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-۱}}{(n-۱)!}, \quad t \geq ۰.$$

در شکل (۱-۱) مسیری از یک فرایند پواسن را خواهیم دید.

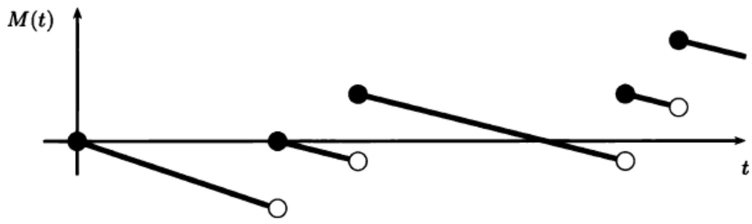


شکل ۱-۱: مسیری از یک فرایند پواسن

تعریف ۱-۱-۹. فرض کنیم $N = \{N(t),\ t \geq ۰\}$ یک فرایند پواسن با نرخ $\lambda > ۰$ باشد. فرایند

$$M = \{M(t),\ t \geq ۰\}$$

را فرایند پواسن جبران شده گوییم، هرگاه $M(t) = N(t) - \lambda t$. در شکل (۱-۲) مسیری از یک فرایند پواسن جبران شده را خواهیم دید.



شکل ۱-۲: مسیری از یک فرایند پواسن جبران شده

قضیه ۱-۱-۱۰. فرایند پواسن جبران شده یک مارتینگل است.

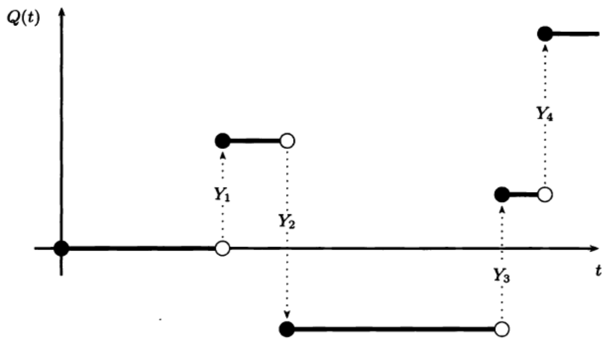
برهان. [۶]. □

چون اندازه‌ی پرش‌ها در فرایند پواسن ثابت (یک) است، این فرایند برای توسعه‌ی مدل‌های قیمت‌گذاری بسیار محدود است. برای مدل‌های بازارهای مالی باید اندازه‌ی پرش تصادفی باشد، لذا پرش‌هایی با اندازه‌های تصادفی تولید می‌کنیم.

تعریف ۱-۱-۱۱. فرایند تصادفی $\{Q(t),\ t \geq \circ\}$ را فرایند پواسن مرکب گوییم هرگاه به ازای هر $t \geq \circ$،

$$Q(t) = \sum_{i=۱}^{N(t)} Y_i,$$

که در آن $\{Y_i,\ i = ۱, ۲, \cdots\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل هم‌توزیع با میانگین $\beta = \mathbb{E}Y_i$ است. جملات دنباله از فرایند پواسن $N(t)$ مستقل هستند [۵]. در شکل (۱-۳) مسیری از این فرایند را می‌بینیم.



شکل ۱-۳: مسیری از یک فرایند پواسن مرکب

مشابه فرایند پواسن ساده، نموهای فرایند پواسن مرکب مستقل و ایستا هستند. میانگین نموهای فرایند پواسن مرکب به ازای $\circ \leq s < t$ به‌صورت زیر است [۶]

$$\mathbb{E}[Q(t) - Q(s)] = \beta\lambda(t - s).$$

تعریف ۱-۱-۱۲. فرض کنیم $Q = \{Q(t),\ t \geq 0\}$ فرایند پواسن مرکب باشد. آنگاه فرایند پواسن مرکب جبران شده به‌صورت $\{Q(t) - \beta\lambda t,\ t \geq 0\}$ تعریف می‌شود.

قضیه ۱-۱-۱۳. فرایند پواسن مرکب جبران شده یک مارتینگل است.

برهان. [۶]. $\square$

قضیه ۱-۱-۱۴. فرض کنیم $y_1, \cdots, y_M$ یک دسته‌ی متناهی از اعداد ناصفر باشد و $p(y_1), \cdots, p(y_M)$ یک دسته‌ی متناهی از اعداد مثبت باشد که مجموع آنها یک است. فرض کنیم $\lambda > 0$ و $\bar{N}_1, \bar{N}_2, \cdots, \bar{N}_M$ فرایندهای پواسن مستقل باشند که هر $\bar{N}_m(t)$ دارای نرخ $\lambda p(y_m)$ است. هم‌چنین فرض کنیم

$$\bar{Q}(t) = \sum_{m=1}^{M} y_m \bar{N}_m(t), \quad t \geq 0,$$

در این‌صورت $\bar{Q} = \{\bar{Q}(t), t \geq 0\}$ یک فرایند پواسن مرکب است. علاوه بر این اگر $\bar{Y}_i$ اندازه‌ی i–امین پرش $\bar{Q}$ و هم‌چنین

$$\bar{N}(t) = \sum_{m=1}^{M} \bar{N}_m(t), \quad t \geq 0,$$

تعداد کل پرش‌ها در بازه‌ی زمانی $[0, t]$ باشد، آن‌گاه $\bar{N}$ فرایند پواسن با نرخ λ است، متغیرهای تصادفی $\bar{Y}_1, \bar{Y}_2, \cdots$ مستقل‌اند و $\mathbb{P}\{\bar{Y}_i = y_m\} = p(y_m)$، $m = 1, \cdots, M$، متغیرهای تصادفی $\bar{Y}_1, \cdots, \bar{Y}_M$ برای هر $t \geq 0$ مستقل از $\bar{N}(t)$ هستند و

$$\bar{Q}(t) = \sum_{i=0}^{\bar{N}(t)} \bar{Y}_i, \quad t \geq 0.$$

برهان. [۶]. $\square$

لم ۱-۱-۱۵. فرض کنیم $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ یک فضای احتمال و $\mathcal{G}$ یک زیر σ-جبر از $\mathcal{F}$ باشد. فرض کنیم متغیرهای تصادفی $X_1, \cdots, X_K$، $\mathcal{G}$-اندازه‌پذیر، $Y_1, \cdots, Y_L$ متغیرهای تصادفی مستقل از $\mathcal{G}$ و $f(x_1, \cdots, x_K, y_1, \cdots, y_L)$ یک تابع از متغیرهای تصنعی $x_1, \cdots, x_K$ و $y_1, \cdots, y_L$ باشند. تعریف می‌کنیم

$$g(x_1, \cdots, x_K) = \mathbb{E} f(x_1, \cdots, x_K, Y_1, \cdots, Y_L),$$

در این‌صورت داریم [۶]

$$\mathbb{E}\big[f(X_1, \cdots, X_K, Y_1, \cdots, Y_L)\big|\mathcal{G}\big] = g(X_1, \cdots, X_K).$$

۱-۲ حسابان فرایند پرش

می‌خواهیم انتگرال تصادفی

$$\int_{\circ}^{t} \Phi(s)\,\mathrm{d}X(s),$$

را که در آن انتگرال‌گیر X می‌تواند پرش‌هایی هم داشته باشد را محاسبه کنیم [۶].

فرض کنیم $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F})$ یک فضای احتمال باشد و $\omega \in \Omega$. حرکت براونی یک فرایند تصادفی $\{W(t),\ t \geq \circ\}$ با خواص زیر است [۵]

الف) برای $t \geq \circ$، $W(t)$ یک تابع پیوسته وابسته به ω است که $W(\circ) = \circ$.

ب) به‌ازای زمان‌های $\circ = t_{\circ} < t_{۱} < t_{۲} < \cdots < t_n = T$ نموهای

$$W(t_۱) - W(t_{\circ}), W(t_۲) - W(t_۱), \cdots, W(t_n) - W(t_{n-۱})$$

مستقل از یکدیگرند.

پ) به‌ازای زمان‌های $\circ = t_{\circ} < t_{۱} < t_{۲} < \cdots < t_n = T$ نموهای

$$W(t_۱) - W(t_{\circ}), W(t_۲) - W(t_۱), \cdots, W(t_n) - W(t_{n-۱})$$

دارای توزیع نرمال با میانگین و واریانس زیر هستند

$$\mathbb{E}[W(t_{i+۱}) - W(t_i)] = \circ,$$
$$Var[W(t_{i+۱}) - W(t_i)] = t_{i+۱} - t_i.$$

تعریف ۱-۲-۱. فرض کنیم $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ یک فضای احتمال و $\Delta = \{\Delta(t),\ t \geq \circ\}$ یک فرایند تصادفی تعریف شده روی این فضا باشد. یک پالایه برای فرایند Δ به‌صورت خانواده $\sigma-$جبرهای $\{\mathcal{F}(t),\ t \geq \circ\}$ تعریف می‌شود که در شرایط زیر صدق می‌کند

الف) **انباشتگی اطلاعات.** به ازای $\circ \leq s < t$، هر مجموعه در $\mathcal{F}(s)$، در $\mathcal{F}(t)$ نیز باشد.

ب) **سازگاری.** به ازای هر $t \geq \circ$، فرایند در لحظه‌ی t، $\Delta(t)$، $\mathcal{F}(t)-$اندازه‌پذیر باشد.

پ) **استقلال نموهای بعد.** به ازای $\circ \leq t < u$، نمو $\Delta(u) - \Delta(t)$ مستقل از $\mathcal{F}(t)$ است.

اگر به ازای هر $t \geq \circ$، متغیر تصادفی $\Delta(t)$، $\mathcal{F}(t)-$اندازه‌پذیر باشد، آن‌گاه فرایند Δ با پالایه‌ی $\mathcal{F}(t)$ سازگار است.

فرض کنیم $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ یک فضای احتمال با پالایه $\{\mathcal{F}(t),\ t \geq 0\}$ باشد که همه‌ی فرایندهایی که در ادامه با آن‌ها کار خواهیم کرد با این پالایه سازگارند. فرم اصلی فرایند پرش به‌صورت زیر است

$$X(t) = X(0) + I(t) + R(t) + J(t),$$

که در آن $X(0)$ یک شرط اولیه غیرتصادفی است. فرایند

$$I(t) = \int_0^t \Gamma(s)\, \mathrm{d}W(s),$$

انتگرال ایتوی فرایند سازگار $\Gamma(s)$ نسبت به یک حرکت براونی است. هم‌چنین فرایند

$$R(t) = \int_0^t \Theta(s)\, \mathrm{d}s,$$

انتگرال ریمان فرایند سازگار $\Theta(t)$ است. بخش پیوسته‌ی $X(t)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$X^c(t) = X(0) + I(t) + R(t) = X(0) + \int_0^t \Gamma(s)\, \mathrm{d}W(s) + \int_0^t \Theta(s)\, \mathrm{d}s.$$

تغییرات درجه دوم این فرایند عبارت است از

$$[X^c, X^c] = \int_0^t \Gamma^2(s)\, \mathrm{d}s,$$

که فرم دیفرانسیلی آن به‌صورت زیر است

$$dX^c(t)dX^c(t) = \Gamma^2(t)dt.$$

هم‌چنین، $J(t)$ بخش پرش است که یک فرایند تصادفی از راست پیوسته و سازگار است. پیوستگی چپ این فرایند با نماد $J(t-)$ نشان داده می‌شود. اگر J در لحظه‌ی t پرش داشته باشد، $J(t)$ مقدار J بعد از پرش و $J(t-)$ مقدار آن قبل از پرش است. فرض این است که J در لحظه‌ی صفر پرش ندارد و تنها تعداد متناهی پرش در بازه‌ی زمانی $[0, T]$ دارد و در فاصله‌ی بین پرش‌ها ثابت است. ثابت بودن بین پرش‌ها عاملی است که براساس آن $J(t)$ را فرایند پرش محض نامند. فرایند پواسن و فرایند پواسن مرکب دارای این خاصیت هستند اما فرایند پواسن جبران شده این چنین نیست، زیرا این فرایند بین پرش‌ها کاهش می‌یابد. چون $I(t)$ و $R(t)$ از راست پیوسته هستند، پیوستگی چپ $X(t)$ عبارت است از

$$X(t-) = X(0) + I(t) + R(t) + J(t-),$$

هم‌چنین اندازه پرش X در لحظه‌ی t به‌صورت زیر است

$$\Delta X(t) = X(t) - X(t-).$$

اگر X در t پیوسته باشد آنگاه $\Delta X(t) = 0$. اگر X یک پرش در لحظه‌ی t داشته باشد آنگاه $\Delta X(t)$ اندازه‌ی پرش آن است و $\Delta J(t) = J(t) - J(t-)$ اندازه‌ی پرش در J است [۶].