بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه پیام نور
دانشکده علوم
گروه آمار

عنوان پایان‌نامه:

برآورد پارامترهای توزیع نمایی تعمیم یافته

نگارش:
بهروز رحمتی تازه

استاد راهنما:
دکتر پرویز نصیری

استاد مشاور:
دکتر علی شادرخ

پایان نامه
برای دریافت درجه کارشناسی ارشد
در رشته آمارریاضی

دی ماه ۱۳۸۷

دانشگاه پیام نور

دانشکده علوم

گروه آمار

عنوان پایان‌نامه:

برآورد پارامترهای توزیع نمایی تعمیم یافته

نگارش:

بهروز رحمتی تازه

استاد راهنما:

دکتر پرویز نصیری

استاد مشاور:

دکتر علی شادرخ

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته آمارریاضی

دی ماه ۱۳۸۷

تاریخ ....
شماره ....
پیوست ....

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم تحقیقات و فناوری

دانشگاه پیام‌نور
دانشگاه جامع پیام‌نور استان تهران

((تصویب نامه))

پایان نامه تحت عنوان :

"برآورد پارامترهای توزیع نمایی تعمیم یافته"

تاریخ دفاع : **87/9/11** ساعت : **13:30-14:30**

نمره : ۱۸/۵ هیجده‌ونیم ذرجه : عالی

اعضای هیات داوران مرتبه علمی امضاء

1-آقای دکتر پرویز نصیری(استاد راهنما)
2-آقای دکتر شادرخ(استادمشاورونماینده گروه)
3-آقای دکتر یارمحمدی (استاد داور داخلی)
4-آقای دکتر گنجعلی(استاد داور خارجی)

تهران خیابان انقلاب
خیابان استاد نجات‌الهی
نبش خیابان سپند پلاک ۲۳۳
تلفن: ۸۸۸۰۱۰۹۰
دورنگار ۸۸۹۰۳۱۵۸
پست الکترونیکی
info@Tehran.pnu.ac.ir
نشانی الکترونیکی
http://www. Tehran. Pnu. ac.ir

تقدیم به آنانی که دشواری آموختن را برایم آسان نمودند.

سپاسگزار خالق هستی‌ام، که به من توان تلاش در جهت کسب دانش عطا نمود و رهین منت هستی بخشان وارسته‌ای هستم، که مهرشان بی‌دریغ نثارم شد.

و تا ابد سپاسگزار مهربانی و همراهی خانواده عزیزم خواهم بود.

خدا را شاکرم که در مسیر پرفراز و نشیب دانش‌اندوزی از راهنمایی راهنمایان بیدار دل، توشه اندوختم. از استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر نصیری بخاطر راهنمایی‌ها و هدایت‌های همه جانبه و حسن توجه‌شان در تمامی مراحل انجام این تحقیق صمیمانه تشکر می‌کنم که در طی این دوره هر چه آموختم، حاصل رهنمودها و درس‌های ایشان بود.

از همه اساتید بزرگوارم در دانشگاه پیام نور نهایت تشکر را دارم و امیدوارم حق شاگردی را بجا آورده باشم.

در پایان از کمک‌های صمیمانه دوستان خوبم و جمیع کارمندان دانشگاه پیام نور برای همدلی، همکاری و مساعدتشان در طول انجام این پایان‌نامه سپاسگزارم.

با ژرف‌ترین سپاس‌ها

بهروز رحمتی

دی ۸۷

نام خانوادگی دانشجو : رحمتی تازه **نام** : بهروز

عنوان پایان نامه: برآورد پارامترهای توزیع نمایی تعمیم یافته

استاد راهنما : دکتر پرویز نصیری

استاد مشاور : دکتر علی شادرخ

مقطع تحصیلی : کارشناسی ارشد **رشته** : آمار **گرایش** : ریاضی **دانشگاه** : پیام نور تهران

دانشکده : علوم **تاریخ فارغ‌التحصیلی** : دی ماه ۱۳۸۷ **تعداد صفحه** : ۸۷

کلید واژه ها : توزیع نمایی تعمیم یافته، برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی، برآوردگرهای بیز، برآوردگرهای به روش گشتاوری، برآوردگرهای کمترین مربعات، برآوردگرهای کمترین مربعات وزنی، برآوردگرهای صدکی، ماتریس اطلاع فیشر

چکیده : در سالهای اخیر یک توزیع جدید با نام توزیع نمایی تعمیم یافته معرفی شده و به طور وسیع مورد مطالعه قرار گرفته است. توزیع نمایی تعمیم یافته مانند توزیع گاما و وایبل دارای دو پارامتر(شکل و مقیاس) است. نشان داده شده است که بسیاری از ویژگی‌های این توزیع شبیه توزیع گاما و وایبل است، بنابراین، توزیع نمایی تعمیم یافته را می‌توان به عنوان جایگزینی برای توزیع‌های گاما و وایبل به کار برد. پیدایش این مدل، ویژگی‌های مختلف، نزدیکی آن با توزیع گاما و وایبل، روش‌های مختلف برآورد و ویژگی‌های آنها، در این پایان نامه بحث خواهد شد.

فهرست مطالب

عنوان..**صفحه**

عنوان..**صفحه**

فصل اول

مقدمه و دورنما

فصل اول

مقدمه و دورنما

۱-۱- پیدایش و تعریف

توزیع گاما و وایبل، توزیع‌های بسیار سودمندی برای تحلیل داده‌های طول عمر یا داده‌های چوله هستند و ویژگی‌های بسیار مطلوبی دارند. این توزیع‌ها همچنین تعبیرهای فیزیکی بسیار خوبی دارند. متاسفانه این دو توزیع دارای اشکال‌هایی هم بودند که این اشکلات باعث شد که محققان دنبال جایگزینی برای توابع گاما و وایبل باشند تا بتوان از آن برای تحلیل داده‌های طول عمر استفاده کرد.

یکی از تابع‌های توزیع تجمعی که در نیمه اول قرن نوزده به وسیله گومپرتز[1][۱۱] و ورهالست[2] [۵۵،۵۶] برای مقایسه جدول‌های مرگ و میر انسانی و نشان دادن رشد جمعیت به کار می‌رفت، به صورت زیر بود:

$$G(t) = (1-\rho e^{-t\lambda})^{\alpha}; \qquad t > \frac{1}{\lambda}\ln\rho \qquad (۱-۱-۱)$$

که α، ρ و λ پارامترهایی با مقادیر حقیقی مثبت هستند.

در سال ۱۹۶۷، اهوجا و نش[3] این توزیع را مورد بحث قرار داده و بیشتر آن را تعمیم دادند[۱]. همچنین مودهولکار و سریواستاوا[4] در سال ۱۹۹۳ توزیعی را با نام توزیع وایبل توان‌دار شده[5] معرفی کردند[۴۴]، در سال ۱۹۹۵ مودهولکار و همکاران توزیع وایبل توان‌دار شده را بررسی و نشان دادند که توزیع وایبل توان‌دار شده، که دارای سه پارامتر است، برازش بهتری نسبت به توزیع وایبل دو-پارامتری و توزیع نمایی یک پارامتری دارد [۴۵].

---

۱. Gomperts
۲. Verhulst
۳. Ahuja and Nash
۴. Modholkar and Srivastava
۵. Exponentiated Weibull distribution

همچنین توزیع وایبل مورد خاصی از کلاس کلی توزیع‌های نمایی که به وسیله گوپتا و همکاران با عنوان $F(t)=[G(t)]^{\alpha}$ پیشنهاد شد، است که در اینجا $G(t)$ تابع توزیع خطی کلی است[۱۷]. در سال ۱۹۹۹ گوپتا و کوندو[۱] [۱۵] توزیعی را با نام توزیع نمایی تعمیم یافته[۲] معرفی کردند که شکل آن به صورت زیر بود:

$$F(X;\alpha,\lambda,\mu)=(1-e^{-(x-\mu)/\lambda})^{\alpha}, \qquad x>\mu,\ \alpha>0,\lambda>0 \tag{۱-۱-۲}$$

بنابراین توزیع نمایی تعمیم یافته دارای تابع چگالی زیر است:

$$f(x;\alpha,\lambda,\mu)=\frac{\alpha}{\lambda}(1-e^{-(x-\mu)/\lambda})^{\alpha-1}e^{-(x-\mu)/\lambda}, \qquad x>\mu,\ \alpha>0,\lambda>0 \tag{۱-۱-۳}$$

که در اینجا α پارامتر شکل[۳]، λ پارامتر مقیاس[۴] و μ پارامتر مکان[۵] است. توزیع با نماد $GE(\alpha,\lambda,\mu)$ نشان داده می‌شود. گوپتا و کوندو ویژگی‌های مختلف این توزیع را مورد بحث و بررسی قرار دادند و آن را برای تحلیل داده‌های طول عمر به کار بردند و نشان دادند که در بعضی موارد نتیجه بهتری نسبت به استفاده از توزیع‌های گاما و وایبل دارد. تابع مولد گشتاورها را به دست آورده و امید ریاضی و واریانس این توزیع را محاسبه کردند. همچنین این توزیع را از نظر شکل و خصوصیات دیگر با توابع گاما و وایبل مقایسه کرده و نتایجی بدست آوردند. آنها همچنین توابع مخاطره و بقا را محاسبه و مورد بحث و بررسی قرار دادند.

در سال‌های اخیر توزیع نمایی تعمیم یافته مورد توجه قرار گرفته است و افراد زیادی این توزیع را از ابعاد گوناگون مورد بحث و بررسی قرار داده‌اند، که در این میان گوپتا و کوندو نقش عمده‌ای داشتند[۱۴،۱۵،۱۶،۱۷،۱۸،۱۹،۲۰،۲۱،۲۲،۲۳،۲۴،۲۵،۳۷] و... . البته افراد دیگری مانند راغب[۶] [۵۲،۵۳]، راغب و مادی[۷] [۵۰]، زنگ[۸] [۵۷] نیز مطالعاتی درباره توزیع نمایی تعمیم یافته داشته‌اند.

۱ . Gupta and Kundu
۲ . Generalized Exponential Distribution
۳ . Shape
۴ . Scale
۵. Location
۶. Raqab
۷. Madi
۸. Zheng

برای سادگی و راحتی محاسبات، تمام افرادی که در مورد این توزیع کار کرده‌اند پارامتر مکان را مساوی صفر قرار داده‌اند ($\mu = 0$) و فرمول توزیع نمایی تعمیم یافته را به صورت زیر بیان می کنند:

$$F(x;\alpha,\lambda) = (1-e^{-\lambda x})^{\alpha}; \qquad \alpha,\lambda,x>0 \tag{۱-۱-۴}$$

همان طور که از فرمول (۱-۱-۴) مشخص است توزیع نمایی تعمیم یافته نوع خاصی از توزیع گومپرتز است، یعنی در فرمول (۱-۱-۱)، ρ را مساوی یک قرار دهیم. وقتی که $\alpha = 1$ و $\mu = 0$ باشد توزیع نمایی تعمیم یافته با توزیع نمایی معمول یکی می‌شود.

نکته: در این پایان‌نامه هر جا که از توزیع نمایی تعمیم یافته نام برده می‌شود، منظور همان فرمول (۱-۱-۴) است.

توزیع نمایی تعمیم یافته تعبیرهای فیزیکی خوبی هم دارد. اگر یک سیستم موازی وجود داشته باشد که از n مؤلفه تشکیل شده است، یعنی سیستم وقتی کار می‌کند که حداقل یکی از مؤلفه‌ها کار کند، و توزیع طول عمر هر یک از مؤلفه‌ها متغیر تصادفی($i.i.d.$) نمایی باشند آنگاه توزیع طول عمر سیستم، نمایی تعمیم یافته خواهد بود.

تولید متغیر تصادفی نمایی تعمیم یافته به خاطر شکل تابع توزیع آن، راحت است. اگر U متغیر تصادفی یکنواخت در [0,1] باشد، آنگاه $X = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-U^{1/\alpha})$ دارای توزیع نمایی تعمیم یافته خواهد بود.

۱-۲- توزیع گاما

یکی از توزیع‌هایی که کاربرد زیادی دارد، توزیع گاما است. تابع چگالی متغیر تصادفی گاما با پارامتر شکل β و پارامتر مقیاس θ به صورت زیر است:

$$f(x;\beta,\theta) = \frac{\theta^{\beta}}{\Gamma(\beta)} x^{\beta-1} e^{-\theta x}; \qquad x,\beta,\theta>0 \tag{۱-۲-۱}$$

که با $GA(\beta,\theta)$ نشان داده می‌شود. اگر $\beta = 1$ باشد، این توزیع با توزیع نمایی معمول یکی می‌شود.

۱-۳- توزیع وایبل

یکی دیگر از توزیع‌هایی که کاربرد زیادی دارد، توزیع وایبل است. تابع چگالی متغیر تصادفی وایبل با پارامتر شکل β و پارامتر مقیاس θ به صورت زیر است:

$$f_{WE}(x;\beta,\theta) = \beta\theta^{\beta}x^{\beta-1}e^{-(x\theta)^{\beta}}$$

که با $WE(\beta,\theta)$ نشان داده می‌شود. اگر $\beta = 1$ باشد، این توزیع با توزیع نمایی معمول یکی می‌شود.

۱-۴- دورنمای بقیه فصل ها

در فصل دوم، در بخش اول مطالبی در رابطه با توزیع نمایی تعمیم یافته ارائه خواهد شد و شکل تابع چگالی به ازای مقادیر مختلف α رسم و درباره آن بحث خواهد شد. همچنین تابع مخاطره را به دست آورده و شکل آن را رسم خواهیم کرد. در بخش دوم، تابع مولد گشتاورهای توزیع نمایی تعمیم یافته را به دست آورده و امید ریاضی و واریانس آن با استفاده از تابع مولد گشتاورها محاسبه خواهد شد و همچنین مطالبی در رابطه با آماره‌های مرتب ارائه خواهد شد. در بخش سوم، توزیع مجموع متغیرهای تصادفی نمایی تعمیم یافته را با استفاده از تبدیلی از توزیع بتا به دست آورده و مطالبی در این مورد ارائه خواهد شد. ارتباط تابع توزیع نمایی تعمیم یافته با توابع گاما و وایبل در بخش چهارم بحث خواهد شد و مطالبی در ارتباط با مزایا و معایب استفاده از توزیع‌های گاما و وایبل ارائه خواهد شد و توابع مخاطره توابع گاما، وایبل و توزیع نمایی تعمیم یافته با هم مقایسه خواهد شد. در بخش پنجم، با استفاده از نسبت درستنمایی‌های ماکزیمم شده روشی برای تشخیص اینکه یک مجموعه داده از توزیع نمایی تعمیم یافته است یا توزیع وایبل، ارائه خواهد شد. در بخش ششم، با استفاده از نسبت درستنمایی‌های ماکزیمم شده روشی برای تشخیص اینکه یک مجموعه داده از توزیع نمایی تعمیم یافته است یا توزیع گاما، ارائه خواهد شد.

در فصل سوم، مطالبی در رابطه با روش‌های مختلف برآورد پارامترهای توزیع نمایی تعمیم یافته ارائه خواهد شد که در اینجا آنها را بیان می کنیم. دربخش اول، برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی پارامترهای نامعلوم توزیع نمایی تعمیم یافته را به دست خواهیم آورد و همچنین ماتریس اطلاع فیشر را محاسبه خواهیم کرد. در بخش دوم، پارامترهای نامعلوم را به روش گشتاورها برآورد خواهیم کرد و مطالبی در رابطه با توزیع مجانبی این برآوردگرها ارائه خواهد شد. در بخش سوم، پارامترهای نامعلوم را بر اساس چندک‌ها برآورد خواهیم کرد. در بخش چهارم، پارامترهای نامعلوم توزیع نمایی تعمیم یافته با استفاده از روش کمترین مربعات و روش کمترین مربعات وزنی برآورد خواهند شد. در بخش پنجم، پارامترهای نامعلوم براساس ترکیب خطی از آماره های مرتب برآورد خواهند شد. در بخش ششم، با استفاده از مقادیر عددی، برآوردگرها را براساس خطای مربعات میانگین و برای مقادیر مختلف نمونه مقایسه می‌کنیم. در بخش هفتم، برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی را وقتی که داده‌ها از چپ سانسور شده‌اند، بررسی می‌کنیم و ماتریس اطلاع فیشر را در این حالت محاسبه می‌کنیم. در بخش هشتم، پارامترهای نامعلوم توزیع نمایی تعمیم یافته را به روش بیز، با استفاده از ایده لیندلی، برآورد می‌کنیم. در بخش نهم، برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی پارامترهای توزیع نمایی تعمیم یافته بریده شده از راست را بدست خواهیم آورد و ماتریس اطلاع فیشر را نیز محاسبه می‌کنیم. در بخش دهم، برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی پارامترهای توزیع نمایی تعمیم یافته بریده شده از چپ را بدست خواهیم آورد و ماتریس اطلاع فیشر را نیز محاسبه می‌کنیم.

فصل دوم

توزیع نمایی تعمیم یافته

فصل دوم

توزیع نمایی تعمیم یافته

در این فصل درباره ویژگی‌های توزیع نمایی تعمیم یافته بحث می‌کنیم. توزیع گاما و وایبل دو پارامتری، توزیع‌های بسیار سودمندی برای تحلیل داده‌های عمر هستند. توزیع نمایی تعمیم یافته مثل توزیع وایبل و گاما دارای دو پارامتر (شکل و مقیاس) است. بسیاری از ویژگی‌های این توزیع خیلی شبیه به ویژگی‌های توزیع گاما و وایبل است. توزیع نمایی تعمیم یافته می‌تواند به طور مؤثر برای تحلیل داده‌های عمر به جای توزیع گاما و وایبل مورد استفاده قرار گیرد. در این فصل توزیع نمایی تعمیم یافته را بررسی و ویژگی‌های مختلف این توزیع را مورد بحث و بررسی قرار داده و با ویژگی‌های توزیع گاما و وایبل مقایسه می‌کنیم. تابع مولد گشتاورها، میانگین و واریانس توزیع نمایی تعمیم یافته را بدست می‌آوریم. همچنین روش‌های تشخیص این توزیع را از توزیع‌های گاما و وایبل براساس روش نسبت درستنمایی ماکسیمم شده ارائه می‌دهیم.

۲-۱- نکاتی درباره توزیع نمایی تعمیم یافته

متغیر تصادفی X دارای توزیع نمایی تعمیم یافته است اگر تابع توزیع آن به صورت زیر باشد:

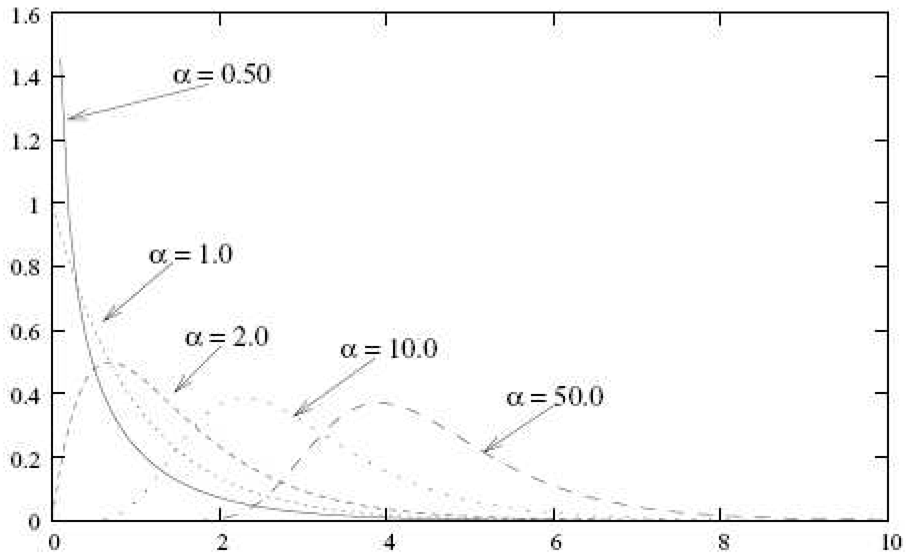
$$F(x;\alpha,\lambda)=(1-e^{-\lambda x})^{\alpha}; \qquad \alpha,\lambda,x>0 \tag{۱-۱-۲}$$

که در اینجا α پارامتر شکل و λ پارامتر مقیاس است. توزیع نمایی تعمیم یافته با پارامتر شکل α و پارامتر مقیاس λ با $GE(\alpha,\lambda)$ نشان داده می‌شود. گوپتا و کوندو [۲۴] نشان دادند که توزیع نمایی تعمیم یافته می‌تواند به طور مؤثر برای تحلیل داده‌های مرگ و میر به جای توزیع گاما و وایبل مورد استفاده قرار گیرد.

تابع چگالی توزیع نمایی تعمیم یافته به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$f(x;\alpha,\lambda)=\alpha\lambda(1-e^{-\lambda x})^{\alpha-1}e^{-\lambda x}; \qquad \alpha,\lambda,x>0 \tag{۲-۱-۲}$$

بعضی از تابع چگالی‌های نمایی تعمیم یافته برای مقادیر مختلف α، وقتی $\lambda=1$ است در شکل ۲-۱ آورده شده است.



شکل۲-۱: تابع چگالی‌های مختلف توزیع نمایی تعمیم یافته ($\lambda=1$)

با توجه به شکل۲-۱ واضح است که تابع چگالی توزیع نمایی تعمیم یافته می‌تواند شکل‌های مختلفی به خود بگیرد. برای $\alpha > 1$ تابع چگالی آن به صورت تک مدی و چوله به راست است و مد برابر $\log\alpha$ است. برای $\alpha \le 1$ شکلی شبیه J معکوس دارد و یک تابع کاهشی است. میانه توزیع نمایی تعمیم یافته برابر $-\log(1-(0.5)^{1/\alpha})$ است. برای مقادیر بزرگ α، میانه، میانگین و مد همگی تقریباً برابر $\log\alpha$ هستند[۱۵].

تابع بقای[1] (احتمال زنده ماندن عضو تا زمان tام) توزیع نمایی تعمیم یافته به صورت زیر است:

$$S(x;\alpha,\lambda)=1-F(x;\alpha,\lambda)=1-(1-e^{-\lambda x})^{\alpha} \qquad (۲-۱-۳)$$

تابع مخاطره[2]، تعیین کننده نرخ آنی مرگ و یا از کار افتادگی در زمان t به شرط بقا تا لحظه tام می‌باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$h(t)=\frac{f(t)}{s(t)}$$

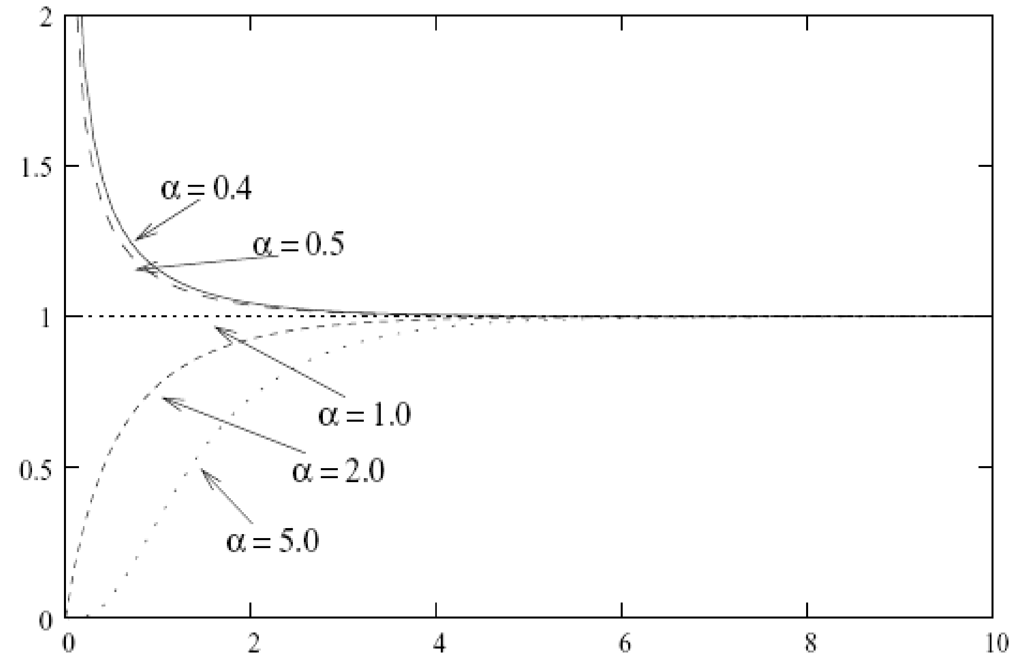
بنابراین تابع مخاطره توزیع نمایی تعمیم یافته به صورت زیر است:

$$h(x;\alpha,\lambda)=\frac{f(x;\alpha,\lambda)}{S(x;\alpha,\lambda)}=\frac{\alpha\lambda(1-e^{-\lambda x})^{\alpha-1}e^{-\lambda x}}{1-(1-e^{-\lambda x})^{\alpha}} \qquad (۲-۱-٤)$$

گوپتا و کوندو نمودار تابع مخاطره را برای مقادیر مختلف α و $\lambda=1$ رسم کرده‌اند (شکل ۲-۲).

با توجه به شکل (۲-۲) مشخص می شود که برای $\alpha>1$، تابع مخاطره تابعی غیر کاهشی است و برای $\alpha<1$ تابع مخاطره، تابعی غیر افزایشی است. برای $\alpha=1$، تابعی ثابت است

1. Survival Function
2. Hazard Function



شکل(۲-۲) :نمودار تابع مخاطره توزیع نمایی تعمیم یافته

تابع مخاطره معکوس[1] در سالهای اخیر خیلی مورد توجه قرار گرفته است. تابع مخاطره معکوس برای توزیع نمایی تعمیم یافته به صورت زیر است:

$$r(x;\alpha,\lambda)=\frac{f(x;\alpha,\lambda)}{F(x;\alpha,\lambda)}=\frac{\alpha\lambda e^{-\lambda x}}{1-e^{-\lambda x}} \qquad (۲-۱-۵)$$

تابع مخاطره معکوس نمایی تعمیم یافته به ازای همه مقادیر α تابعی کاهشی از x است. ویژگی‌های تابع مخاطره معکوس توزیع نمایی تعمیم یافته را می‌توانید در ناندا[2] و گوپتا ببینید [٤٧]. چون تابع مخاطره معکوس توزیع نمایی به صورت زیر است:

$$r(x;\alpha,\lambda)=\frac{f(x;\alpha,\lambda)}{F(x;\alpha,\lambda)}=\frac{\lambda e^{-\lambda x}}{1-e^{-\lambda x}}$$

---
۱. Revered Hazard Funtion
۲. Nanda