وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه تربیت معلم آذربایجان
دانشکده علوم پایه

پایان نامه
جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد
رشته ریاضی کاربردی

حل مسئله ممانعت از ماکزیمم جریان دوهدفه در شبکه

استاد راهنما
دکتر علیرضا غفاری حدیقه

پژوهشگر
سمانه مهاجری

مهر/ ۱۳۹۰
تبریز / ایران

بسم اللّه الرّحمن الرّحيم

تقدیم به

پدر و مادر بزرگوار و مهربانم

سپاس‌گزاری...

سپاس خداوندی را که سخنوران از ستودن او عاجزند و حساب‌گران از شمارش نعمت‌های او ناتوان و تلاش‌گران از ادای حق او درمانده‌اند. خدایی که افکار ژرف‌اندیش، ذات او را درک نمی‌کنند و دست غوّاصان دریای علوم به او نخواهد رسید. پروردگاری که مخلوقات را با قدرت خود آفرید، و با رحمت خود بادها را به حرکت در آورد و به وسیله‌ی کوه‌ها اضطراب و لرزش زمین را به آرامش تبدیل کرد.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر غفاری، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که بی‌شک بدون راهنمایی‌های ایشان، این رساله به انجام نمی‌رسید.

از آقایان دکتر سید محمود شیخ الاسلامی و دکتر بهروز خیرفام که داوری این پایان‌نامه را قبول زحمت فرموده‌اند کمال تشکر را دارم.

همچنین از کلیه‌ی استادهای دوران تحصیلم، نهایت تشکر و قدردانی را دارم.

در پایان از پدر و مادر عزیز و فداکارم، به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان که بهترین پشتیبان من بودند و از خواهران عزیزم که مرا در این راه یاری کردند نهایت تشکر و قدردانی را دارم.

سمانه مهاجری

پاییز ۱۳۹۰

فهرست مطالب

لیست جداول

فهرست اشکال

فهرست الگوریتم‌ها

فهرست مخفف‌ها

چکیده

در این پایان‌نامه الگوریتمی برای محاسبه مرزهای کارایی مسئله ممانعت از جریان بیشینه دوهدفه در شبکه را بررسی می‌کنیم. در این مسئله یک ممانعت کننده مجموعه‌ای از یال‌ها را در یک شبکه ظرفیت‌دار برای ممانعت جستجو می‌کند که بهینه پارتو متناظر با دو هدف، کمینه‌سازی هزینه ممانعت تام و کمینه‌سازی جریان بیشینه هستند.

این الگوریتم بخش وسیعی از مرزهای کارایی را با استفاده از مجموع وزنی اسکالر شده دو هدف پیدا می‌کند که آن را با رهاسازی لاگرانژ توصیف می‌کنیم. یک روش شاخه کران ویژه، شامل شمارش برش‌های جزیی، بخش دیگری از مرزهای کارایی ناپیدا را مشخص می‌کند.

کلمات کلیدی: ممانعت، جریان بیشینه، رهاسازی لاگرانژ، شمارش برش.

پیشگفتار

موضوع این پایان‌نامه، مسئله ممانعت از جریان بیشینه دو هدفه در شبکه و بیان الگوریتمی برای حل این مسئله است. در این مسئله هدف، ممانعت از جریان بیشینه است به طوری که هزینه ممانعت نیز کمینه شود. در واقع مسئله ممانعت از جریان بیشینه دوهدفه توسیعی از مسئله ممانعت از جریان بیشینه است که از مسائل مهم در بهینه‌سازی شبکه می‌باشد. مسئله ممانعت از جریان بیشینه، بعد از جنگ جهانی دوم، در جنگ ویتنام[۲۰] برای تخریب خطوط دشمن مورد استفاده قرار گرفت. در این مسئله، دشمن قصد دارد تا جریان بیشینه را در سراسر شبکه منتقل کند، در طرف مقابل ممانعت‌کننده تلاش می‌کند تا این جریان بیشینه را با استفاده از منابع قابل دسترس ممانعت، کمینه کند. این منابع می‌توانند موشک‌های کروز، بمباران هوایی و... باشند. بعد از جنگ این قالب برای ممانعت از قاچاق مواد مخدر در آمریکا توسط استینروف [۱] [۱۸] مورد استفاده قرار گرفت و او با استفاده از روش‌های برنامه‌نویسی ریاضی این مسئله را حل کرد. همچنین این قالب بعد از حملات تروریستی ۱۱ سپتامبر[۱۶] نیز مورد توجه و استفاده قرار گرفت. این مسئله ممکن است به‌صورت یک مسئله دو سطحی، انتخاب هدف و یا قالب تخصیص اسلحه قالب‌بندی شود. در سال ۱۹۹۳، وود[۲] [۲۱] مسئله ممانعت از جریان بیشینه را تبدیل به یک مسئله بهینه‌سازی صحیح کرد امّا با این روش مسئله $NP-$ کامل می‌شود که طبق تعریف این رده از مسائل در فصل یک، حل آن دشوار است. کورمیکن[۳] در سال ۱۹۹۵ روش تجزیه‌ی بندرز[۱۰] را برای حل

[۱] Steinrauf
[۲] Wood
[۳] Cormican

این مسئله به کار برد که در این روش، مسئله به چندین زیرمسئله تجزیه می‌شود. هر چند در این روش سرعت محاسبات بالا می‌رود، امّا حل مسئله با این روش نیز دشوار است زیرا عملاً باید چندین مسئله را حل کنیم. دربس [۴] [۱۱]، بینگول [۵] [۷]، اویگان[۶] [۱۹] روش‌های ابتکاری بر مبنای رهاسازی لاگرانژ ارائه دادند. امّا این روش نیز یافتن جواب بهینه را تضمین نمی‌کند. مسئله ممانعت از جریان بیشینه دو هدفه قالب توسعه یافته ممانعت از جریان است. در این مسئله علاوه بر کمینه کردن جریان بیشینه می‌خواهیم هزینه‌های ممانعت را نیز کمینه کنیم. در این مسئله، یک ممانعت‌کننده قصد دارد تا همه‌ی جواب‌های بهینه پارتو، را مشخص کند یعنی مرز کارایی متناظر با کمینه جریان بیشینه و هزینه ممانعت کلی را مشخص کند. این مسئله نیز قابل تبدیل به حالت صحیح می‌باشد امّا همانطور که ذکر کردیم مسئله NP – کامل می‌شود. در این پایان‌نامه می‌خواهیم روشی برای حل این مسئله را شرح دهیم. این روش برپایه‌ی مجموع وزنی اسکالر شده از هدف‌ها به عنوان کاربردی از روش رهاسازی لاگرانژ است. در این روش با استفاده از روش رهاسازی لاگرانژ می‌توانیم بعضی از نقاط بهینه پارتو را مشخص می‌کنیم سپس با استفاده از روش شاخه و کران مخصوص که شمارش تمام برش‌های نزدیک مقدار کمین را انجام می‌دهد، می‌توانیم سایر نقاط پارتو را بیابیم. با این روش و با توجه به فاصله بهینه، می‌توانیم تمام جواب‌های نزدیک بهینه پارتو را مشخص کنیم.

در این پایان‌نامه، ابتدا در فصل نخست مفاهیم مقدماتی در شبکه و مسائل چندهدفه را بیان می‌کنیم. در فصل دوم مسائل چندهدفه را بیان کرده و ممانعت از جریان بیشینه دو هدفه را قالب‌بندی می‌کنیم. در فصل سوم این مسئله را به حالت یک هدفه تبدیل می‌کنیم و با استفاده از روش رهاسازی لاگرانژ و شمارش برش، الگوریتمی برای آن بیان می‌کنیم. در فصل چهارم الگوریتمی برای حل ممانعت از جریان بیشینه دوهدفه شرح می‌دهیم. منبع اصلی استفاده شده برای این پایان‌نامه، مقاله [۱۵] است. در این پایان‌نامه به علت سهولت،

[۴] Derbes
[۵] Bingol
[۶] Uygan

از اسامی اختصاری استفاده شده است که فهرست این اختصارها در پیوست آورده شده است.

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

در این فصل تعاریف کلی مربوط به شبکه‌های جریان و ممانعت در شبکه و چند مسئله خاص در بهینه‌سازی شبکه را بیان می‌کنیم و در ادامه نظریه پیچیدگی و تجزیه بندرز را شرح می‌دهیم.

۱.۱ تعاریف مقدماتی

شبکه یک گراف جهت‌دار مانند $G = (N, A)$ با مجموعه گره‌های N و مجموعه یال‌های A است، که در آن $A \subset N \times N$. یک یال $k = (i, j)$ از **دم** گره i شروع و در **سر** گره j خاتمه می‌یابد. در گراف جهت‌دار G دو گره متمایز $s \neq t$ را مشخص می‌کنیم که s گره مبدا و t گره مقصد است. مجموعه زیر را تعریف می‌کنیم:

$$FS(i) = \{(i', j') \in A \mid i' = i\},$$

این مجموعه از یال‌ها **ستاره پیشرو** از گره i نامیده می‌شود، که شامل همه یال‌های به شکل (i, j) است. همچنین مجموعه زیر را داریم:

$$RS(i) = \{(j', i') \in A \mid i' = i\},$$

که این مجموعه از یال‌ها **ستاره پسرو** از گره i نامیده می‌شود که همه یال‌های به شکل (j, i) را نشان می‌دهد.

هر یال $k \in A$ دارای **ظرفیت** $u_k \in \mathbb{Z}^+$ و **هزینه ممانعت** $r_k \in \mathbb{Z}^+$ می‌باشد که هزینه ممانعت مقداری از منابع لازم برای تخریب یال k است. منظور از تخریب یال این است که ظرفیت یال k را به صفر کاهش دهیم. در این پایان‌نامه فرض می‌کنیم برای همه یال‌های $k \in A$، $r_k > ۰$ و $u_k > ۰$. زمانی که در یک یال $r_k = ۰$ یا $u_k = ۰$ است، می‌توان فرض کرد که در آن یال قبلا ممانعت از جریان صورت گرفته است و بنابراین آن یال را از مسئله حذف کنیم. همچنین در یک مجموعه نظامی انتظار داریم که r_k ها اعداد صحیح کوچک باشند. برای مثال ممکن است r_k ها تعداد حملات هوایی لازم برای تخریب کامل یک پل باشند. R کل منابع قابل دسترس برای ممانعت از جریان است.

یک **برش** C مانند (N_s, N_t) افرازی برای مجموعه گره‌های N است که این مجموعه را به دو زیر مجموعه N_s و N_t افراز می‌کند به طوری که $s \in N_s$ و $t \in N_t$. هر برش یک مجموعه از یال‌ها را تعریف می‌کند که نقاط ابتدایی یال‌ها در N_s و نقاط انتهایی یال‌ها در N_t هستند. پس یال $k = (i, j)$ یک یال **پیشرو** است اگر $i \in N_s$ و $j \in N_t$، در غیر این صورت یال **پسرو** است. A_C را مجموعه یال‌های پیشرو در برش C تعریف می‌کنیم که حذف A_C از گراف G باعث قطع همه راه‌های مستقیم از s به t می شود.

ظرفیت برش را با $u(N_s, N_t)$ نشان می‌دهیم که مجموع ظرفیت‌های یال‌های پیشرو در این برش است. پس:

$$u(N_s, N_t) = \sum_{k \in A_C} u_k.$$

اگر $u(N_s, N_t)$ کمترین ظرفیت را بین تمام ظرفیت‌های برش ها داشته باشد در این صورت $u(N_s, N_t)$ یک **برش کمینه** است. برش C را **کمین** گوییم هرگاه A_C یک مجموعه کمین قطع کننده باشد، یعنی یال‌های درون این برش دارای کمترین مقدار ظرفیت یالی باشند که حذف آن‌ها از شبکه باعث قطع همه راه‌های بین $s - t$ می‌شود. در این پایان‌نامه مجموعه برش‌های کمین را با $\mathcal{C}$ نمایش می‌دهیم.

۲.۱ چند مسئله خاص در بهینه‌سازی

۱.۲.۱ مسئله جریان بیشینه

یکی از قدیمی‌ترین و مهم‌ترین مسائل مطرح شده در بهینه‌سازی شبکه، مسئله جریان بیشینه است. در این مسئله در یک شبکه ظرفیت‌دار می‌خواهیم جریانی را که از گره مبدا به گره مقصد می‌توان ارسال کرد را بیشینه کنیم. مسئله جریان بیشینه کاربرد فراوانی در سیستم‌های ارتباطی، حمل و نقل، تولید و ... دارد. این مسئله به این صورت قالب‌بندی می‌شود:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & v \\
\text{s.t.} \quad & \sum_j y_{sj} - \sum_j y_{js} - v = 0, && && (۱.۱)\\
& \sum_j y_{ij} - \sum_j y_{ji} = 0, && \forall i \in N - \{s,t\} && (۲.۱)\\
& \sum_j y_{tj} - \sum_j y_{jt} + v = 0, && && (۳.۱)\\
& 0 \le y_{ij} \le u_{ij}, && \forall (i,j) \in A.
\end{aligned}
$$

در این قالب، y_{ij} جریان در یال (i,j) و v مقدار جریانی است که از گره مبدا به گره مقصد منتقل می‌شود و u_{ij} ظرفیت یال است. همچنین (۱.۱)، (۲.۱) و (۳.۱) محدودیت‌های مربوط به بقای جریان در هر گره هستند و به این مفهوم است که جریان وارد شده به یک گره با جریان خارج شده از آن گره برابر است.

۲.۲.۱ ممانعت از جریان بیشینه در شبکه

مسئله ممانعت از جریان بیشینه[1] MXFI یکی از مسائل مهم در بهینه‌سازی شبکه است. در این مسئله، ممانعت‌کننده می‌خواهد جریان بیشینه‌ای را که دشمن از گره مبدا به گره مقصد منتقل می‌کند؛ با استفاده از منابع محدودی که در اختیار دارد کمینه کند و این کار را با تخریب یال‌ها انجام می‌دهد. این مسئله به صورت زیر قالب‌بندی می‌شود:

[1] Maximum Flow Network Interdiction

$$\begin{aligned}
\min_{x\in X}\max_{y} \quad & y_a \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{k\in FS(i)} y_k - \sum_{k\in RS(i)} y_k = 0, \quad \forall i\in N && (۴.۱)\\
& 0 \le y_k \le u_k(1-x_k), \qquad \forall k\in A, && (۵.۱)
\end{aligned}$$

که در آن،

$$X=\left\{x\in\{0,1\}^{|A|}\,\Big|\sum_{k\in A} r_k x_k \le R\right\}.$$

در این قالب، اگر یال k ممانعت شده است $x_k = 1$ و در غیر این صورت $x_k = 0$. y_k جریان در یال $k=(i,j)$ بوده و r_k هزینه ممانعت و u_k ظرفیت این یال است. a یال بازگشتی از t به s و y_a مقدار جریان در این یال است. محدودیت (۴.۱) مربوط به بقای جریان در گره‌ها است و محدودیت (۵.۱) این نکته را بیان می‌کند که مقدار جریان در یال k از مقدار ظرفیت آن یال بیشتر نیست و هرگاه $x_k = 1$، آن‌گاه $y_k = 0$.

این مسئله به‌طور کامل در فصل سوم این رساله بررسی می‌شود.

۳.۲.۱ مسئله کوله پشتی

یکی از مسائل مهم در بهینه‌سازی صحیح مسئله کوله‌پشتی است. در شکل استاندارد این مسئله، فرض کنید n کالای مختلف وجود دارد. کالای نوع i، w_i کیلوگرم وزن و r_i دلار ارزش دارد. در این مسئله هدف این است که یک کوله پشتی با حداکثر ظرفیت W کیلوگرم را با این کالا پر کنیم، طوری که با توجه به ظرفیت کوله پشتی، ارزش کالاهای درون آن بیشینه گردد. کالاها قابل تقسیم نبوده و فقط تعداد صحیح نامنفی از آن‌ها را می توان انتخاب کرد.

فرض کنیم x_j تعداد کالاهای انتخاب شده نوع j است. مسئله کوله‌پشتی به این صورت قالب‌بندی می‌شود:

$$\max \quad \sum_{j=1}^{n} r_j x_j,$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} w_j x_j \le W,$$

$$x_j \ge 0, \quad x_j \text{صحیح است.}$$

این مسئله، کوله‌پشتی صحیح نامنفی است. اگر هر متغیر x_j مقادیر صفر یا یک را اختیار کند، مسئله کوله‌پشتی صفر-یک نامیده می‌شود. مسئله کوله‌پشتی یک مسئله برنامه‌ریزی تمام صحیح با یک محدودیت است و یکی از مسائل مهم در بهینه‌سازی صحیح است. هر مسئله بهینه‌سازی تمام صحیح را می‌توان به یک مسئله کوله‌پشتی تبدیل کرد. این مسئله از نوع مسائل NP-سخت است.

۳.۱ نظریه پیچیدگی

مسائل مختلفی در بهینه‌سازی مطرح می‌شوند که در این مسائل به دنبال جواب بهینه با استفاده از تعداد زیاد امّا متناهی از راه‌حل‌ها هستیم. این مسائل توسط الگوریتم‌ها حل می‌شوند. یک الگوریتم یک مجموعه متناهی از قوانین و یا دستورالعمل‌ها است. زمانی که به الگوریتمی یک ورودی می‌دهیم پس از طی مراحل محدود یک خروجی تولید می‌کند. گاهی الگوریتم‌ها سریع و کارا بوده امّا در اغلب اوقات طولانی و خسته‌کننده هستند. پس بسیار مهم است تا زمان اجرای الگوریتم‌ها را ارزیابی کنیم. این ارزیابی در نظریه پیچیدگی انجام می‌شود. نظریه پیچیدگی مشخص می‌کند که چه مقدار زمان طول می‌کشد تا یک الگوریتم اجرا شود. زمان پیچیدگی الگوریتم با استفاده از علامت O توصیف می‌شود.

تعریف ۱.۱. پیچیدگی تابع $f(n)$، $O(g(n))$ است اگر و تنها اگر n_0 و c موجود باشند، که به‌ازای $n \ge n_0$ نامساوی $|f(n)| \le c|g(n)|$ برقرار باشد. توابع f و g برحسب n هستند. عبارت

$f(n) = O(g(n))$ به این مفهوم است که f از مرتبه g است، یعنی سرعت رشد f به اندازه g و حتی کمتر از آن است.

تعریف ۲.۱. یک الگوریتم در زمان چندجمله‌ای اجرا می‌شود اگر و تنها اگر پیچیدگی تابع، $O(n^k)$ برای $k \geq ۰$ باشد.

تعریف ۳.۱. زمان اجرای یک الگوریتم نمایی است اگر تابع پیچیدگی آن با یک چندجمله‌ای کران‌دار نباشد. در واقع پیچیدگی تابع آن $O(k^n)$ برای $k > ۱$ باشد.

یک رده مهم از مسائل در نظریه پیچیدگی‌ها کلاس P است. مسائلی که در این رده قرار دارند به‌طور قطعی توسط یک الگوریتم زمان چندجمله‌ای حل می‌شوند. یک مسئله به کلاس NP تعلق دارد اگر بتوانیم در زمان چندجمله‌ای، درستی جواب آن را امتحان کنیم.

قبل از تعریف رده مسائلی که سخت‌تر از NP هستند، مفهوم تقلیل را بیان می‌کنیم،

تعریف ۴.۱. دو مسئله Π، Π' و الگوریتم A را در نظر می‌گیریم.گوییم A یک تقلیل زمان چندجمله‌ای از Π' به Π است اگر A یک الگوریتم زمان چندجمله‌ای باشد و بتوان با این الگوریتم، مسئله Π را به مسئله Π' تبدیل کرد.

حال بااستفاده از این تعریف، مسائلی که سخت‌تر از مسائل موجود در کلاس NP هستند را تعریف می‌کنیم،

تعریف ۵.۱. مسئله Π، NP -سخت است اگر برای هر مسئله Π' در NP، یک تقلیل زمان چندجمله‌ای از Π به Π' وجود داشته باشد.

وجود یک الگوریتم با زمان چندجمله‌ای برای مسائل NP -سخت، وجود یک الگوریتم زمان چندجمله‌ای برای مسائل NP را ایجاب می‌کند. تعریف بعدی به یک کلاس مهم، در نظریه پیچیدگی اشاره دارد.

تعریف ۶.۱. مسئله Π را NP -کامل گوییم هرگاه هم به کلاس مسائل NP و هم به کلاس مسائل NP -سخت متعلق باشد.