

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر

گروه آمار

پایان نامه کارشناسی ارشد آمار

کرایش محض

عنوان:

برآورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامترهای مدل مارکف پنهان و نیمه مارکف پنهان

نخارش:

زینب قلیزاده کزور

استاد راهنما:

دکتر غلامعلی پرہام

استاد مشاور:

دکتر محمد رضا زاد کرمی

خرداد ۸۹

آنکه مرا کلامی می آموزد مرا بنده خود می کند.

شکر و سپاس ایزدانا را که توان آموختن عطا فرمود و این یگانه معلم، هستی معلمان را برترین جانشینان خود در عرصه کیتی برگزید. اکنون که به مدد ایزد توانا توانسته ام رساله کارشناسی ارشد خود را فراهم آورم بر خود لازم می دانم کمال تقدیر و شکر را از دکتر غلامعلی پیرام که راهنمایی این رساله را بر عهده داشته و مرا از راهنمایها و مساعدت های بی دینشان بهره مند نموده اند داشته باشم و از یگانه دوست برای ایشان و خانواده محترمشان توفیق، سعادت و سلامت روز افزون خواستارم. و همچنین مشاور ارجمند جناب آقای دکتر محمد رضا زادگرمی که نظرات عالمانه ایشان در بهبود و رفع نواقص این رساله یاری گری بی بدیل بود. و نیز از دکتر رضایی و دکتر دانشخواه که داور این رساله را بر عهده داشتند و کمال امتنان را مبذول داشتند و از ناظر این رساله جناب آقای دکتر چینی پرواز به خاطر نظارت شان تقدیر و شکر می نمایم.

اکنون که در حال نگارش این سطور، ستم خاطر اتم آرام آرام ورق می خورند، روزیایی که مادرم چه کودکانه زانو بر زمین زد تا بلندای حضورش را به اندازه همه کودکی من به کودکی غرق در غرور کودکانش هدیه کند و او را ملو از عشق مادرانه رسپار سرزمین مقدس دانستن کند. پدرم که همواره تکیه بر استواری قاش زده و چون نیلوفر سی در قد کشیدن کرده ام و نیک می دانم اگر استواری قامت، پچوسروش نبود تمام تلاش من هرگز راهی برای دیدن آسمان نمی یافت.

و بمسرم که همواره در این دوران کوتاه اما، پر از تلاش تجلی امید به آینده و نگرشی ژرف به تحصیل علم و ایمان به خواستن و توانستن بود و الگویی بس بزرگ در سگیایی و ثبات قدم دیده بودن مسیر پر از فراز و نشیب زندگی. و پدر و مادر، بمسرم که بی شک بزرگ حامیان ماب به مدد ایزدانا در زندگی مشرکمان بوده و خواهند بود.

خاطراتی که بی حضور معلمان بزرگ انسانهایی که بی حضورشان تاریخ نامی قدم برداشتن ندارد، هرگز رقم نخوردند و اساتیدی که افتخار ساگردیشان را حضرت دوست به دست رحمتش عطایم فرمود.

از دوستان بسیار عزیزم حمیده احمدی، فاطمه جهانبازی، نسیر کوردزی و الهام مختاری که در این میسر به بنده لطف فراوان داشته اند تشکر می‌نمایم.

بی‌همگان به سرشود بی‌توبه سر نمی‌شود جای تو دارد این دلم جای دگر نمی‌شود.

مهدی جان همه سلاح علم برگزیده ایم برای یاری تو!

اکنون که برگزینی دیگر از زندگی ایستاده ام حاصل تلاش و اشتیاق روزهای متمادی ام را تقدیم می-

دارم به

او که روزی خواهد آمد

و تقدیم به پدر و مادر مهربان و همسفر ذکاوارم که با صبر و حوصله شاید به ثمر رسیدن پایان نامه و حامی من در حنطه
حنطه مراحل تحصیل بودند.

بسمه تعالی

«چکیده پایان نامه»

نام خانوادگی دانشجو: قلیزاده گزور	نام: زینب
عنوان پایان نامه: برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامترهای مدل مارکف پنهان و نیمه مارکف پنهان	
استاد راهنما: دکتر غلامعلی پرهام	
درجه تحصیلی: کارشناسی ارشد	رشته: آمار
گرایش: محض	
محل تحصیل (دانشگاه): شهید چمران اهواز	
دانشکده: علوم ریاضی و کامپیوتر	
تاریخ فارغ التحصیلی: ۸۹/۳/۱۹	
تعداد صفحات: ۱۳۲	
کلیدواژه‌ها: مارکف پنهان، نیمه مارکف پنهان، الگوریتم EM، الگوریتم ویتربی، برآوردگر ماکسیمم درستنمایی، توزیع زمان اقامت.	
چکیده: مدل‌های مارکف پنهان ابزار آماری قدرتمندی برای مدل‌بندی دنباله‌هایی هستند که توسط یک فرایند زیرین غیرقابل مشاهده تولید شده‌اند. مدل‌های نیمه مارکف پنهان تعمیمی از مدل‌های مشهور مارکف پنهان هستند. این مدل‌ها انعطاف پذیری بیشتری برای توزیع زمان اقامت دارند، به وضوح توزیع زمان اقامت در مدل‌های مارکف پنهان فقط از توزیع هندسی تبعیت می‌کند. مسئله برآورد پارامترهای مدل‌های مارکف پنهان و نیمه مارکف پنهان کار آسانی نیست. در این پایان‌نامه برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامترهای زنجیره‌های مارکف پنهان و نیمه مارکف پنهان محاسبه گردیده و خواص مجانبی برآوردگرها بررسی شده است. در پایان، کاربرد این مدل‌ها را با استفاده از دو مثال واقعی نشان می‌دهیم. مثال اول بی‌ثباتی درآمد صادرات غیرنفتی ایران طی سال‌های ۱۳۴۹ تا ۱۳۸۶ می‌باشد، نتایج تحلیل ما نشان می‌دهد که بی‌ثباتی درآمد صادرات نفتی باعث بی‌ثباتی درآمد صادرات غیرنفتی ایران می‌باشد. مثال دوم تعداد زمین‌لرزه‌های بزرگ جهان در سال‌های ۱۹۰۰ تا ۲۰۰۶ می‌باشد.	

فهرست مطالب

۱	فصل اول کلیات و تاریخچه
۱	۱-۱ مقدمه
۳	۲-۱ تاریخچه
۶	فصل دوم مدل‌های مارکف پنهان
۷	۱-۲ پیش نیاز
۷	۱-۱-۲ توزیع‌های آمیخته مستقل
۱۲	۲-۱-۲ زنجیرهای مارکف
۱۵	۲-۲ مدل‌های مارکف پنهان
۱۶	۱-۲-۲ مدل مارکف پنهان پایه
۱۹	۳-۲ انواع مدل مارکف پنهان
۲۲	فصل سوم برآورد پارامترهای مدل مارکف پنهان
۲۲	۱-۳ مقدمه
۲۸	۱-۱-۳ سه مسئله عمده در مدل‌های مارکف پنهان و راه حل آن‌ها
۲۸	۲-۳ محاسبه احتمال دنباله معینی از مشاهدات
۲۸	۱-۲-۳ الف) روش مستقیم
۳۰	۲-۲-۳ ب) روش بازگشتی
۳۳	۳-۲ یافتن بهینه‌ترین دنباله وضعیت‌های ممکن

۳۵	الگوریتم ویتربی	۱-۳-۳
۳۷	برآورد پارامترهای مدل مارکف پنهان	۴-۳
۴۲	ویژگی‌های برآوردگرهای ماکسیمم درست‌نمایی	۵-۳
۴۳	نمادگذاری و فرض‌ها	۱-۵-۳
۴۴	نتیجه اصلی	۲-۵-۳
۴۶	فصل چهارم مدل‌های نیمه مارکف پنهان	
۴۸	تعاریف مقدماتی	۱-۴
۴۸	زنجیره‌های نیمه مارکف	۱-۱-۴
۵۰	مدل‌های نیمه مارکف پنهان	۲-۱-۴
۵۱	تابع درست‌نمایی مدل نیمه مارکف پنهان	۲-۴
۵۳	برآوردگر ماکسیمم درست‌نمایی جزئی	۱-۲-۴
۵۴	برآوردگر ماکسیمم درست‌نمایی کامل	۲-۲-۴
۵۶	الگوریتم EM برای مدل‌های نیمه مارکف پنهان	۳-۴
۵۷	تابع Q	۱-۳-۴
۶۰	الگوریتم پیشرو - پسرو	۲-۳-۴
۶۳	تکرار پیشرو	۳-۳-۴
۶۵	تکرار پسرو	۴-۳-۴
۶۷	توزیع زمان اقامت	۵-۳-۴
۶۸	تابع Q براساس برآوردگر درست‌نمایی کامل	۶-۳-۴
۷۰	تابع Q براساس برآوردگر درست‌نمایی جزئی	۷-۳-۴
۷۱	برآورد مجدد پارامترها	۸-۳-۴
۷۱	پارامترهای آغازین	۹-۳-۴
۷۲	احتمالات انتقال	۱۰-۳-۴
۷۳	توزیع اقامت حالت	۱۱-۳-۴
۸۰	مولفه‌ی مشاهدات	۱۲-۳-۴

۸۲	ویژگی‌های مجانبی برآوردهای ماکسیمم درست‌نمایی	۴-۴
۸۵	به‌طور مجانبی نرمال بودن	۴-۴-۱
۸۷	فصل پنجم کاربرد مدل‌های مارکف پنهان	
۸۷	مقدمه	۵-۱
۸۸	تعریف بی‌ثباتی صادرات	۵-۱-۱
۸۸	تمرکز کالایی	۵-۱-۲
۸۹	تمرکز جغرافیایی	۵-۱-۳
۹۰	بی‌ثباتی درآمد صادراتی ناشی از بی‌ثباتی در نرخ ارز	۵-۱-۴
۹۰	بی‌ثباتی درآمد صادرات نفت	۵-۱-۵
۹۱	اندازه‌گیری شاخص‌های تمرکز کالایی و جغرافیایی	۵-۱-۶
	اندازه‌گیری شاخص‌های بی‌ثباتی درآمد صادرات غیرنفتی، نرخ ارز	۵-۱-۷
۹۲	و درآمد نفت	
۹۴	مثال درآمد صادرات غیرنفتی ایران	۵-۲
۹۴	انتخاب توزیع شرطی مشاهدات	۵-۲-۱
۹۵	انتخاب پارامترهای مدل	۵-۲-۲
۹۶	انتخاب مقادیر اولیه مدل	۵-۲-۳
۹۸	اجرای الگوریتم بوم ولج	۵-۲-۴
۹۸	پرده برداری از وضعیت‌های پنهان	۵-۲-۵
۹۹	نتیجه‌گیری	۵-۲-۶
۱۰۰	مثال زمین لرزه	۵-۳
۱۰۲	آمیخته‌ای از توزیع‌های پواسن	۵-۳-۱
۱۰۴	مدل مارکف پنهان برای سری‌های زمین‌لرزه	۵-۳-۲
۱۰۵	انتخاب مقادیر اولیه	۵-۳-۳
۱۰۶	برآورد پارامترهای مدل	۵-۳-۴
۱۰۶	اجرای الگوریتم ویتربی	۵-۴

- ۵-۵ مدل نیمه مارکف پنهان برای سری زمین لرزه ۱۰۷
- ۱-۵-۵ انتخاب مقادیر اولیه ۱۰۷
- ۲-۵-۵ برآورد پارامترهای مدل ۱۰۸
- ۶-۵ مقایسه‌ی سه مدل ۱۰۹

چکیده:

فصل ۱

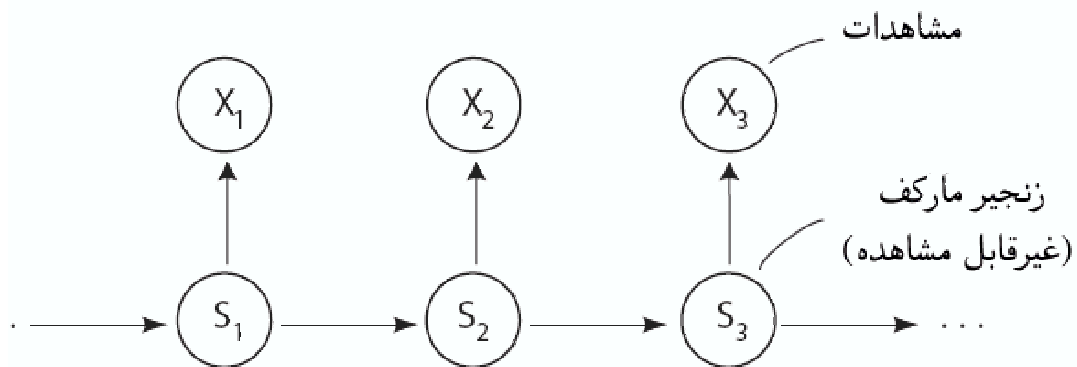
کلیات و تاریخچه

۱-۱ مقدمه

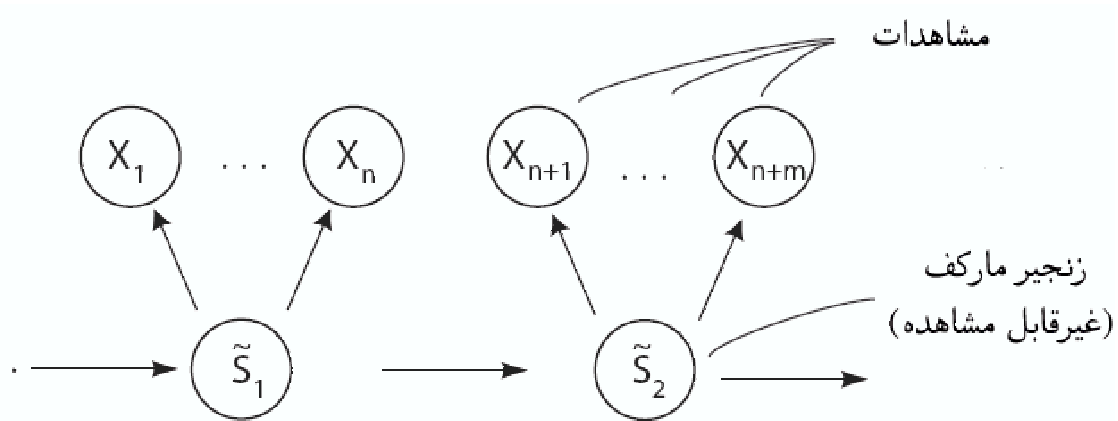
مدل‌های مارکف پنهان و مدل‌های نیمه مارکف پنهان، مدل‌هایی با اهداف عمومی و انعطاف‌پذیری بیشتر برای سری‌های زمانی تک متغیره و چند متغیره، به‌ویژه برای سری‌های گسسته مقدار، سری‌های چرخشی^۱ و انواع بسیار زیادی از مشاهدات می‌باشند. می‌توان آنها را به‌عنوان کلاس خاصی از مدل‌های آمیخته در نظر گرفت. مدل‌های مارکف پنهان و مدل‌های نیمه مارکف پنهان ویژگی‌های مشترکی دارند از جمله اینکه هر دو از دو فرآیند تصادفی ساخته شده‌اند: یک فرآیند قابل مشاهده و یک فرآیند پنهان (غیرقابل مشاهده). ساختار مدل‌های مارکف پنهان و مدل‌های نیمه مارکف پنهان در شکل ۱.۱ و ۲.۱ به ترتیب نشان داده شده است. مدل‌ها از دو فرآیند زیر تشکیل شده‌اند:

- یک زنجیر (نیمه) مارکف S_t که وضعیت در زمان t را مشخص می‌کنند، و
- فرآیند وابسته به وضعیت X_t که مشاهدات وابسته به وضعیت کنونی S_t را تولید می‌کند.

^۱ Circular Series



شکل ۱.۱: ساختار مدل مارکف پنهان



شکل ۲.۱: ساختار مدل نیمه مارکف پنهان

به شرط وضعیت پنهان در زمان t ، X_t ها ویژگی استقلال شرطی را دارند. یک پیامد بسیار مهم از این فرض ساختار همبسته‌ی داده‌های مشاهده شده است. تابع خود همبستگی مدل مارکف پنهان به دلیل ویژگی مارکف پنهان، شکل خاصی دارد، مدل‌های نیمه مارکف پنهان انعطاف‌پذیری بیشتری دارند و تنوع وسیعی از ساختارهای وابسته زودگذر^۲ را نشان می‌دهند. مدل‌های مارکف پنهان و مدل‌های نیمه مارکف پنهان بیش از دو دهه در کاربردهای فرآیند سیگنال، به ویژه در زمینه‌ی تشخیص گفتار خودکار (فرگوسن^۳، ۱۹۸۰؛ رابینر^۴ ۱۹۸۹) استفاده شده است. در این

^۲ Temporal Dependence

^۳ Ferguson

^۴ Rabiner

مقالات، آن‌ها در مورد فرآیند غیرقابل مشاهده استنباط می‌کنند. در مدل‌بندی سری‌های زمانی اقتصادی، مدل‌های راه‌گزینی - رژیم^۵ براساس کارهای ابتدایی همپلتون^۶ (۱۹۸۹، ۱۹۹۹) کاربرد بسیار خوبی از مدل‌های نیمه مارکف پنهان می‌باشند.

۲-۱ تاریخچه

مطالعه‌ی مدل‌های مارکف پنهان در اواسط قرن ششم با مقاله بوم و پتری^۷ (۱۹۶۶) آغاز شد. کاربردهای این مدل‌ها به سرعت در زمینه‌های دیگر مانند:

- انواع گوناگون تشخیص: نماها، گفتار، دست‌خط‌ها، امضا
- بیوانفورماتیک: تحلیل دنباله‌های زیستی مثل DNA
- محیط: جهت باد، بارش، زمین لرزه
- مالی: سری‌های بازگشتی ...
- مدل‌یابی خطاهای غیرمترقبه در شبکه‌های دیجیتالی .

بسط یافت. کاربردهای مدل‌های مارکف پنهان عبارتند از رایبیر (۱۹۸۹) که در زمینه‌ی تشخیص گفتار کار کرده است، الیوت^۸ و همکاران (۱۹۹۵) دوربین و همکاران (۱۹۹۸) روی تحلیل دنباله‌های زیستی، مدل‌های احتمالی پروتئین و اسیدهای نوکلئیک کار کرده‌اند، کوسکی^۹ (۲۰۰۱) نیز مدل‌های مارکف پنهان را در زمینه‌ی بیوانفورماتیک به کار گرفته است.

کاربردهای مدل مارکف پنهان در زمینه‌های ذکر شده عمدتاً به دلیل تنوع پذیری و کشش‌پذیری ریاضی آن است. بعلاوه، جنبه‌های گوناگونی از مدل‌ها در نظر گرفته شده است، مانند، برآورد مرتبه‌ی مدل‌های مارکف پنهان (رایدن^{۱۰}، ۱۹۹۵)، ویژگی‌های مجانبی برآوردگرهای ماکسیمم

^۵ Regime-Switching Models

^۶ Hamilton

^۷ Baum and Petrie

^۸ Elliott

^۹ Koski

^{۱۰} Ryden

درست‌نمایی برای مدل‌های مارکف پنهان (بیکل و همکاران^{۱۱} ۱۹۹۸، رایدن ۱۹۹۵ متیاس و داک^{۱۲}، ۲۰۰۱) و بیان قضیه‌ی ارگودیک برای آنتروپی نمونه و چگالی‌های آنتروپی نسبی در زمینه مدل‌های مارکف پنهان (مرهاو و افریم^{۱۳}، ۲۰۰۲).

فرگوسن (۱۹۸۰) مدل‌های نیمه مارکف پنهان را به جای مدل‌های مارکف پنهان برای مدل‌بندی تشخیص گفتار استفاده کرد زیرا مدل‌های مارکف پنهان انعطاف‌پذیری لازم را برای توصیف زمان سپری شده در یک حالت نداشتند. بعد از این کار ابتدایی، چندین مسئله در رابطه با زنجیره‌های نیمه مارکف پنهان توسط نویسنده‌های متفاوت مثل لوینسن^{۱۴} (۱۹۸۶)، گودون و کوکوزا-تایونت^{۱۵} (۱۹۹۰)، سنسوم و تامسون^{۱۶} (۲۰۰۱)، گودون (۲۰۰۳) یو و کوبایاشی^{۱۷} (۲۰۰۳) تحقیق شد و فرض‌های پارامتری متفاوتی برای اقامت در یک حالت و توزیع مشاهدات در نظر گرفته شد. همچنین ویژگی‌های مجانبی برآوردگرهای ماکسیمم درست‌نمایی برای مدل‌های نیمه مارکف پنهان توسط باربو و لیموس^{۱۸} (۲۰۰۵) بررسی گردید.

در ادامه پارامترهای مدل‌های نیمه مارکف پنهانی را برآورد می‌کنیم که متعلق به کلاس مدل‌های نیمه مارکف پنهان از راست سانسور شده، می‌باشند و به تازگی مورد توجه قرار گرفته‌اند. برخلاف مدل فرگوسن (۱۹۸۰)، مدل‌های نیمه مارکف پنهان از راست سانسور شده به این فرض که پایان دنباله به طور خودکار بر خروج از یک حالت منطبق باشد، نیاز ندارند. چنین فرضی برای بسیاری از سری‌های زمانی مالی مخصوصاً سری‌های بازگشت روزانه غیر واقعی هستند.

این پایان نامه به صورت زیر مرتب شده است:

در فصل ۲ ابتدا دو مولفه‌ی اصلی مدل‌های مارکف پنهان یعنی، مدل‌های آمیخته مستقل و زنجیره‌های مارکف گسسته را معرفی می‌کنیم، سپس ساختار مدل‌های مارکف پنهان را توصیف می‌کنیم. با استفاده از مثال سری‌های بازگشت رابطه‌ی بین مدل‌های مارکف پنهان و مدل‌های آمیخته مستقل را بیان می‌کنیم و در آخر تعمیم‌های مدل مارکوف پنهان را شرح می‌دهیم.

^{۱۱}Bickel

^{۱۲}Matias and Douc

^{۱۳}Merhav and Ephraim

^{۱۴}Levinson

^{۱۵}Cocozza-Thivent

^{۱۶}Sansom and Tomson

^{۱۷}Guedon, Yu and Kobayashi

^{۱۸}Barbo and Limios

در فصل سه به سه سؤال اساسی که در هر مدل مارکف پنهان مطرح است، می‌پردازیم. ابتدا محاسبه احتمال دنباله‌ی معینی از مشاهدات و چگونگی یافتن بهینه‌ترین دنباله حالت‌های ممکن برای دنباله مشاهدات معین را شرح می‌دهیم، سپس به اساسی‌ترین مسئله یعنی برآورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامترهای مدل با استفاده از الگوریتم بوم ولج^{۱۹} که به الگوریتم EM معروف است، می‌پردازیم، در نهایت ویژگی‌های مجانبی برآوردگرهای ماکسیمم درست‌نمایی را بیان می‌کنیم.

در فصل ۴ ابتدا زنجیر نیمه مارکف و زنجیر نیمه مارکف پنهان را معرفی می‌کنیم، همچنین تابع درست‌نمایی مدل نیمه مارکف پنهان را به دست می‌آوریم. در ادامه روش به دست آوردن برآوردگرهای ماکسیمم درست‌نمایی جزئی و برآوردگرهای ماکسیمم درست‌نمایی کامل را شرح می‌دهیم، و در پایان فصل ویژگی‌های مجانبی برآوردگرهای ماکسیمم درست‌نمایی پارامترهای زنجیر نیمه مارکف پنهان بیان می‌کنیم.

در فصل ۵ روی دو مثال واقعی کار کرده‌ایم، مثال اول مربوط به تحلیل بی‌ثباتی صادرات غیر نفتی ایران می‌باشد که از مدل مارکف پنهان برای مدل‌بندی آن استفاده کرده‌ایم. در مثال دوم از سری تعداد زمین لرزه‌های بزرگ جهان استفاده کرده‌ایم و سه مدل مارکف پنهان و نیمه مارکف پنهان و آمیخته پواسن را برای آن به کار برده‌ایم.

^{۱۹}Baum Welch

فصل ۲

مدل‌های مارکف پنهان

در مدل‌های مارکف پنهان، توزیعی که مشاهدات را تولید می‌کند وابسته به حالت زیرین و غیرقابل مشاهده‌ی زنجیر مارکف است. در این فصل ما به معرفی مدل‌های مارکف پنهان می‌پردازیم و پایه‌های نظری آن را توضیح می‌دهیم. مدل‌های مارکف پنهان ویژگی‌های زیر را دارند (مکدونالد و زوچینی^۱، ۱۹۹۷):

- (۱) موجود بودن تمام گشتاورها: میانگین، واریانس، خود همبستگی
- (۲) آسان بودن محاسبه تابع درستنمایی.
- (۳) توزیع‌های حاشیه‌ای به آسانی تعیین می‌شوند و مشاهدات گمشده با اثرهای کمتری به کار می‌روند.
- (۴) توزیع‌های شرطی موجودند.
- (۵) شناسایی داده‌های پرت ممکن است و
- (۶) توزیع‌های پیش‌بینی قابل محاسبه‌اند.

^۱ Macdonald and Zucchini

به‌علاوه، مدل‌های مارکف پنهان در بسیاری موارد کاربرد دارند و به آسانی می‌توان متغیرهای کمکی اضافی را تعریف کرد. در بسیاری از کاربردها، مدل دو وضعیتیتی ساده یک برازش منطقی را فراهم می‌کند. در این فصل، در بخش ۲-۱ دو مولفه‌ی اصلی مدل‌های مارکف پنهان یعنی، مدل‌های آمیخته مستقل و زنجیرهای مارکف گسسته را معرفی می‌کنیم. در بخش ۲-۲ ساختار مدل‌های مارکف پنهان را توصیف می‌کنیم. تعمیم‌های مدل مارکف پنهان را در بخش ۲-۳ ارائه می‌دهیم.

۱-۲ پیش نیاز

در این بخش مفاهیمی را که برای درک ساختار اساسی مارکف پنهان مورد نیاز است، شرح می‌دهیم. چون توزیع حاشیه‌ای مدل مارکف پنهان یک مدل آمیخته گسسته است، ابتدا یک طرح کلی از توزیع‌های آمیخته را در زیربخش ۲-۱-۱ ارائه می‌دهیم، سپس زنجیرهای مارکف را در زیربخش ۲-۱-۲ معرفی می‌کنیم زیرا فرآیند انتخاب پارامترهای یک مدل مارکف پنهان توسط زنجیر مارکف مدل‌بندی می‌شود.

۱-۱-۲ توزیع‌های آمیخته مستقل

به‌طور کلی یک مدل آمیخته مستقل^۲، ترکیبی محدب از چند توزیع مستقل است. در بعضی کاربردها منطقی است فرض کنیم که ناهمگنی جامعه با آمیخته‌ای پیوسته مدل‌بندی شود. برای جزئیات بیشتر می‌توان به بوهنینگ^۳ (۱۹۹۹) مراجعه کرد. با وجود این توجه ما روی آمیخته‌های گسسته است، هرچند توزیع‌های مولفه‌ای می‌توانند گسسته یا پیوسته باشند. در حالتی که مدل آمیخته مستقل از دو مولفه تشکیل شده باشد، توزیع‌های آمیخته به‌وسیله دو متغیر تصادفی X_0 و X_1 و یا بوسیله تابع احتمال یا تابع چگالی احتمال آن‌ها توصیف می‌شود.

متغیر تصادفی	تابع احتمال	pdf
X_0	$P_0(x)$	$f_0(x)$
X_1	$P_1(x)$	$f_1(x)$

^۲ Independent Mixture Distribution

^۳ Bohning

همچنین به یک متغیر تصادفی گسسته به نام فرآیند پارامتر برای تکمیل مدل نیاز می‌باشد. فرآیند پارامتر را می‌توان با پرتاب یک سکه تصور کرد که اگر شیر بیاید یک مشاهده از X_1 و اگر خط بیاید یک تحقق از X_0 به وقوع پیوسته است. در عمل ما نمی‌دانیم کدام روی سکه رخ داده است، تنها مشاهدات تولید شده توسط X_0 و X_1 قابل مشاهده‌اند. در اکثر موارد نمی‌توان متغیری که آنها را تولید کرده شناسایی کرد. با داشتن احتمال و توزیع هر مولفه به آسانی می‌توان تابع چگالی احتمال مدل آمیخته را حساب کرد. اگر متغیر تصادفی X نتیجه مدل آمیخته باشد، تابع چگالی احتمال X عبارت است از:

$$f(x) = \pi_0 f_0(x) + \pi_1 f_1(x)$$

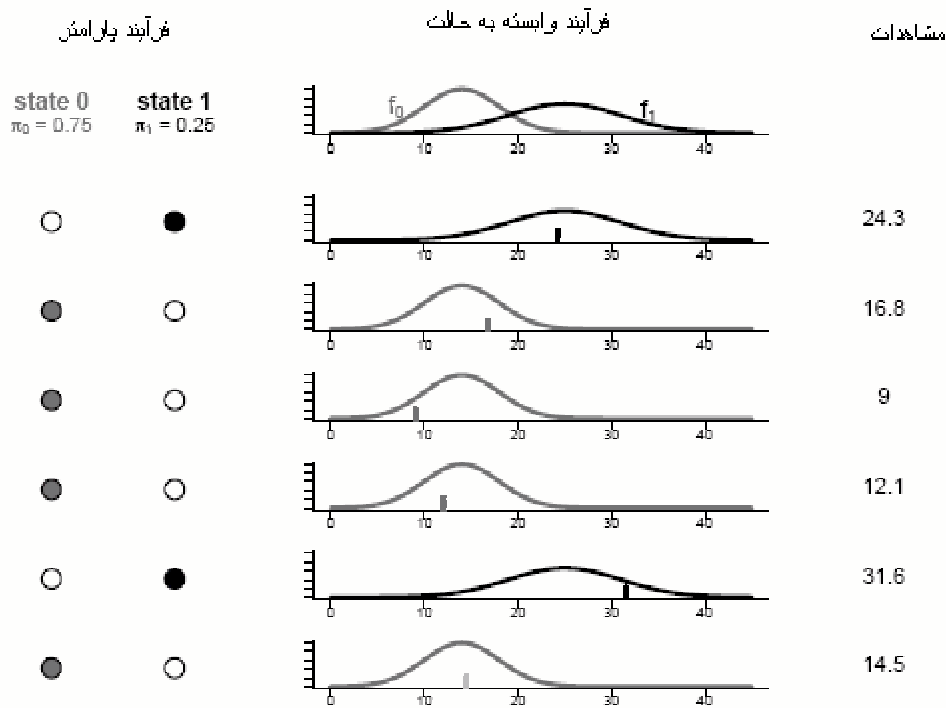
تعمیم این مدل به J مولفه کار بسیار ساده‌ای است. فرض کنید وزن‌های $\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_{J-1}$ مشخص کننده مولفه‌های مختلف و f_0, f_1, \dots, f_{J-1} تابع‌های چگالی نظیر به آن مولفه‌ها باشند. در این صورت توزیع رخداد، X ، ترکیبی خطی از مولفه‌ها و به صورت زیر است:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{J-1} \pi_i f_i(x), \quad \sum_{i=0}^{J-1} \pi_i = 1$$

ساختار فرآیند در مورد دو توزیع مولفه‌ای پیوسته در شکل (۱.۲) نشان داده شده است.

علاوه بر این، محاسبه‌ی k امین گشتاور $E(X^k)$ به‌طور ساده یک ترکیب خطی از گشتاورهای مربوط به مولفه‌های آن می‌باشد:

$$E(X^k) = \sum_{i=0}^{J-1} \pi_i E(X_i^k) \quad k \in \{1, 2, \dots\}$$



شکل ۱.۲: فرآیند ساختار توزیع آمیخته دو مولفه‌ای

دقت کنید که این برای گشتاورهای مرکزی برقرار نیست، یعنی، واریانس آمیخته:

$$Var(X) \neq \sum_{i=0}^{J-1} \pi_i Var(X_i).$$

برآورد پارامترهای یک توزیع آمیخته معمولاً توسط الگوریتم ماکسیمم درست‌نمایی انجام می‌شود.

تابع درست‌نمایی یک مدل آمیخته با J مولفه به صورت زیر می‌باشد:

$$L(\theta_0, \dots, \theta_{J-1}, \pi_0, \dots, \pi_{J-1}, x_0, \dots, x_{T-1}) = \prod_{j=0}^{T-1} \sum_{i=0}^{J-1} \pi_i f_i(x_j, \theta_i)$$

که $\theta_0, \dots, \theta_{J-1}$ بردارهای پارامتر توزیع‌های مولفه‌ای، π_0, \dots, π_{J-1} پارامترهای آمیخته و x_0, \dots, x_{T-1} مشاهدات می‌باشند. حل تابع درست‌نمایی به صورت صریح امکان پذیر نمی‌باشد،

بنابراین برآورد پارامتر باید توسط ماکسیمم کردن عددی درست‌نمایی با استفاده از نرم‌افزارهای خاص انجام شود. یک بسته نرم‌افزاری بسیار مفید برای برآورد مدل آمیخته *C.A.MAN* می‌باشد که

توسط بوهیننگ و همکاران (۱۹۹۲) توسعه یافته است. ما در این پایان نامه از بسته نرم‌افزاری *mixtools* در محیط R نیز استفاده می‌کنیم. این بسته نرم‌افزاری مجموعه‌ای از توابع را برای تحلیل

مدل‌های آمیخته متناهی فراهم می‌کند.