دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی‌تکنیک تهران)
دانشکده مهندسی هسته ای و فیزیک

پایان نامه دوره کارشناسی ارشد

مدل های کیهان شناسی ناهمگن

نگارنده:
مصطفی هاشمی

استاد راهنما:
دکتر داود کمانی

دی ۱۳۸۷

فهرست

چکیده

تا مدت ها مردم نظام حاکم بر کیهان را نظام بطلمیوسی می دانستندکه رابطه تنگاتنگی با عقاید آن مردمان و نظام فیزیکی آن زمان،نظام ارسطویی،داشت.اما پس از تلاش های کپرنیک وگالیله همان نظام با تغییراتی تبدیل به سیستم نیوتنی گردید با دو تفارت ابتدا تغییر از اندیشه زمین مرکزی به خورشید مرکزی ونکته مهمتر آن تغییر از رسیدن به علت غایی ارسطویی به نیرو محوری گالیله و نیوتن.به نظر می آمد که با قدرت پیش بینی نظام نیوتنی تغییر دیگری حداقل به زودی متصور نباشد.اما پس از ورود اینشتین به این عرصه تغییر دیگری در نظام ادراکی ما نسبت به جهان اتفاق افتاد و آن وحدت زمان–مکان و استفاده از هندسه نااقلیدسی بود.که ما آن را در فصل اول خود به اجمال بررسی کرده ایم.برای مطالعه عمیق تر میتوان به کتاب های Weinberg, Stephani, Oyvind در سطح مقدماتی وWald در سطح پیشرفته تر مراجعه کرد.پس از این تحول، مدل کیهانی به سوالی اساسی تبدیل شد.اما سختی حل معادله اینشتین،فیزیکدانان را به سمت فرض های ساده کننده ای مانند همگن در فضا–زمان و یا حل های خلا ارجاع داد که نتیجه این تلاش ها در فصل سوم آمده است،از مهمترین این مدل ها به مدل دوسیته و FRW میتوان اشاره کرد،که بهFRW مدل استاندارد کیهانشناسی گویند وبهترین تبیین از نظام کیهانی است.

اما در دهه ۷۰ (مقاله Weinberg) فرضیه همگنی جهان را با مشکل مواجه کرد.کشفیاتی در مورد جهان اولیه و ناهمگنی های اولیه،مسئله نظام کیهانی ناهمگن را جدی تر کرد.و مدل های زیکر ،زفرون، سینویلا وکسنر حاصل این دوره اند،که دچار عدم توفیق در توجیه کلی جهان(اولیه وفعلی)بودند.این تحقیقات در اوایل دهه ۹۰ رو به کاهش نهاد،اما در اواخر دهه ۹۰ به جدی شدن بحث انبساط عالم دانشمندان به این فکر افتادند که شاید علت این انبساط ناهمگنی های کیهانی باشد وبا احیا متریک قدیمی LTB امیدهایی زنده شد.نکته امیدوار کننده این فضا تطابق آن با شمع استاندارد کیهانی(ابرنواختر)است که در فصل دوم بررسی می گردد و در پایان به بررسی حرکت فرمیون ها در چند فضای ناهمگن از جمله LTB وSenovilla, Kasner خواهیم پرداخت.

فصل اول

نسبیت عام

۱-۱- منیفلد

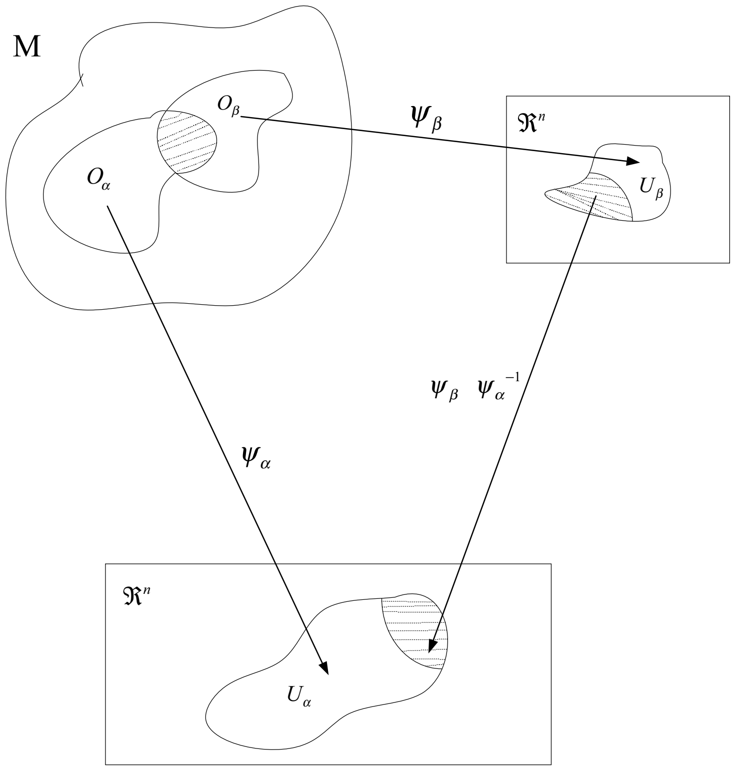
منیفلدM مجموعه‌ای از زیرمجموعه‌هایی نظیر $\{O_\alpha\}$ است که شرایط زیر را برآورده می‌کند.

الف) هر $P \in M$، حداقل به یکی از $\{O_\alpha\}$ تعلق دارد، یعنی $M \subset \{O_\alpha\}$ را می‌پوشانند.

ب) برای هر α یک نگاشت یک به یک، پوشامانند $\psi_\alpha : O_\alpha \to U_\alpha$ وجود دارد که U_α مجموعه‌ای باز از R^n است.

ج) برای هر دو مجموعه O_α و O_β که اشتراکشان ناتهی است $\{O_\alpha \cap O_\beta \neq \varnothing\}$ می‌توانیم نگاشت $\psi_\beta \;\; \psi_\alpha^{-1}$ را تعریف کنیم که $\psi_\alpha\{O_\alpha \cap O_\beta\} \subset U_\alpha \subset R^n$ را به نقاط $\psi_\beta\{O_\alpha \cap O_\beta\}$ ببرد.

ψ_α را در ریاضی چارت و در فیزیک سیستم مختصاتی می‌نامند.



شکل۱-۱-منیفلد

۱-۲- تانسور

در ریاضیات تانسور نوع (k,l) یک نگاشت خطی از فضای حاصلضرب k تا بردار دوگان و l تا بردار به R می‌باشد.

$$T : V^{*} \times \quad \times V^{*} \times V \times \quad \times V \to R \qquad (۱-۱)$$

اما آنچه در فیزیک برای ما مهم است آن است که بدانیم که تانسور در تبدیل از دستگاه مختصات قدیم (بدون پریم) به دستگاه جدید (پریم‌دار) چگونه تغییر می‌کند.

$$T'^{\mu_1' \dots \mu_k'}{}_{\nu_1' \dots \nu_l'} = T^{\mu_1 \dots \mu_k}{}_{\nu_1 \dots \nu_l} \frac{\partial x'^{\mu_1'}}{\partial x^{\mu_1}} \dots \frac{\partial x'^{\mu_k'}}{\partial x^{\mu_k}} \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x'^{\nu_1'}} \dots \frac{\partial x^{\nu_l}}{\partial x'^{\nu_l'}} \qquad ۲-۱$$

در بالا از قاعده‌ی جمع انیشتین یعنی جمع روی اندیس‌های تکراری استفاده شده است. ضمناً به تانسوری که تنها اندیس بالا داشته باشد، پادوردا و تانسوری که تنها اندیس پایین داشته باشد، هموردا می‌گویند. تانسور دلتای کرونکر $\delta^i_j = \{\begin{matrix} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{matrix}$ را تانسور آمیخته اساسی یا همسانگرد گویند. چون در دستگاه چرخیده نیز مؤلفه‌های آن یکسان است.

۱-۳- متریک ریمانی

متریک g، یک نگاشت خطی از فضای $V_p \times V_p$ (V_p فضای برداری) به اعداد می‌باشد، یعنی یک تانسور مرتبه (0,2) که ما دو شرط زیر را بر آن تحمیل می‌کنیم.

الف) تقارن

$$\forall v_1, v_2 \in V_p \to g(v_1, v_2) = g(v_2, v_1) \qquad ۳-۱$$

ب) عدم تبهگنی

$$\forall v \in V_p \ni g(v, v_1) = 0 \to v_1 = 0 \qquad ۴-۱$$

می‌توان متریک را براساس مؤلفه‌های آن به‌صورت زیر نوشت:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu \qquad ۵-۱$$

یا به‌طور خلاصه

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \qquad ۶-۱$$

اگر شرط (ب) را به‌صورت (ج) تغییر دهیم، به آن متریک شبه‌ریمانی گوییم.

ج)

$$\exists v \in V_p \ni g(v, v_1) = 0 \to v_1 = 0 \qquad ۷-۱$$

اگر متریک متقارن باشد، آنگاه مقادیر ویژه‌ی آن حقیقی خواهد بود. اگر i تا از این مقادیر ویژه آن مثبت و j تای آن منفی باشد، به زوج (i,j) امضا متریک گویند.

به زوج (i,0) متریک اقلیدسی و (i,1) متریک لورنتسی گویند.

اگر متریک لورنتسی را به منیفلدی اعمال کنیم، هر جزء فضای مماس (TpM)، آن به سه دسته تقسیم می‌شود:

$g(U,U)\quad 0$ فضاگونه

$g(U,U)=0$ نورگونه ۸-۱

$g(U,U)\quad 0$ زمان‌گونه

۱-۴- مشتق هموردا

∇ (عملگر مشتق) بر روی منیفلد M نگاشتی است که هر تانسور هموار (یا مشتق‌پذیر) نوع (k,l) را به تانسور هموار نوع (k,l+1) برده و خواص زیر را برآورده می‌کند:

$\nabla : T(k,l) \to T(k,l+1)$ ۹-۱

الف) خطی بودن

$\forall A,B \in T(k,l), \alpha,\beta \in cte$ ۱۰-۱

$\nabla_c(\alpha A^{a_1 \cdots a_k}{}_{b_1 \cdots b_l} + \beta B^{a_1 \cdots a_k}{}_{b_1 \cdots b_l}) = \alpha \nabla_c A^{a_1 \cdots a_k}{}_{b_1 \cdots b_l} + \beta \nabla_c B^{a_1 \cdots a_k}{}_{b_1 \cdots b_l}$ ۱۱-۱

ب) قاعده لایبنیتس

$\forall A \in T(k,l), B \in T(k',l')$ ۱۲-۱

$\nabla_c(AB) = (\nabla_c A)B + A\nabla_c B$ ۱۳-۱

ج) جابه‌جایی با جمع روی اندیس

$\forall A \in T(k,l)$ ۱۴-۱

$\nabla_d(A^{a_1 \cdots c \cdots a_k}{}_{b_1 \cdots c \cdots b_l}) = \nabla_d A^{a_1 \cdots c \cdots a_k}{}_{b_1 \cdots c \cdots b_l}$ ۱۵-۱

د) سازگاری با مفهوم بردارهای مماسی به عنوان مشتق جهتی روی میدان‌های اسکالر

$\forall f \in \Im, t^a \in V_p \quad t(f) = t^a \nabla_a f$ ۱۶-۱

هـ) فقدان تاب

$\forall f \in \Im \;\; \nabla_a \nabla_b f = \nabla_b \nabla_a f$ ۱۷-۱

در بعضی تئوری‌ها فرض پنجم را اضافه نمی‌کنند، آن‌گاه تانسور پادمتقارنی به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$\nabla_a \nabla_b f - \nabla_b \nabla_a f \equiv -T^c_{ab} \nabla_c f$ ۱۸-۱

که به T^c_{ab} تانسور تاب گویند. به تئوری‌هایی از نسبیت عام که شرط پنجم را لحاظ نکند، *non-metricity* گویند.

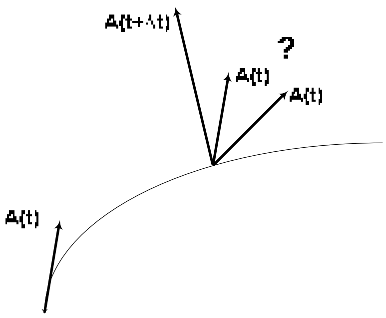
ساده‌ترین عملگر مشتقی که شرایط فوق را ارضا کند، به‌صورت $\nabla_a t^b = \partial_a t^b + \Gamma^b_{ac} t^c$ می‌باشد که اگر عملگر مشتق ما بدون تاب باشد به Γ^b_{ac}، ضریب کریستوفل نوع دوم گویند و با نماد $\{{b \atop ac}\}$ نشان می‌دهند، وگرنه در حالت کلی به آن التصاق می‌گویند.

۱-۵- انتقال موازی

در فضای اقلیدسی در تعریف مشتق می‌گفتیم $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{A(t+\Delta t)-A(t)}{\Delta t}$ اما برای انجام تفاضل همسنگ $A(t+\Delta t)$ را در نقطه‌ی اثر $A(t)$ رسم می‌کنیم و عمل حدگیری را انجام می‌دهیم اما در فضای خمیده چگونه می‌توان گفت که شرط این انتقال همسنگ یا موازی چیست؟

انتقال موازی را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$t^{c}\nabla_{c}T^{a_1\;\;a_k}{}_{b_1\;\;b_l}=0 \qquad ۱۹-۱$$



شکل ۱-۲- انتقال موازی

شرط انتقال موازی هر تانسور دلخواه نوع (k,l):

قضیه: اگر g_{ab} متریک باشد، آن‌گاه تنها یک عملگر مشتق مانند ∇_a وجود دارد که $\nabla_a g_{ab}=0$.

که می‌توان نشان داد که آن عملگر مشتق به‌صورت $\nabla_a=\partial_a+\{{c \atop ab}\}$ می‌باشد و $\{{c \atop ab}\}\equiv\frac{1}{2}g^{cd}(\partial_a g_{bd}+\partial_b g_{ad}-\partial_d g_{ab})$ (ضرایب کریستوفل تانسور نمی‌باشند.)

در صورت وجود تاب، التصاق به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\Gamma^{k}_{\mu\nu}=\{{k \atop \mu\nu}\}+\frac{1}{2}\{T_{\nu}{}^{k}{}_{\mu}+T_{\mu}{}^{k}{}_{\nu}+T^{k}{}_{\mu\nu}\} \qquad ۲۰-۱$$

که به قسمت دوم $K^{k}{}_{\mu\nu}$ یا هم تاب می‌گویند.

به $\Gamma^{k}_{\mu\nu}=\{{k \atop \mu\nu}\}$ اصطلاحاً التصاق لوی ـ چی ویتا گویند.

۱-۶- تانسور انحنا ریمان

تانسور انحنای ریمان یک تانسور نوع (۳و۱) می‌باشد که برای هر میدان برداری دوگان مانند ω_c به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\nabla_a \nabla_b \omega_c - \nabla_b \nabla_a \omega_c \equiv -R_{abc}{}^d \omega_d$$ ۲۱-۱

خواص تانسور انحنا:

$$1 - R_{abc}{}^d = -R_{bac}{}^d$$ ۲۲-۱

$$2 - R_{[abc]}{}^d = 0$$ ۲۳-۱

$$3 - \nabla_a g_{bc} = 0 \rightarrow R_{abcd} = -R_{abdc}$$ ۲۴-۱

$$4 - \nabla_{[a} R_{bc]d}{}^e = 0$$ ۲۵-۱

می‌توان نشان داد که برای التصاق لوی چی ویتا تانسور ریمان به صورت زیر است

$$R^k{}_{\lambda\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^k_{\nu\lambda} - \partial_\nu \Gamma^k_{\mu\lambda} + \Gamma^\eta_{\nu\lambda}\Gamma^k_{\mu\eta} - \Gamma^\eta_{\mu\lambda}\Gamma^k_{\nu\eta}$$ ۲۶-۱

تعداد مؤلفه‌های مستقل $R^k{}_{\lambda\mu\nu}$ در فضای n بعدی $\frac{n^2(n^2-1)}{2}$ می‌باشد.

۱-۷- تانسور ریچی و اسکالر انحنا

تانسور ریچی از جمع روی عنصر دوم و چهارم به دست می‌آید.

$$R_{ac} \equiv R_{abc}{}^b$$ ۲۷-۱

و اسکالر انحنا در حقیقت رد تانسور ریچی است.

$$R \equiv R^a_a$$ ۲۸-۱

۱-۸- تانسور وایل

برای منیفلدهای با بعد بزرگ‌تر یا مساوی ۳ به قسمت بدون اثر(رد) آن تانسور وایل می‌گویند.

$$C_{abcd} = R_{abcd} + \frac{2}{(n-1)(n-2)} R g_{a[c} g_{d]b} - \frac{2}{n-2}(g_{a[c} R_{d]b} - g_{b[c} R_{d]a})$$ ۲۹-۱

$C_{abcd} = 0$ شرط لازم و کافی برای تخت بودن به صورت همدیسی می‌باشد.

۱-۹- ژئودزی

ژئودزی را معمولاً به عنوان «کوتاه‌ترین مسیر ممکن» یا «راست‌ترین مسیر ممکن» تعبیر می‌کنند. اما در تعریف ریاضی آن را بردار مماس بر منحنی تعریف می‌کنند که در جهت خودش انتقال می‌یابد. اگر T^a همان بردار مماس باشد. شرط ژئودزی به‌صورت $T^a \nabla_a T^b = 0$ یا شرط ضعیف‌تر $T^a \nabla_a T^b = \alpha T^b$ درمی‌آید. اگر مؤلفه‌های فضای ما $x^\mu(t)$ باشد، به سادگی می‌توان نشان داد که معادله ژئودزی به‌صورت زیر درمی‌آید.

$$\frac{d^2 x^\mu}{dt^2} + \Gamma^\mu_{\sigma\nu} \frac{dx^\sigma}{dt}\frac{dx^\nu}{dt} = 0$$ ۳۰-۱

۱-۱۰- معادله انیشتین

می‌توان نشان داد که

$$\delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu k} g^{\lambda\nu} \delta g_{k\lambda}$$ ۱-۳۱

$$\delta\sqrt{g} = \frac{-1}{2}\sqrt{|g|}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}$$ ۱-۳۲

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_k \delta\Gamma^k_{\mu\nu} - \nabla_\nu \delta\Gamma^k_{\mu k}$$ ۱-۳۳

$$\delta R = R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}$$ ۱-۳۴

$$\delta g = g g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}, g = \left|\det g_{\mu\nu}\right|$$ ۱-۳۵

می‌دانیم که المان حجم در فضای D بعدی به‌صورت $\sqrt{-g}d^D x$ مـی‌باشـد، آن‌گـاه کلـی‌تـرین کنشی که می‌توان نوشت به‌صورت زیر است

$$S = \frac{1}{8\pi G}\int d^D x\sqrt{-g}(R - 2\Lambda + L_M)$$ ۱-۳۶

که Λ ثابت کیهان‌شناسی و L_M چگالی لاگرانژی ماده است.

$$0 = \delta S = \frac{1}{8\pi G}\int d^D x\{\delta[\sqrt{-g}(R-2\Lambda)] + \delta(\sqrt{-g}L_M)\}$$ ۱-۳۷

$$= \frac{1}{8\pi G}\int d^D x\{\sqrt{-g}\delta(R-2\Lambda) + (R-2\Lambda)\delta\sqrt{-g} + \delta(\sqrt{-g}L_M)\}$$ ۱-۳۸

$$= \frac{1}{8\pi G}\int d^D x\{\sqrt{-g}(R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + 0) + (R-2\Lambda)(\frac{-1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}) + \delta(\sqrt{-g}L_M)\}$$ ۱-۳۹

$$= \frac{1}{8\pi G}\int d^D x\sqrt{-g}\{(R-2\Lambda)(\frac{-1}{2}g_{\mu\nu}) + R_{\mu\nu} + \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta(\sqrt{-g}L_M)}{\delta g^{\mu\nu}}\}\delta g^{\mu\nu} = 0$$ ۱-۴۰

ضریب $\delta g^{\mu\nu}$ معادله حرکت است.

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{-1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta(\sqrt{-g}L_M)}{\delta g^{\mu\nu}} = kT_{\mu\nu}$$ ۱-۴۱

طرف اول را تانسور انیشتین با ثابت کیهان‌شناسی گویند و تنها به هندسه وابـسته اسـت، و طـرف دوم را تانسور ممنتوم انرژی می‌گویند که به توزیـع مـاده و انـرژی وابـسته اسـت. در فـصل بعـد تعدادی از مهم‌ترین $T_{\mu\nu}$ ها را معرفی می‌کنیم.

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, (8\pi G = 1)$$ ۱-۴۲

به این معادله، معادله انیشتین گویند.

$$\Lambda = 0 \rightarrow g^{\mu\nu}(R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}g_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}) \xrightarrow{4D} R - \frac{R}{2}4 = T$$ ۱-۴۳

$$T = -R \rightarrow T_{\mu\nu} - \frac{T}{2}g_{\mu\nu} = R_{\mu\nu}$$ ۱-۴۴

واضح است که $T^{\mu\nu}$ بقا دارد $(\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0)$

۱-۱۱- فضا و زمان استاتیک و ایستا و قضیه بوچال

۱-۱۱-۱-فضا زمان استاتیک

اگر دستگاهی وجود داشته باشد که در آن هیچ‌گونه تحولی نباشد. آن‌گاه به آن فضا زمان استاتیک می‌گویند، مثلاً فضا نسبت به x^a استاتیک است، هرگاه

$$\forall i \neq a \quad \begin{cases} g_{ia} = 0 \\ g_{\mu\nu,a} = 0 \end{cases} \qquad \text{۱-۴۵}$$

۱-۱۱-۲-فضا زمان ایستا

اگر دستگاه وابستگی صریح به زمان نداشته باشد، به آن فضا زمان ایستا گویند. یعنی دستگاه دارای مکان ثابتی نسبت به هم هستند و یا به بیان ریاضی دارای حداقل یک بردار کلینیک زمان‌گونه قابل تعریف باشد. هر متریک ایستا، استاتیک است اگر متریک با تغییر تحت بازگشت زمانی $(t \to -t)$ تغییر نکند.

۱-۱۱-۳-قضیه بوچال

اگر $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + g_{aa}(dx^a)^2$ یک حل استاتیک خلأ نسبت به a باشد $(T_{\mu\nu} = 0 \vee R_{\mu\nu} = 0)$ آن‌گاه جواب زیر هم یک جواب استاتیک برای خلأ است.

$$ds^2 = (g_{aa})^{\frac{2}{n-3}} g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + \frac{1}{g_{aa}}(dx^a)^2 \qquad \text{۱-۴۶}$$

۱-۱۲- شرایط انرژی

اگر u_μ ، ٤ سرعت از دید هر ناظر دلخواه باشد، آن‌گاه بر $T_{\mu\nu}$ می‌توان شرایط انرژی زیر را تحمیل کرد.

۱-۱۲-۱-شرط انرژی ضعف (WEC)

$$T^{\mu\nu}u_\mu u_\nu \geq 0 \qquad \text{۱-۴۷}$$

$T_{\mu\nu}$ باید شرط فوق را برای همه بردارهای زمان‌گونه u_μ پیروی کند، تا بگویم که شرط WEC را برآورده می‌کند. برآورده شدن این شرط به معنی این است که تمام ناظرها انرژی را مثبت اندازه می‌گیرند.

شرط فوق معادل است با:

$$\begin{cases} \rho + P_i > 0 \\ \rho \geq 0 \end{cases} \qquad ۴۸-۱$$

۱-۱۲-۲- شرط انرژی قوی(SEC)

$$(T^{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g^{\mu\nu}) u_\mu u_\nu \geq 0 \qquad ۴۹-۱$$

$$OR$$

$$R^{\mu\nu} u_\mu u_\nu \geq 0 \quad (\Lambda = 0) \qquad ۵۰-۱$$

یعنی انحنا برای u_μ ها زمان‌گونه مثبت است.

شرط معادل:

$$\begin{cases} \rho + \sum P_i \geq 0 \\ \rho + P_i \geq 0 \end{cases} \qquad ۵۱-۱$$

اگر سیال کامل هم‌فشار داشته باشیم، آن‌گاه:

$$P = \omega \rho \rightarrow \begin{cases} WEC & \omega \geq -1 \\ SEC & \omega \geq \frac{-1}{3} \end{cases} \qquad ۵۲-۱$$

۱-۱۳- اصل کیهان‌شناسی

این اصل ادامه همان اصل کوپرنیکی است که در آن جهان مرکز عالم نیست. در این راستا ما انتظار نداریم که زمین یا سیستم خورشیدی یا کهکشان خودمان و یا دیگر کهکشان‌ها مکان مورد علاقه خاصی را در جهان اشغال کند. این اصل به‌صورت زیر بیان می‌شود.

اصل کیهان‌شناسی:در هر زمان، جهان به همان سیما و ظاهر در هر نقطه‌ای عرضه می‌گردد که در دیگر نقاط است، مگر برای بی‌نظمی‌های موضوعی، یعنی ما دو نقطه منحصر به فردی از عالم نیستیم.

برای بیان ریاضی این اصل، فرض کنیم یک زمان کیهانی t وجود دارد و فرمول‌بندی این اصل در قطعات مکان‌گونه صورت پذیرد. حالتی که هر قطعه نقطه‌ی متمایزی نسبت به دیگر نقاط محسوب نمی‌گردد، به معنای همگن بودن است.

این اصل تأکید می‌کند که یک قطعه علاوه بر آن که نباید نقاط متمایزی نسبت به دیگر نقاط باشد، بلکه نباید راستای متمایزی حول دیگر نقاط داشته باشد. منیفلدی که الزاماً راستای متمایزی حول یک نقطه ندارد را ایزوتروپ (همسانگرد) می‌نامند و لذا دارای تقارن کروی حول هر نقطه

است. یک منیفلد به‌طور کلی همسانگرد است. اگر حول هر نقطه همسانگرد باشد، می‌تـوان نـشان داد که اگر یک منیفلد کلاً همسانگرد باشد آن‌گاه لزوماً همگن نیز است.

بنابراین اصل کیهان‌شناسی تأکید می‌کند که فضا ـ زمان می‌تواند به ابر صفحه‌های فـضاگونه‌ای تقسیم شود که حول هر نقطه تقارن کروی دارد.

به‌طور خلاصه اصل کیهان‌شناسی یعنی:

۱ـ یک ابررویه با یک زمان کیهانی ثابت، یک فضای بیشینه تقـارنی از تمـام فـضاهای موجـود است.

۲ـ نه‌تنها متریک $g_{\mu\nu}$ ، بلکه تمام تانسورهای کیهانی ازجمله $T_{\mu\nu}$ با توجه به ایزومترهای زیـر فضا نا وردا هستند.

فصل دوم

ابرنواختر

۲-۱- مروری بر فیزیک ستارگان

نقطه‌ی آغاز تولد هر ستاره‌ای سحابی است. در فضای میان‌ستاره‌ای، چگالی متوسط ماده در سحابی فقط چند هزار اتم در سانتی‌متر مکعب است. دما تنها چند درجه بالاتر از صفر مطلق است. در آغاز تولد نخستین نسل از ستارگان، سحابی‌ها فقط مرکب از هیدروژن و هلیوم بودند.

اصلی‌ترین عامل تحول در ستاره، گرانش است و مهم‌ترین اثر آن ایجاد تراکم در ماده و سپس تشکیل ستاره می‌باشد و شرایط را مهیا می‌کند تا نیروهای هسته‌ای نقش سازنده‌ای در همجوشی هسته‌ای داشته باشند.

۲-۱-۱رده طیفی ستارگان

پس از آن‌که فرانهوفر در قرن نوزدهم خطوط تیره‌ای در طیف خورشید یافت. فیزیکدانان توانستند با استفاده از آن تحلیل‌هایی در مورد خورشید و بعد از آن تحلیل‌هایی در مورد فیزیک هر ستاره ارائه دهند.

جدول (۲-۱): اطلاعات پنهان در طیف ستاره

ویژگی‌های طیفی	نتایج بدست آمده
طول موج یا فرکانس حداکثر تابش	دمای ستاره
خطوط طیفی	ترکیبات ستاره
شدت خطوط طیفی	ترکیبات ستاره و دمای ستاره
پهنای خطوط طیفی	دما، سرعت چرخش، چگالی، میدان مغناطیسی
اثر دوپلر	سرعت جابجایی ستاره در خط دید ما (سرعت شعاعی)

۲-۲- انتقال به سرخ

تغییرات طول موج به طول موج اولیه را به عنوان پارامتر انتقال به سرخ معرفی می‌کنیم.

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\lambda_1} \qquad (۱-۲)$$

حال وضعیت انتقال به سرخ را برای فضای FRW[1] بررسی می‌کنیم. برای محاسبه میزان تغییر بسامد، مکان خود را در مبدأ دستگاه مختصات (r=0)در نظر می‌گیریم (برابر اصل کیهان‌شناسی این فرض مجاز است). یک موج الکترومغناطیسی که در راستای r و با Θ وϕ ثابت به سمت ما در حرکت است را در نظر می‌گیریم. مسئله حرکت یک موج به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$0 = dC^2 = dt^2 - R^2(t)\frac{dr^2}{1-kr^2} \qquad \text{۲-۲}$$

اگر موج در مختصات r ، Θ وϕ و در زمان t_1 کهکشان را ترک کند و در زمان t_0 به ما برسد، داریم:

$$\int_{t_0}^{t_1}\frac{dt}{R(t)} = \int_0^r\frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} = \begin{cases}\sin^{-1}(r_1) & k=1\\ r_1 & k=0\\ \sinh^{-1}(r_1) & k=-1\end{cases} \qquad \text{۳-۲}$$

اگر موج بعدی در زمان $t_1+\Delta t_1$ چشمه نورانی را ترک کند و در زمان $t_0+\Delta t_0$ به ما برسد، داریم:

$$\int_{t_1+\Delta t_1}^{t_0+\Delta t_0}\frac{dt}{R(t)} = \int_{t_1}^{t_0}\frac{dt}{R(t)} = \frac{\Delta t_0}{R(t_0)} + \int_{t_1}^{t_0}\frac{dt}{R(t)} - \frac{\Delta t_1}{R(t_1)} \qquad \text{۴-۲}$$

$$\frac{\Delta t_0}{R(t_0)} = \frac{\Delta t_1}{R(t_1)} \qquad \text{۵-۲}$$

اگر فرکانس چشمه‌ی نوری برابر v_1 و فرکانس نوری که به ما می‌رسد v_0 باشد، آن‌گاه:

$$\frac{\upsilon_0}{\upsilon_1} = \frac{\Delta t_1}{\Delta t_0} = \frac{R(t_1)}{R(t_0)} = \frac{\lambda_0}{\lambda_1} \qquad (\lambda_0\upsilon_0 = \lambda_1\upsilon_1)$$

$$Z = \frac{\lambda_0-\lambda_1}{\lambda_1} = \frac{R(t_0)}{R(t_1)} - 1 \qquad \text{۶-۲}$$

دقت شود که v_1 و λ_1 فرکانس و طول موجی است که از منبع نورانی خارج می‌شود و v_0 و λ_0 فرکانس و طول موجی است که به ما می‌رسد و ما آن را اندازه می‌گیریم.

اگر $Z>0$ آن‌گاه $\lambda_0 > \lambda_1$ بوده، لذا ما شاهد انتقال به سرخ در طول موج نور دریافتی هستیم.

اگر $Z<0$ آنگاه $\lambda_0 < \lambda_1$ بوده، لذا ما شاهد انتقال به آبی در طول موج نور دریافتی هستیم.

اگر جهان در حال انبساط باشد، آن‌گاه $R(t_o) > R(t_1)$، پس انتقال به سرخ را شاهد خواهیم بود و اگر در حال انقباض، آن‌گاه $R(t_o) < R(t_1)$ و انتقال به آبی داریم.

فاصله درخشندگی،D_L، به‌صورت مقدار درخشش یک جسم نورانی با تابع Z معرفی می‌شود. شدت نور یک جسم نورانی با افزایش فاصله به‌صورت عکس مربع فاصله تغییر می‌کند.

---

[1] FRW- را در فصل مدل‌های همگن مطالعه می‌کنیم.

پارامترهای درخشندگی حقیقی یک جسم درخشنده که با L نمایش می‌دهند، درخشندگی ظاهری که با l نمایش می‌دهیم و فاصله درخشندگی با رابطه زیر به هم مربوط می‌شوند.

$$D_L = \sqrt{\frac{L}{4\pi l}} \qquad ۷-۲$$

لازم به توضیح است که درخشندگی ظاهری یک ستاره به فاصله آن ستاره از مبدأ سنجش بستگی دارد، در حالی که درخشندگی حقیقی یک ستاره ـ که عبارتست از مقدار انرژی گسیل شده از واحد سطح ستاره ـ بستگی به دمای سطح ستاره داشته و از قانون استنان ـ بولتزمن پیروی می‌کند. در یک جهان در حال انبساط با ثابت کیهانی Λ فاصله درخشندگی عبارت است از:

$$D_L = \frac{(1+z)c}{H_0 |k|^{\frac{1}{2}}} s\left\{ |k|^{\frac{1}{2}} \int \left[k(1+z')^2 + \Omega_M (1+z')^3 + \Omega_\Lambda \right]^{-\frac{1}{2}} dz' \right\} \qquad ۸-۲$$

که در آن $\Omega_M = \frac{8\pi G}{3H_o z}\rho_M$ ثابتی که تنها به چگالی جرمی جهان (ρ_M) وابسته است و $\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda C^2}{3H_o z}$ ارتباط ثابت کیهانی را با پارامتر انبساط H_0 نشان می‌دهد. K عامل خمیدگی و

$$k = 1 - \Omega_M - \Omega_B \qquad ۹-۲$$

$s(x)$ تابعی است که براساس مقادیر مختلف K به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$s(x) = \begin{cases} \sin(x) & k > 0 \\ x & k = 0 \\ \sinh(x) & k < 0 \end{cases} \qquad ۱۰-۲$$

شتاب منفی کیهانی در این مدل برابر است با:

$$q_o = \frac{\Omega_m}{2} - \Omega_\Lambda \qquad ۱۱-۲$$

این معادله به سادگی قابل محاسبه و انتگرال‌گیری نیست. لذا می‌توان از بسط تیلور و این معادله استفاده کرد که:

$$D_L = \frac{C}{H_o}\left\{ z + z^2 (\frac{1-q_o}{2}) + \phi(z^3) \right\} \qquad ۱۲-۲$$

از معادله فوق درمی یابیم که در جهان نزدیک، ساختار درخشندگی به‌طور خطی با Z متناسب است.

در جهان دور، D_L وابسته به q_o و مقدار و نوع موادی که جهان را به وجود می‌آورد.

ضمناً یک رابطه‌ی خوب براساس یک ناوردای ستاره‌شناسی (m-M) عبارتست از

$$d_L = 10^{1+\frac{m-M}{5}} P_c \qquad , Pc=3.26125 \text{ Light/year} \qquad ۱۳-۲$$