به نام یگانه ایزد بی‌همتا

دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر

« گروه ریاضی »

پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد ریاضی

عنوان

مشتقات روی جبرهای باناخ

نگارنده

سیما نوری نژاد

استاد راهنما

دکتر علی غفاری

استاد مشاور

دکتر رضا معمارباشی

بهمن ۱۳۹۲

قدردانی و تشکر

حمد و سپاس خدایی را که تا صدایش می‌کنم پاسخ گوید و شکر او که الطاف بی‌کرانش به انجام رسیدن این پایان‌نامه توفیق داد و نهایت قدردانی و تشکر را از محضر جناب آقای دکتر علی غفاری دارم که هدایت و راهنمایی اینجانب را به عهده داشتند. ضمن اینکه از کلیه کسانی که اینجانب را در تحصیل علم و ادب یاری نموده‌اند، خاصه پدر و مادرم تشکر می‌کنم.

تقدیم به:

دختر عزیزم که در طول این مدت با صبوری مرا یاری نمود.

به این زمین گرد که به سرعت می‌گردد بنگر که درمان ما در آن است و درد ما نیز. نگاه کن و ببین که نه گردش زمانه آن را می‌فرساید و نه رنج و بهبودی حال بشر آن را به آتش می‌کشد نه آرام می‌شود و نه همچون ما تباهی می‌پذیرد.

« فردوسی حکیم »

چکیده

در این پایان نامه، پایداری هایرز[1] — اولام[2] مشتقات روی جبرهای باناخ[3] و $(\sigma, \tau, \epsilon)-$ مشتقات سه تایی روی C^*- جبرهای سه تایی، را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

همچنین پایداری و سوپر پایداری از مشتقات مکعبی سه تایی روی جبرهای فرشه[4] سه تایی و پایداری مشتقات مکعبی روی جبرهای باناخ را اثبات می‌کنیم و با استفاده از قضیه نقطه ثابت نشان می‌دهیم که مشتقات مکعبی می‌توانند سوپر پایدار باشند.

واژه‌های کلیدی : پایداری هایرز — اولام — راسیاس[5] تعمیم یافته، C^*- جبر سه تایی، جبر باناخ سه تایی، تابع مکعبی، مشتق سه تایی، مشتق مکعبی، جبر فرشه.

---

[1] $Hyers$
[2] $Ulam$
[3] $Banach$
[4] $Frechet$
[5] $Rassias$

مقدمه

مسئله پایداری معادلات تابعی از یک سؤال اولام در سال ۱۹۴۰ که درباره پایداری گروههای همریخت بود، شروع شد. فرض کنید $(G_۱, .)$ یک گروه و $(G_۲, *)$ یک گروه متریک با متر $d(.,.)$ باشد. $\epsilon > ۰$ را در نظر بگیرید. سؤالی که توسط اولام مطرح شد این بود که آیا $\delta > ۰$ موجود می‌باشد که اگر نگاشت $f : G_۱ \to G_۲$ به ازای هر $x, y \in G_۱$، در رابطه زیر صدق کند

$$d(f(x.y), f(x) * f(y)) < \delta$$

آنگاه همریختی $h : G_۱ \to G_۲$ چنان موجود باشد که به ازای هر $x \in G_۱$،

$$d(f(x), h(x)) < \epsilon.$$

در سال ۱۹۴۱ هایرز اولین جواب مثبت به سؤال اولام را برای فضاهای باناخ E و E' ارائه کرد. فرض کنید $g : E \to E'$ نگاشتی بین فضاهای باناخ باشد به طوری که به ازای هر $\delta > ۰$ و هر $x, y \in E$،

$$||g(x + y) - g(x) - g(y)|| < \delta$$

در این صورت نگاشت منحصر به فرد $T : E \to E'$ چنان موجود است که به ازای هر $x \in E$،

$$||g(x) - T(x)|| \leq \delta$$

قضیه هایرز — اولام به وسیله راسیاس در [۱۷] بدین صورت تعمیم داده شد که فرض کرد E و E' فضاهای باناخ و $f : E \to E'$ نگاشتی باشد که به ازای هر ϵ و p ثابت که $\epsilon > ۰$ و $p < ۱$ و $x, y \in E$،

$$||f(x + y) - f(x) - f(y)|| \leq \epsilon(||x||^p + ||y||^p) \qquad (۱)$$

آن‌گاه نگاشت جمعی منحصر به فرد $T : E \to E'$ چنان موجود است که به ازای هر $x \in E$،

$$||f(x) - T(x)|| \leq \frac{۲\epsilon}{۲ - ۲^p}||x||^p \qquad (۲)$$

اگر $p < 0$، نامعادله (۱) به ازای هر $x, y \neq 0$ و نامعادله (۲) به ازای هر $x \neq 0$ برقرار است. همچنین، اگر $t \mapsto f(tx)$ از $\mathbb{R}$ به E' در عدد حقیقی t به ازای هر ثابت $x \in E$ پیوسته باشد، T خطی خواهد بود. گاجا[6] در [۱۱] قضیه راسیاس را برای $p > 1$ حل کرد و نشان داد که برای $p \neq 0$ برقرار نمی‌باشد. این نتیجه برای حالتی که $\epsilon > 0$، $p \geq 0$ و $p \neq 1$ را پایداری هایرز — اولام — راسیاس گویند. مسأله پایداری معادلات تابعی توسط شماری از دانشمندان از جمله پارک[7]، کیم[8]، اسحاقی و ... مورد مطالعه قرار گرفت. یکی از معادلاتی که در این زمینه مورد توجه قرار گرفت، معادله تابعی مکعبی بود که در سال ۲۰۰۲ توسط جون[9] و کیم معرفی و پایدرای هایرز — اولام — راسیاس برای این معادله تابعی بررسی شد. در سال ۲۰۱۰ اسحاقی مفهوم مشتقات مکعبی را معرفی و پایداری مشتقات مکعبی روی جبرهای باناخ جابجایی را مورد بررسی قرار داد.

یکی از اهداف این پایان نامه نیز بررسی پایداری مشتقات مکعبی روی جبرهای باناخ می‌باشد که توسط بوداغی در[۱] مطرح شد، که با مفاهیم ارائه شده توسط اسحاقی متفاوت است در واقع اسحاقی همگن بودن مشتقات را در نظر نگرفته بود.

در فصل اول به مفاهیم و نمادهایی که در فصول بعدی مورد نیاز است پرداخته و سعی شده است که تنها مواردی که در فصول بعدی نیاز است مورد بررسی و مطالعه قرار گیرد. از آوردن برهان در حد امکان خود داری شده و فرض براین است که خواننده اطلاعات کافی در این زمینه دارد.

فصل دوم، پایداری هایرز — اولام مشتقات روی جبرهای باناخ وابسته به نامعادله تابعی کوشی تعمیم یافته، را مورد بررسی قرار می‌دهیم که‌در این فصل از مقاله [۱۰] استفاده شده است.

فصل سوم، پایدرای هایرز — اولام تعمیم یافته $(\sigma, \tau, \xi)-$ مشتقات سه تایی روی C^*- جبرهای سه تایی را مورد بررسی قرار می‌دهیم. مطالب این فصل از مقاله [۸] برگرفته شده است.

فصل چهارم، پایداری و سوپر پایداری هایرز — اولام — راسیاس تعمیم یافته از مشتقات مکعبی سه تایی را روی جبرهای فرشه سه تایی ثابت می‌کنیم و از آن پایداری و سوپر پایداری هایرز — اولام — راسیاس تعمیم یافته از مشتقات مکعبی سه تایی را روی جبرهای باناخ سه‌تایی را نتیجه می‌گیریم.

---

[6] $Gajda$
[7] $Park$
[8] Kim
[9] Jun

همچنین، مشتقات مکعبی روی جبرهای باناخ را اثبات می‌کنیم و با استفاده از قضیه نقطه ثابت نتیجه می‌گیریم که مشتقات مکعبی می‌توانند سوپر پایدار باشند. در این فصل از مقالات [۱] و [۱۲] استفاده شده است.

فهرست مندرجات

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اولیه

۱.۱ مقدمه

هدف از این فصل معرفی نمادها و اثبات بعضی قضایای مقدماتی است که در فصول بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند.

۲.۱ تعاریف اولیه

تعریف ۱.۲.۱ فرض کنید X مجموعه ای ناتهی باشد. تابع $d : X \times X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ یک متر روی X است هرگاه:

۱) برای هر $x, y \in X$، $x = y \Leftrightarrow d(x, y) = 0$،

۲) برای هر $x, y \in X$، $d(x, y) = d(y, x)$،

۳) برای هر $x, y, z \in X$، $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

تعریف ۲.۲.۱ فرض کنید (X,d) فضای متریک باشد. نگاشت $T: X \to X$ در شرط لیپ شیتس صدق می‌کند اگر ثابت $L \geq \circ$ موجود باشد به طوری که به ازای هر $x, y \in X$،

$$d(Tx,Ty) \leq Ld(x,y)$$

به کوچکترین $L \geq \circ$ که در این رابطه صدق می کند، ثابت لیپ شیتس گویند.

تعریف ۳.۲.۱ تابع $||.||: X \to \mathbb{R}$ یک نرم روی فضای برداری X است، هرگاه

۱) برای هر $x \in X$، $||x|| > \circ$ و $\|x\| = \circ$ اگر و تنها اگر $x = \circ$،

۲) برای هر $x \in X$ و $\alpha \in \mathbb{C}$، $||\alpha x|| = |\alpha| ||x||$،

۳) برای هر $y, x \in X$، $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$.

در این صورت $(X, ||.||)$ را یک فضای نرمدار گوییم.

تعریف ۴.۲.۱ فضای متریک (E,d) و دنباله (x_n) در E مفروض اند. می گوییم (x_n) یک دنباله کوشی است هرگاه

$$\forall \varepsilon > \circ, \exists N \in \mathbb{N} : m,n \geq N \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

تعریف ۵.۲.۱ فضای متریک (E,d) را کامل گوییم هرگاه هر دنباله کوشی در E همگرا باشد.

تعریف ۶.۲.۱ هر گاه X با متر $d(x,y) = \|x-y\|$ یک فضای متریک کامل باشد، در این صورت به آن یک فضای باناخ گوییم.

تعریف ۷.۲.۱ فرض کنیم $\preceq$ رابطه ای روی D باشد، $(D, \preceq)$ را جهت دار شده گوییم هرگاه:

۱) $\preceq$ انعکاسی باشد؛

۲) $\preceq$ متعدی باشد؛

۳) برای هر α و β از D، $\gamma \in D$ ای موجود باشد که $\gamma \preceq \alpha$ و $\gamma \preceq \beta$. هر تابع از مجموعه جهتدار شده D بتوی یک فضای توپولوژیک، یک تور نامیده می‌شود.

تعریف ۸.۲.۱ فرض کنید X یک فضای برداری و τ یک توپولوژی روی X باشد. X را یک فضای برداری توپولوژیک گوییم هرگاه

۱) هر تک نقطه‌ای بسته باشد.

۲) اعمال فضای برداری پیوسته باشند.

تعریف ۹.۲.۱ فرض کنید X یک فضای برداری توپولوژیک باشد. X را محدب موضعی گوییم، هرگاه صفر دارای پایه‌ای موضعی باشد که هر عضوش محدب است.

تعریف ۱۰.۲.۱ یک جبر مختلط، یک فضای برداری A همراه با یک ضرب روی A است که این ضرب در خواص زیر صدق می کند:

۱) برای هر $x, y, z \in A$، $x(yz) = (xy)z$، $x(y+z) = xy + xz$ و $(x+y)z = xz + yz$.

۲) برای هر $x, y \in A$ و $\alpha \in \mathbb{C}$، $\alpha(xy) = (\alpha x)y$.

تعریف ۱۱.۲.۱ جبر A روی میدان $\mathbb{C}$ را یک جبر نرمدار گوییم، هرگاه A به عنوان یک فضای برداری نرمدار با نرم $\|.\|$ به ازای هر $x, y \in A$، در شرط زیر صدق کند:

$$\|xy\| \leq \|x\|\|y\|.$$

تعریف ۱۲.۲.۱ جبر نرمدار A روی میدان $\mathbb{C}$ را یک جبر باناخ گوییم هرگاه A یک فضای باناخ باشد.

تعریف ۱۳.۲.۱ جبر محدب موضعی متریک پذیر کامل A را جبر فرشه گوییم هرگاه توپولوژی آن توسط یک دنباله از نیم نرم هایی مثل $(p_n)_{n\geq ۱}$ تولید شده باشد به طوری که به ازای هر $x, y \in A$،

$$p_n(xy) \leq p_n(x)p_n(y)$$

$$p_n(x) \leq p_{n+1}(x)$$

جبر فرشه A همراه با دنباله (p_n) را با (A, p_n) نشان می‌دهند.

تعریف ۱۴.۲.۱ فرض کنید (A, p_n) جبر فرشه باشد. در این صورت دنباله (x_k) در جبر A به x همگراست اگر و فقط اگر به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ به طوری که $k \to \infty$،

$$p_n(x_k - x) \to 0.$$

تعریف ۱۵.۲.۱ فرض کنید A یک جبر مختلط و φ تابعک خطی غیر صفر روی A باشد. φ را یک همریختی روی A گوییم هرگاه برای هر $x, y \in A$،

$$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y).$$

.

تعریف ۱۶.۲.۱ نگاشت $P : A \to B$ را همگن از درجه k گوییم هرگاه به ازای هر $x, y \in A$،

$$P(\lambda x) = \lambda^k P(x).$$

تعریف ۱۷.۲.۱ فرض کنید $f : X \to X$ پیوسته باشد. نقطه $x_0 \in X$ را نقطه ثابت برای f گوییم هرگاه

$$f(x_0) = x_0$$

تعریف ۱۸.۲.۱ فرض کنید X و Y دو فضای توپولوژیک خطی باشند. نگاشت خطی $T : E \to F$ کراندار است اگر به ازای هر زیر مجموعه کراندار B از E، $T(B)$ در F کراندار باشد. مجموعه همه نگاشت های خطی کراندار از E به F را با $B(E, F)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱۹.۲.۱ $BL(X, \mathbb{C})$ را با X^* نمایش داده و آنرا دوگان X می‌نامیم. در واقع X^* فضای برداری متشکل از همه تابعک‌های خطی پیوسته روی X است.

تعریف ۲۰.۲.۱ E و F را دو فضای نرمدار و $T \in B(E,F)$ در نظر بگیرید. T را نگاشت هسته‌ای گوییم هرگاه $\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\} \subset E^*$ و $\{y_n : n \in \mathbb{N}\} \subset F$ موجود باشند به طوری که به ازای هر $x \in E$،

$$\sum_{j=1}^{\infty} ||y_n|| ||\lambda_n|| < \infty, \qquad Tx = \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, \lambda_n \rangle y_n.$$

تعریف ۲۱.۲.۱ نگاشت $x \to x^*$ یک برگشت روی جبر A است هرگاه برای هر $x, y \in A$ و $\lambda \in \mathbb{C}$،

۱) $(x+y)^* = x^* + y^*$،

۲) $(\lambda x)^* = \bar{\lambda} x^*$،

۳) $(xy)^* = y^* x^*$،

۴) $x^{**} = x$.

تعریف ۲۲.۲.۱ فرض کنید A جبر باناخ با یک برگشت باشد به طوری که برای هر $x \in A$،

$$\|xx^*\| = \|x\|^2$$

در این صورت A را یک C^*- جبر گوییم.

تعریف ۲۳.۲.۱ فرض کنید A یک جبر باشد. یک $A-$ مدول چپ، فضای خطی X روی $\mathbb{C}$ است همراه با یک نگاشت $(a.x) \to a.x$ از $A \times X \to X$ به طوری که برای هر $x_1, x_2 \in X$ و $a, b \in A$،

$$(a+b)x_1 = ax_1 + bx_1, \quad a(x_1 + x_2) = ax_1 + ax_2, \quad a.(b.x_1) = (ab).x_1.$$

یک $A-$ مدول چپ X را $A-$ مدول چپ یکانی گویند هرگاه A عضو یکه‌ای چون e داشته باشد که به ازای هر $m \in X$، $e\,m = m$.

A مدول راست و $A-$ مدول راست یکانی X، به طور مشابه تعریف می‌شوند.

تعریف ۲۴.۲.۱ فرض کنید A یک جبر نرمدار و X فضای نرمدار باشد. X را یک $A-$ مدول چپ نرمدار گوییم هرگاه X یک $A-$ مدول چپ باشد و عدد ثابت $K > 0$ ای موجود باشد که برای هر

$a \in A$، $x \in X$ داشته باشیم

$$||a.x|| \leq K||a||||x||.$$

$A-$ مدول راست نرمدار و A دو مدول نرمدار نیز به طور مشابه تعریف می‌شود.

توجه کنید که اگر X یک فضای باناخ باشد، A مدول چپ نرمدار X را یک $A-$ مدول چپ باناخ گوییم. به همین ترتیب $A-$ مدول راست باناخ و $A-$ دومدول باناخ را تعریف می‌کنیم.

تذکر ۲۵.۲.۱ فرض کنید X باناخ $A-$ دومدول باشد. دوگان فضای باناخ X به ازای هر $a \in A, x \in X, f \in X^*$، با عملهای مدولی

$$\langle a.f, x\rangle = \langle f, x.a\rangle, \quad \langle f.a, x\rangle = \langle f, a.x\rangle$$

نیز یک باناخ $A-$ دومدول دوگان است.

تعریف ۲۶.۲.۱ فرض کنید A و B دو جبر باناخ باشند. X را $B, A-$ مدول گوییم هرگاه $A-$ مدول چپ و $B-$ مدول راست باشد، به طوری که به ازای هر $a \in A$، $b \in B$ و $x \in X$،

$$||axb|| \leq ||a||||x||||b||.$$

عمل راست از A و عمل چپ از B روی باناخ $B, A-$ مدول X^* را به ازای هر $a \in A$، $b \in B$، $x \in X$ و $f \in X^*$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$(f.a)(x) = f(a.x),$$

$$(b.f)(x) = f(x.b).$$

به روش مشابه X^{**}، به ازای هر $a \in A$، $b \in B$، $f \in X^*$ و $m \in X^{**}$، با عملهای زیر یک $X^{**}-$ باناخ $B, A-$ مدول است.

$$(a.m)(f) = m(f.a),$$

$$(m.b)(f) = m(b.f).$$

تعریف ۲۷.۲.۱ فرض کنید X باناخ $A-$ دو مدول باشد. D مشتق کراندار، یک نگاشت خطی کراندار $D: A \to X$ است که برای هر $a, b \in A$، $D(ab) = D(a)b + aD(b)$.
برای هر x نگاشت $\delta_x(a) = ax - xa$ یک مشتق است و به آن مشتق درونی گوییم.

تعریف ۲۸.۲.۱ فرض کنید $Z^{1}(A, X)$ مجموعه همه مشتق‌های کراندار و $B^{1}(A, X)$ مجموعه همه مشتق‌های درونی باشد. در این صورت $H^{1}(A, X) = \frac{Z^{1}(A,X)}{B^{1}(A,X)}$ را اولین گروه کوهمولوژی با ضرایب در X گوییم.

جانسون میانگین پذیری جبرهای باناخ را بدین شکل تعریف کرد که:

تعریف ۲۹.۲.۱ جبر باناخ A را میانگین پذیر گوییم هرگاه برای هر $A-$ دو مدول باناخ X، $H^{1}(A, X^*) = 0$ باشد.

توجه داشته باشید منظور از $H^{1}(A, X^*) = 0$ اینست که هر مشتق پیوسته، درونی باشد.

همچنین جبر باناخ A را میانگین پذیر ضعیف گوییم هرگاه، $H^{1}(A, A^*) = 0$.

قضیه ۳۰.۲.۱ فرض کنید A، C^*- جبر باشد. A میانگین پذیر است اگر و تنها اگر A هسته‌ای باشد.

برهان: به قضیه (۷۳,۶,۵) از مرجع [۴] رجوع شود. □

فصل ۲

مشتقات تقریبی روی جبرهای باناخ

۱.۲ مقدمه

معادله تابعی مثل ξ را پایدار گوییم هرگاه تابعی مانند g که به طور تقریبی در ξ صدق می‌کند، به حل درست ξ نزدیک باشد. همچنین، معادله تابعی ξ را سوپر پایدار گوییم هرگاه هر حل تقریبی معادله تابعی با حل درست آن یکسان باشد.

مسئله پایداری معادلات تابعی از یک سؤال اولام در سال ۱۹۴۰ که درباره پایداری گروههای همریخت بود، شروع شد. فرض کنید $(G_1, .)$ یک گروه و $(G_2, *)$ یک گروه متریک با متر $d(.,.)$ باشد. $\epsilon > 0$ را در نظر بگیرید. سؤالی که توسط اولام مطرح شد این بود که آیا $\delta > 0$ موجود می باشد که اگر نگاشت $f : G_1 \to G_2$ به ازای هر $x, y \in G_1$، در رابطه زیر صدق کند

$$d(f(x.y), f(x) * f(y)) < \delta$$

آنگاه همریختی $h : G_1 \to G_2$ چنان موجود باشد که به ازای هر $x \in G_1$،

$$d(f(x), h(x)) < \epsilon.$$

در سال ۱۹۴۱ هایرز در [۱۳]L پاسخی برای این سؤال ارائه کرد و بعد از آن مقالات بسیاری در رابطه با این مسئله منتشر شد.

فرض کنید n یک عدد صحیح ثابت بزرگتر از ۳ و λ یک عدد حقیقی باشد به طوری که $|\lambda| \neq \frac{(n^۲-n+۴)}{۲}$. در این فصل به بررسی پایداری هایرز—اولام مشتقات روی جبرهای باناخ وابسته به نامعادله تابعی کوشی تعمیم یافته که در زیر آورده شده، می‌پردازیم.

$$||\sum_{\substack{۱\leq i<j\leq n \\ ۱\leq k_l \neq i,j \leq n}} f(\frac{x_i+x_j}{۲}+\sum_{l=۱}^{n-۲} x_{k_l})+f(\sum_{i=۲}^{n} x_i)+f(x_۱)|| \leq ||\lambda f(\sum_{i=۱}^{n} x_i)||.$$

۲.۲ مشتقات تقریبی روی جبرهای باناخ

فرض کنید A جبر باناخ و X یک باناخ $A-$ مدول باشد. در این فصل $\tilde{f}(x) = f(-x)+f(x)$ و $\Delta f(a,b) = f(ab)-f(a)b-f(b)a$. همچنین فرمول پاسکال را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$C(r,k) = C(r-۱,k)+C(r-۱,k-۱).$$

به علاوه، فرض می‌کنیم که $n_۰ \in \mathbb{N}$ و $\mathbb{T}^۱_{۱/n_۰} := \{e^{i\theta}; ۰ \leq \theta \leq ۲\pi/n_۰\}$.

لم ۱.۲.۲ فرض کنید $f: A \to X$ یک نگاشت باشد به طوری که به ازای هر $x_۱,...,x_n \in A$،

$$||\sum_{\substack{۱\leq i<j\leq n \\ ۱\leq k_l \neq i,j \leq n}} f(\frac{x_i+x_j}{۲}+\sum_{l=۱}^{n-۲} x_{k_l})+f(\sum_{i=۲}^{n} x_i)+f(x_۱)|| \leq ||\lambda f(\sum_{i=۱}^{n} x_i)|| \qquad (۱)$$

در این صورت f یک نگاشت جمعی کوشی است.

برهان: فرض می‌کنیم در نامعادله (۱)، $x_۱,...,x_n = ۰$. لذا

$$||(C(n,۲)+۲)f(۰)|| \leq ||\lambda f(۰)||. \qquad (۲)$$

از آنجا که عدد طبیعی $n \geq ۳$، $|\lambda| \neq \frac{(n^۲-n+۴)}{۲}$ و $f(۰) = ۰$ با قرار دادن $x_۱ = x$، $x_۲ = -x$، $x_۳ = ... = x_n = ۰$ در نامعادله (۱) به ازای هر $x \in A$،

$$||(n-۲)\tilde{f}(\frac{x}{۲})+(C(n-۲,۲)+۱)f(۰)+\tilde{f}(x)|| \leq ||\lambda f(۰)||. \qquad (۳)$$