بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده علوم پایه

مرکز تهران

گروه علمی ریاضی

عنوان پایاننامه:

روشهای تکراری برای حل
مسائل بدوضع معادلات دیفرانسیل جزیی

نگارش:

الهام حاجیشریفی

استاد راهنما:

دکتر علی ذاکری

استاد مشاور:

دکتر محمدحسن بیژنزاده

پایان نامه برای دریافت مدرک کارشناسی ارشد

در رشته ریاضی کاربردی

خرداد ۱۳۹۰

تقدیم به استاد گرانقدر

پدر بزرگوار، مادر مهربان،

همسر فداکار و فرزند دلبندم

که همواره مشوق و یاورم بوده‌اند

تقدیر و تشکر

سپاس پروردگار یکتا را که به ما فرصت اندیشیدن عطا فرمود و شکوهش را در ژرفای علوم و منتهای همتان تجلی بخشید.

از استاد بزرگوار و محترم جناب آقای دکتر علی ذاکری که افتخار شاگردیشان نصیب من گردید و در تمامی مراحل تحقیق، راه گشا و هدایتگرم بوده‌اند سپاسگزاری مینمایم.

همچنین از محضر استاد ارجمند جناب آقای دکتر عبدالساده نیسی که داوری تحقیق را قبول زحمت فرموده و با حضور مبارکشان جلسه دفاعیه این حقیر را مزین نموده‌اند، تشکر مینمایم.

از محضر استاد گرانقدر جناب آقای دکتر محمد حسن بیژن زاده که مشاوره این تحقیق را به عهده گرفته اند قدردانی می نمایم.

از جناب آقای ابراهیم سهرابی که با همکاری ارزنده و کامل خود من را در امر یادگیری نرم افزار فارسی تک راهنمایی نمودند، بابت همه تلاشهای انجام شده از ایشان تشکر می نمایم.

از همسر مهربان، فرزند عزیزم و تمام کسانی که در انجام این پروژه با صبر و گذشت خود مشوق و یاریگرم بوده‌اند صمیمانه تشکر مینمایم.

چکیده

دراین پایاننامه ابتدا به بیان برخی فضاها و خواص آنها جهت معرفی عملگرها به خصوص عملگرهای خطی و ارائهی ویژگیهای   آن میپردازیم . سپس مفاهیم مسائل خوشوضع و بدوضع و همچنین مسائل معکوس را معرفی نموده و راه حلهای مختلف را برای حل مسائل معکوس مانند گسستهسازی ویا کمینهسازی آنها ارائه میدهد . همچنین روش انتخاب را برای حل مسائل بدوضع بر میگزیند، سپس روش شبهمعکوس را برای حل مسألهی کشی در حل معادلهی پسروی گرما برای یافتن جواب پایدار ارائه میدهد . همچنین به معرفی یک رویکرد جدید برای یافتن جواب مسائل بدوضع بیضوی، هذلولوی و سهموی میپردازد،   که این به مفهوم اعمال یک عملگر منظمسازی است. روش منظمسازی تیخونوف و بعضی روشهای تکراری نیوتن و لندوبر و اثبات همگرایی آنها بیان شده است. در آخر یک نمونهی عددی به همراه برنامه رایانهای آن ارائه می گردد.

کلمات کلیدی: عملگرها، مسائل خوشوضع، مسائل بدوضع، منظمسازی، پارامتر منظمسازی، منظمسازی تیخونوف، مسائل معکوس، روش شبهمعکوس، روشهای تکراری

پیشگفتار

برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی، روشهای عددی متعددی مطرح شده است. روشهای مطرح شده در این پایاننامه برای حل معادلات بدوضع و معکوس مناسب است.

اولین روشی که مورد بررسی قرار گرفته ، روش انتخاب میباشد که امکان تعیین جوابهای تقریبی از مسائل بدوضع را به ما میدهد که تحت تغییرات کوچک در دادههای اولیه پایدار باشند که مبتنی براستفاده از اطلاعات اضافی راجع به جواب میباشد . روش انتخاب که دارای کاربردهای عملی گستردهای میباشد و همچنین روش شبه معکوس مورد نظر خواهد بود.

همچنین روش دیگری که برای یافتن جواب مسائل بدوضع که در مراجع توسعه داده شده ما را قادر خواهد ساخت تا در مواجهه با مسائل بدوضع، جواب های تقریبی مسأله مورد نظر را که تحت تغییرات کوچک در دادهی اولیه پایدار است به دست آوریم، مبتنی بر مفهوم اسای یک عملگر منظمسازی است. روش دیگر، روش تکراری و همگرایی آنها است که با اعمال آنها روی مسائل معکوس بهخصوص مسائل سهموی که مورد نظر این پایان نامه هستند، به جواب تقریبی دست می یابیم.

در فصل اول این پایاننامه مفاهیم، تعاریف و قضایای مقدماتی مورد نیاز در این تحقیق ارائه میگردد . در فصل دوم مفاهیم مسائل خوشوضع و بدوضع وهمچنین مسائل معکوس و روش شبه معکوس مورد بررسی قرار میگیرند . روش منظمسازی مسائل بدوضع، مفهوم عملگر منظمساز و پارامترهای منظمساز و روش به دست آوردن آنها در فصل سوم مطالعه خواهند شد. در فصل چهارم روشهای تکراری برای مسائل خطی و غیرخطی و همگرایی آنها مورد بررسی قرار میگیرند و فصل آخر به ارائه مثالهای عددی همراه با برنامه رایانهای در این خصوص اختصاص مییابد .

فهرست مندرجات

۱ تعاریف اولیه ۱

۱—۱ تعاریف مقدماتی ۱

۱—۲ فضای L^p ۳

۱—۳ فضای هیلبرت ۴

۱—۴ فضای باناخ ۵

۱—۵ عملگرهای خطی کراندار ۵

۱—۶ طیف عملگرهای کراندار ۶

۱—۷ عملگرهای خطی روی فضاهای هیلبرت ۷

۱—۸ فضای سوبولف ۸

۱—۹ ویژگی های مقدماتی فضای سوبولوف ۹

۱—۱۰ فضای H^{-1} ۱۰

۱—۱۱ فضای در برگیرنده زمان ۱۱

۲ مسائل بدوضع ۱۶

۲—۱ مفاهیم مسائل خوش وضع و بدوضع ۱۶

۲—۲ مسائل معکوس ۲۳

۲—۳ گسسته‌سازی مسائل ۲۹

۲—۴ روش انتخاب برای حل مسائل بدوضع ۲۹

۲—۵ شبه‌جواب‌ها ۳۴

۲—۶ تعیین تقریبی از شبه‌جواب‌ها ۳۶

۲—۷ روش شبه‌معکوس ۳۸

۳ منظم‌سازی مسائل بدوضع ۴۱

۳—۱ معادله‌های نامنظم و مسائل بدوضع ۴۱

۳—۲ مفهوم یک عملگر منظم‌ساز ۴۵

۳—۳ روش‌های ساختن عملگرهای منظم‌ساز ۴۸

۳—۴ مینیمم‌سازی یک تابعی هموارکننده ۵۶

۳—۵ کاربرد روش منظم‌سازی ۶۰

۳—۶ روش منظم‌سازی تیخونوف ۶۲

۳—۷ تعیین پارامتر منظم‌ساز ۶۵

۴ روش‌های منظم سازی تکراری و همگرایی آن‌ها ۶۹

۴—۱ روش‌های منظم‌سازی ۶۹

۴—۲ روش‌های منظم‌سازی تکراری ۷۰

۴—۳ تکرار غیرخطی لندوبر ۷۲

۴—۴ شرایط پایه‌ای ۷۲

۴—۵ همگرایی روش لندوبر ۷۶

۴—۶ انواع روش‌های نیوتن ۸۱
۴—۶—۱ روش لونبرگ — مارکوریت ۸۱

۵ روش‌های تکراری برای حل مسائل بدوضع معادلات دیفرانسیل جزیی ۸۶

۵—۱ عملگرهای غیرگران ۸۶

۵—۲ فضاهای تابع ۸۸

۵—۳ مسائل بدوضع ۸۹
۵—۳—۱ **مسأله‌ی بیضوی** ۸۹
۵—۳—۲ **مسأله‌ی هذلولوی** ۹۰
۵—۳—۳ **مسأله‌ی سهموی** ۹۰

۵—۴ توصیف فرآیند تکراری برای مسأله‌ی سهموی ۹۱

۵—۵ تحلیل روش‌ها برای مسأله‌ی سهمی ۹۲

۵—۶ منظم‌سازی ۹۳

۵—۷ نتایج عددی ۹۶

فصل ۱

تعاریف اولیه

این فصل به ارائه تعاریف و برخی مفاهیم اولیه، فضاهای گوناگون، عملگرها و خواص آن‌ها که در فصل‌های آینده مورد استفاده قرار می‌گیرد می‌پردازد.

۱—۱ تعاریف مقدماتی

تعریف ۱.۱ فرض کنید U و V دو مجموعه‌ی باز در R^n باشند، به‌طوری که $V \subset \bar{V} \subset U$ و $\bar{V}$ یک مجموعه‌ی فشرده باشد، آنگاه V را در U فشرده نامیده و می‌نویسیم $V \subset\subset U$.

همچنین مرز ناحیه U را با ∂U نمایش می‌دهیم. در ضمن اگر $(0,T]$ یک بازه در $\mathbb{R}$ باشد، آنگاه تعریف می‌کنیم: $U_T = U \times (0,T]$

تعریف ۲.۱ یک گوی باز در $\mathbb{R}^n$ با مرکز x و شعاع $r > 0$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$B^\circ(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n | \quad | x-y | < r\}$$

به طور مشابه یک گوی بسته به مرکز x و شعاع $r > 0$ عبارت است از

$$B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n | \quad | x-y | \leq r\}$$

تعریف ۳.۱ فرض کنید $u : U \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع تعریف شده از $U \subset \mathbb{R}^n$ به $\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $u(x) = u(x_1, ...x_n)$ باشد. هر گاه u به تعداد نامتناهی مشتق پذیر باشد در این صورت u یک تابع هموار است.

در تعمیم تعریف فوق فرض کنید $u : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ یک تابع تعریف شده از $U \subset \mathbb{R}^n$ به فضای $\mathbb{R}^m$ با ضابطه‌ی $u(x) = (u_1(x), \dots, u_m(x))$ باشد، به طوری که مولفه‌ی k ام تابع u یعنی u_k تابعی از U به $\mathbb{R}$ به ازای $k = 1 \dots m$ باشد. حال فرض کنید بردار $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ یک بردار تعریف شده با مولفه‌های صحیح نامنفی α_i باشد. مرتبه شاخص بردار α به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_m$$

در این صورت مشتق جزیی تابع u از مرتبه شاخص $k = |\alpha|$ به صورت زیر خواهد بود:

$$D^k u(x) := \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n} u$$

توجه داریم که در تعریف فوق k یک عدد صحیح نامنفی است. بنابراین $D^k u(x) = \{D^\alpha u(x) \mid |\alpha| = k\}$ مجموعه‌ی مشتق‌های جزیی مرتبه‌ی k تابع u تعریف می‌شود. همچنین نرم $D^k u(x)$ را به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$\|D^k u(x)\| = \left(\sum_{|\alpha|=k} |D^\alpha u(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

درحالت خاص اگر $k = 1$ و $k = 2$ به ترتیب Du و $D^2 u$ عبارت‌اند از

$$Du = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)$$

$$D^2 u = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}_{n \times n}$$

که آن را ماتریس هسیان [۱] می‌گویند.

در ادامه از نمادهای زیر برای نمایش فضای توابع استفاده می‌شود:

$C(U)$: مجموعه توابع پیوسته از فضای U بر مجموعه اعداد حقیقی.

$C(\bar{U})$: فضای توابع به طور یکنواخت پیوسته بر $C(U)$.

$C^k(U)$: مجموعه توابع تعریف شده از فضای U بر مجموعه اعداد حقیقی که k بار به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر باشند.

$C^k(\bar{U})$: فضای توابع به‌طور یکنواخت پیوسته مانند $u \in C^k(U)$ که به ازای هر $|\alpha| \leq k$ تابع $D^\alpha u$ به‌طور یکنواخت پیوسته باشد.

$\bigcap\limits_{k=\circ}^{\infty} C^k(U) = C^\infty(U)$: مجموعه توابع پیوسته از فضای U بر مجموعه اعداد حقیقی که به‌طور نامتناهی مشتق‌پذیر باشند.

نکته: $\bigcap\limits_{k=\circ}^{\infty} C^k(\bar{U}) = C^\infty(\bar{U})$

$C_c(U)$ و $C_c^k(U)$: فضای تمام توابعی که به ترتیب در $C(U)$ و $C^k(U)$ دارای محافظ فشرده باشند.

۱—۲ فضای L^p

در این بخش به معرفی و ارائه خواص فضای L^p می‌پردازیم.

تعریف ۴.۱ تابع $\mu : P(X) \longrightarrow [\circ, \infty]$ را که در آن $P(X)$ مجموعه توانی مجموعه X می‌باشد، مشروط بر این که در خواص زیر صدق کند یک اندازه بیرونی می‌نامیم.

(i) $\mu(\emptyset) = \circ$

(ii) اگر $A \subset B$ آنگاه $\mu(A) \leq \mu(B)$،یعنی μ یکنواست.

(iii) $\mu(\cup_{n=1}^{\infty}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ به ازای هر دنباله $\{A_n\}$ از زیر مجموعه‌های X برقرار است، یعنی μ،σ—زیرجمعی است.(ر.ک.[٦])

[۱] Hessian matrix

تعریف ۵.۱ زیر مجموعه‌ی E از X را اندازه پذیر(یا به‌طور دقیق تر μ—اندازه پذیر) نامیم، اگر $\mu(A) = \mu(A \cap E) = \mu(A \cap E^c)$ به ازای هر $A \subset X$ برقرار باشد.

تعریف ۶.۱ فرض کنید $f \longrightarrow R$ یک تابع اسکالر باشد. در این‌صورت هر گاه $f^{-1}(V)$ به‌ازای هر زیرمجموعه‌ی باز V از R اندازه‌پذیر باشد، آنگاه f را یک تابع اندازه‌پذیر می‌نامیم.

تعریف ۷.۱ گردایه تمام توابع اندازه پذیر f که $|f|^p$ به ازای $0 < p < \infty$ انتگرال‌پذیر باشد را با $L^p(\mu)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۸.۱ اگر U یک زیرمجموعه R^n و $f : U \longrightarrow R$ یک تابع اندازه پذیر باشد، آنگاه به‌ازای $1 \leq p \leq \infty$ نرم فضای L^p را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\|f\|_{L^p(U)} = \begin{cases} \left(\int_U |f|^p \, dx\right) & 1 \leq p < \infty \\ \\ \operatorname*{ess\,sup}_U |f| & p = \infty \end{cases}$$

که در آن $L^p(U)$ فضای خطی شامل همه توابع اندازه پذیر $f : U \longrightarrow R$ می‌باشد.

همچنین $L^p_{loc}(U)$ فضای توابع تعریف شده از فضای U بر مجموعه اعداد حقیقی می‌باشد به‌طوری‌که برای هر $V \subset\subset U$ داشته باشیم $v \in L^p(V)$.

۱—۳ فضای هیلبرت

فضای برداری H یک فضای ضرب داخلی نامیده می‌شود، اگر به هر زوج مرتب از بردارهای u و v در H یک عدد مختلط مانند (u,v) به‌نام حاصل‌ضرب داخلی (یا حاصل‌ضرب اسکالر) چنان مربوط شده باشد که خواص زیر برقرار باشند:

(i) $(u,v) = \overline{(v,u)}$ و $\forall u, v \in H$

(ii) به ازای هر $v \in H$ نگاشت $u \longrightarrow (u,v)$ یک نگاشت خطی بر H باشد، یعنی اگر $u, v, z \in H$ آنگاه $(u+z, v) = (u,v) + (u,v)$ و اگر $u, v \in H$ و α یک اسکالر باشد،آنگاه $(\alpha u, v) = \alpha(u,v)$.

(iii) به ازای هر $u \in H$ داریم $(u,u) \geq 0$.

(iv) $(u,u) = 0$ اگر و تنها اگر $u = 0$.

تعریف ۹.۱ اگر فضای هیلبرت دارای پایه متعامد شمارا باشد، آنگاه آن را یک فضای هیلبرت جداشدنی می‌نامیم.

۱—۴ فضای باناخ

فرض کنید X یک فضای تعریف شده با میدان اسکالر از اعداد حقیقی باشد، آنگاه نگاشت $\| \ \| : X \longrightarrow [0,\infty)$ یک نرم نامیده می‌شود اگر:

(i) به ازای هر $u,v \in X$ داشته باشیم: $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$

(ii) به ازای هر $u \in X$ و $\lambda \in \mathbb{R}$ داشته باشیم: $\|\lambda u\| = |\lambda| \ \|u\|$

(iii) $\|u\| = 0$ اگر و تنها اگر $u = 0$.

در این‌صورت X یک فضای خطی نرم‌دار نامیده می‌شود. به هر فضای خطی نرم‌دار یک فضای باناخ گفته می‌شود.

۱—۵ عملگرهای خطی کراندار

در این بخش فرض کنید X و Y فضاهای باناخ تعریف شده بر میدان اعداد حقیقی باشند.

تعریف ۱۰.۱ نگاشت $A : X \longrightarrow Y$ یک عملگر خطی است، اگر به‌ازای هر $u,v \in X$ و $\lambda,\mu \in R$ داشته باشیم:

$$A(\lambda u + \mu v) = \lambda A u + \mu A v$$

تعریف ۱۱.۱ برد عملگر A به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$R(A) := \{v \in Y | v = Au, u \in X\}$$

تعریف ۱۲.۱ فضای پوچ عملگر $\boldsymbol{A}$ به‌صورت $N(A) := \{u \in X | Au = 0\}$ تعریف می گردد.

تعریف ۱۳.۱ عملگر خطی $A : X \longrightarrow Y$ کراندار است اگر:

$$\|A\| := \sup\{\|Au\|_Y, \|u\|_X \leq 1\} < \infty$$

تعریف ۱۴.۱ عملگرخطی $A : X \longrightarrow Y$ بسته است اگر $u_k \longrightarrow u$ در X، و $Au_k \longrightarrow v$ در Y، آنگاه $Au = v$.

قضیه ۱۵.۱ فرض کنید $A : X \longrightarrow Y$ بسته باشد، آنگاه A کراندار است.

۱—۶ طیف عملگرهای کراندار

تعریف ۱۶.۱ طیف[1] یک عملگر خطی کراندار A روی فضای هیلبرت H مجموعه‌ای از اعداد مختلط η است به‌طوری‌که $(A - \eta I)$ یک عملگر خطی کراندار معکوس‌ناپذیر (منفرد) باشد.

طیف عملگر A را با $\sigma(A)$ و مجموعه جواب عملگر A را با $\rho(A)$ نشان می‌دهیم. بنابراین

$$\begin{aligned} \rho(A) &= \{\eta \in \mathbb{C} | (A - \eta I) \text{ یک به یک و پوشا باشد } \} \\ \sigma(A) &= \mathbb{C} - \rho(A) \end{aligned}$$

تعریف ۱۷.۱ فرض کنید $\eta \in \sigma(A)$ یک مقدار ویژه A باشد. آنگاه:

(i) $N(A - \eta I) \neq 0$ و $\sigma_\rho(A)$ مجموعه بردارهای ویژه A است.

(ii) اگر $w \neq 0$ در رابطه $Aw = \eta w$ صدق کند، آنگاه w یک بردار ویژهA می‌باشد.

[1] spectral

تعریف ۱۸.۱ اگر عملگر $u^* : X \longrightarrow R$ خطی و کراندار باشد، آنگاه u^* یک تابعی خطی روی X نامیده می‌شود.

تعریف ۱۹.۱ مجموعه‌ی همه‌ی تابعی‌های خطی و کراندار تعریف شده بر X را فضای دوگان X نامیده و با X^* نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲۰.۱ اگر $u \in X$ و $u^* \in X^*$ آنگاه داریم $\langle u^*, u\rangle = u^*(u)$ در این‌صورت

(i) نرم فضای X^* را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\|u^*\| = \sup\{\langle u^*, u\rangle| \quad \|u\| \leq ۱\}$$

(ii) فضای باناخ X را یک فضای انعکاسی گوییم هرگاه $X = (X^*)^*$. به عبارت بهتر به‌ازای هر $u^{**} \in (X^*)^*$ یک $u \in X$ وجود دارد به‌طوری که

$$\langle u^{**}, u^*\rangle = \langle u^*, u\rangle \qquad \forall u^* \in X^*$$

۱—۷ عملگرهای خطی روی فضاهای هیلبرت

تعریف ۲۱.۱ فرض کنید $A : H \longrightarrow H$ یک عملگر خطی و کراندار باشد. عملگر الحاقی A^* را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\forall u, v \in H \qquad A^* : H \longrightarrow H \ , \ (Au, v) = (u, A^*v)$$

همچنین اگر $A^* = A$، آنگاه A را یک عملگر متقارن یا خودالحاقی می‌نامند.

تعریف ۲۲.۱ دنباله $\{u_k\}_{k=۱}^{\infty} \subset X$ به طورضعیف همگرا به $u \in X$ نامیده می‌شود، هر گاه به ازای هر تابعی خطی $u^* \in X^*$ داشته باشیم: $\langle u^*, u_k\rangle \longrightarrow \langle u^*, u\rangle$

۱—۸ فضای سوبولف

تعریف ۲۳.۱ مشتق ضعیف[۱] فرض کنید $C_c^\infty(U)$ فضای نامتناهی شامل تابعی‌های مشتق‌پذیر $\phi : U \longrightarrow R$ با محافظ فشرده بر U باشد. در این‌صورت ϕ را یک تابع تست بی‌نهایت مشتق‌پذیر می‌نامیم.

انگیزه تعریف مشتق ضعیف در محاسبه انتگرال‌ها است. فرض کنید $u \in C^1(U)$ و $\phi \in C_c^\infty(U)$. دراین‌صورت انتگرال آن به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\int_U u\phi_{x_i}dx = \int_U u_{x_i}\phi dx \quad , \quad (i = 1, \ldots, n)$$

همان‌طور که در رابطه فوق مشاهده می‌شود هیچ جمله مرزی وجود ندارد و ϕ یک محافظ فشرده در U داشته و در نزدیکی ∂U صفر است. اکنون اگر k یک عدد صحیح و $u \in C^k(U)$ و $\alpha = (\alpha_1, ...\alpha_n)$ یک شاخص با مرتبه $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n = k$ باشد، آنگاه داریم:

$$\int_u uD^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_u D^\alpha u\phi dx.$$

تعریف ۲۴.۱ فرض کنید $u, v \in L^1_{loc}(U)$ و α یک مرتبه شاخص باشد. تابع v را α امین مشتق ضعیف u می‌نامیم اگر $D^\alpha u = v$. بنابراین به ازای هر تابع تست $\phi \in C_c^\infty(U)$ داریم:

$$\int_U uD^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U v\phi dx$$

لم ۲۵.۱ برای تابع u یک و فقط یک α امین مشتق ضعیف موجود است و اگر هم u مشتق ضعیف دیگری داشته باشد، اندازه آن‌ها برابر صفر است.

اثبات: ر.ک.[۶]

تعریف ۲۶.۱ فضای سوبولوف $W^{k,p}(U)$ عبارت‌است از فضای شامل همه توابع به‌طور موضعی جمع‌پذیر $u : U \longrightarrow R$ به‌طوری که به ازای هر شاخص α با شرط $|\alpha| \leq k$، تابع $D^\alpha u$ به فرم ضعیف و متعلق به L^p وجود داشته باشد.

نکته:

[۱] Weak derivatives

(i) $p=۲$، آنگاه فضای سوبولوف $W^{k,۲}(U)$ را به‌صورت $H^k(U)$ نمایش داده و می‌توان ثابت کرد $H^k(U)$ یک فضای هیلبرت است.

(ii) قرار می‌دهیم: $H^{\circ}(U)=L^{۲}(U)$

(iii) فضای سوبولوف $H^{۱}(U)$ یک فضای هیلبرت با ضرب داخلی تعریف شده به‌صورت زیر است:

$$(f,g)=\int_U (fg+Df.Dg)dx$$

تعریف ۲۷.۱ اگر $u\in W^{k,p}(U)$، آنگاه نرم u به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|u\|_{W^{k,p}(U)}:=\begin{cases}\left(\sum\limits_{|\alpha|\le k}\int_U |D^\alpha u|^p\,dx\right)^{\frac{۱}{p}} & ۱\le p<\infty\\[2ex] \sum\limits_{|\alpha|\le k}\operatorname*{ess\,sup}_u |D^\alpha u| & p=\infty\end{cases}$$

تعریف ۲۸.۱ $W^{k,p}_{\circ}(U)$ بستار $C^\infty_c(U)$ در فضای $W^{k,p}(U)$ می‌باشد.

بنابراین $u\in W^{k,p}_{\circ}(U)$ اگر و تنها اگر تابع $u_m\in C^\infty_c(U)$ موجود باشد به‌طوری‌که $u_m\longrightarrow u$ در $W^{k,p}(U)$. بنابراین $W^{k,p}_{\circ}(U)$ عبارت است از $u\in W^{k,p}(U)$ به‌ازای هر $|\alpha|\le k-۱$ روی ∂U تساوی $D^\alpha u=\circ$ برقرار باشد. به ازای $p=۲$ داریم: $H^k_{\circ}(U)=W^{k,۲}_{\circ}(U)$.

۱—۹ ویژگی های مقدماتی فضای سوبولوف

قضیه ۲۹.۱ **(خواص مشتقات ضعیف)** فرض کنید $u,v\in W^{k,p}(U)$ و $|\alpha|\le k$ بنابراین

(i) برای همه مرتبه شاخص‌های α و β با ویژگی $|\alpha|+|\beta|\le k$ داریم:

$$D^\alpha u\in W^{k-|\alpha|,p}(U)$$

$$D^\beta(D^\alpha u)=D^\alpha(D^\beta u)=D^{\alpha+\beta}u$$

(ii) به‌ازای هر $\lambda, \mu \in R$ داریم:

$$D^{\alpha}(\lambda u + \mu v) = \lambda D^{\alpha} u + \mu D^{\alpha} v \;\; \lambda u + \mu v \in W^{k,p}(U) \;\; ,|\alpha| \leq k$$

(iii) اگر V یک زیر مجموعه باز از U باشد، آنگاه $u \in W^{k,p}(V)$.

(iv) اگر $\mathcal{L} \in C_{\circ}^{\infty}(U)$ آنگاه $\mathcal{L}u \in W^{k,p}(U)$ و $D^{\alpha}(\mathcal{L}u) = \sum_{\beta \leq \alpha} (\alpha_{\beta}) D^{\beta} \mathcal{L} D^{\alpha-\beta} u$ که در آن $(\alpha_{\beta}) = \dfrac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}$

۱—۱۰ فضای H^{-1}

تعریف ۳۰.۱ فضای دوگان $H_{\circ}^{1}$ را با H^{-1} نمایش می‌دهیم. به عبارت دیگر اگر $f \in H^{-1}$ آنگاه f یک تابع خطی و کراندار روی $H_{\circ}^{1}$ می‌باشد و برای مشخص نمودن رابطه بین $H_{\circ}^{1}$ و H^{-1} نماد $\langle \, , \, \rangle$ را به‌کار می‌بریم.

تعریف ۳۱.۱ اگر $f \in H^{-1}$ آنگاه

$$\|f\| = \sup\{\langle f, u\rangle | u \in H_{\circ}^{1}(U), \|u\|_{H_{\circ}^{1}} \leq 1\}$$

قضیه ۳۲.۱ (خواص H^{-1})

(i) فرض کنید $f \in H^{-1}(U)$ در این‌صورت توابع $f^{\circ}, f^{1}, \ldots, f^{n}$ متعلق به $L^{2}(U)$ موجود است به‌طوری‌که:

$$\langle f, v\rangle = \int_{U} f^{\circ} v dx + \sum_{i=\circ}^{n} f^{i} v_{x_i} dx, \; (v \in H_{\circ}^{1})$$

(ii) به علاوه داریم:

$$\|f\| = \inf \left(\int_{U} \sum_{i=\circ}^{n} |f^{i}|^{2} dx \right)^{\frac{1}{2}}$$