بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده علوم

پایان‌نامه کارشناسی ارشد در رشته‌ی ریاضی (جبر و توپولوژی)

چندجمله ای هایی که در تعدادی متناهی ایده آل ماکسیمال قرار می گیرند

توسط:

شهرام نجفی تیره شبانکاره

استاد راهنما:

دکتر حبیب شریف

بهمن ۸۷

به نام خدا

چندجمله ای هایی که در تعدادی متناهی ایده آل ماکسیمال قرار می گیرند

به وسیله ی:

شهرام نجفی تیره شبانکاره

پایان‌نامه

ارائه شده به تحصیلات تکمیلی دانشگاه به عنوان بخشی از فعالیت تحصیلی
لازم برای اخذ درجه کارشناسی ارشد

در رشته‌ی:

ریاضی-جبر و توپولوژی

از دانشگاه شیراز

شیراز

جمهوری اسلامی ایران

ارزیابی شده توسط کمیته پایان‌نامه با درجه:.........عالی............

دکتر حبیب شریف، استاد ریاضی(رئیس کمیته)..

دکتر مجید ارشاد،دانشیار ریاضی...

دکتر عبدالرسول عزیزی،دانشیار ریاضی..

شهریور ۸۷

تقدیم به:

روح پدر مهربان و مادر گرامی

سپاسگزاری

خدای بزرگ را سپاس که به من توانایی تحصیل و تهذیب در راه خویش را عطا کرد . بر خویش واجب می دانم که مراتب تشکر و قدردانی ویژه خود را از دکتر حبیب شریف ابراز نمایم ، ایشان در تمام طول این دوره تحصیلی راهنمای علم و اخلاقم بوده و هستند . همچنین از اساتید مشاورم آقایان دکتر مجید ارشاد و دکتر عبدالرسول عزیزی به خاطر راهنمایی های بی دریغشان سپاسگذارم .

اکنون که این دوره مهم از زندگی ام را پشت سر می گذارم لازم می دانم از همراهی و دلگرمی برادران و خواهران عزیزم و همچنین همکلاسیهای گرامی خود و دیگر دوستانم نیز تشکر نمایم .

چکیده

چندجمله ای هایی که در تعداد متناهی ایده آل ماکسیمال قرار می گیرند

توسط:

شهرام نجفی

در این پایان نامه همه ی حلقه ها جابجائی و یکدار می باشند.

چندجمله ای های وایراشتراس روی یک حلقه ی موضعی (R,M) تعریف می شوند و دارای این خاصیت هستند که تنها در یک ایده آل ماکسیمال از $R[x]$ قرار می گیرند. این ویژگی این نوع چندجمله ای ها را در حلقه های شبه-موضعی توسعه داده و چندجمله ای هائی رامورد مطالعه قرار می دهیم که تنها در یک ایده آل ماکسیمال از $R[x]$ قرار می گیرند و به آنها چندجمله ای های شبه-وایراشتراس می گوئیم.

علاوه بر این چند جمله ای هائی را مطالعه می کنیم که در تعداد متناهی ایده آل ماکسیمال قرار می گیرند. همچنین چندجمله ای هائی که مولد یک ایده آل اول و یا مولد یک ایده آل ماکسیمال هستند را بررسی می کنیم.

فهرست مطالب

فصل اول-تعاریف و قضایای مقدماتی ۱

فصل دوم-ایده آل های حلقه های چندجمله ای ۱۸

۲-۱ قضایا و نتایج ۱۹

فصل سوم-چندجمله ای های وایراشتراس و شبه وایراشتراس ۲۸

۳-۱ قضایا و نتایج ۲۹

فصل چهارم-چندجمله ای هایی که در تعداد متناهی ایده آل ماکزیمال قرار می گیرند ۳۷

۴-۱ قضایا و نتایج ۳۸

فصل پنجم- چندجمله ای هایی که مولد یک ایده آل ماکزیمال هستند ۵۲

۵-۱ قضایا و نتایج ۵۳

فهرست منابع و مواخذ ۶۱

واژه نامه ۶۳

فصل اول

تعاریف و قضایای مقدماتی

مقدمه:

در این فصل برخی تعاریف و قضایای مقدماتی که از قبل آموخته شده‌اند، یادآوری می‌گردند. با ذکر این نکته که مفاهیم اولیه‌ی حلقه و ایده آل دانسته فرض می‌شوند، ضمن آنکه از آوردن اثبات برخی از قضایا صرف نظر کرده و تنها به ذکر منابع جهت اثبات بسنده می‌نماییم.

در سرتاسر این فصل حلقه ها یکدار فرض می شوند.

تعاریف و قضایای مقدماتی:

تعریف ۱-۱ :

فرض کنید R یک حلقه و $R[x]$ حلقه ی چند جمله ای های روی R باشد. در این صورت $f(x) \in R[x]$ را یک چند جمله ای تکین گوئیم هر گاه ضریب پیشرو(ضریب بزرگترین توان x) یک باشد.

تعریف ۱-۲:

فرض کنید که R یک حلقه ی جابجایی و یکدار باشد. مجموعه ی مقسوم علیه های صفر R را با $Z(R)$ نمایش می دهیم.

تعریف ۱-۳:

فرض کنید R یک حلقه باشد، زیرمجموعه‌ی ناتهی S از R را بسته‌ی ضربی گوییم، هرگاه $1 \in S$ و برای هر دو عنصر r و s در S داشته باشیم، $rs \in S$. به عنوان مثال مجموعه‌ی عناصر ناصفر دامنه‌ی صحیح D بسته‌ی ضربی می باشد، زیرا اگر برای $a,b \in D\setminus\{0\}$ داشته باشیم $ab \notin D\setminus\{0\}$، آن‌گاه $ab = 0$ و چون D دامنه صحیح می‌باشد، بنابراین $a = 0$ یا $b = 0$ که در هر صورت با فرضِ $a,b \in D\setminus\{0\}$ در تناقض است. همچنین برای هر ایده‌آلِ اولِ p از حلقه‌ی R مجموعه ی $S = R\setminus p$ یک مجموعه‌ی بسته‌ی ضربی است.

تعریف ۱-۴:

فرض کنید R یک حلقه و P یک ایده آل اول از R باشد. در این صورت $S = R - P$ یک مجموعه ی بسته ی ضربی است. رابطه ی هم ارزی $\sim$ را روی مجموعه ی $R \times S$ چنین تعریف می کنیم که $(a,s) \sim (a_1,s_1)$ هرگاه $s_2 \in S$ وجود داشته باشد به طوری که $s_2(s_1a - sa_1) = 0$. مجموعه ی کلاس های هم ارزی را با R_P نشان می دهیم. در این صورت R_P با اعمال جمع و ضرب زیر

$$(a,s)+(a_1,s_1)=(as_1+a_1s,ss_1)$$
$$(a,s)*(a_1,s_1)=(aa_1,ss_1)$$

یک حلقه است.

تعریف ۱-۵:

فرض کنید R یک حلقه باشد. به $I_1 \subset I_2 \subset \ldots \subset I_r$ یک زنجیر صعودی در R گوییم هرگاه $I_1,I_2,\ldots,I_r$ در R ایده آل باشند.

تعریف ۱-۶:

حلقه ی R را نوتری گوئیم هر گاه هر ایده آل R با تولید متناهی باشد و یا بطور معادل R در شرط زنجیر صعودی از ایده آلها صدق کند یعنی هر زنجیر صعودی از ایده آل ها ایستا باشد.

مثال ۱-۷:

میدان ها و حلقه های متناهی (نظیر $\mathbf{Z}_n$ ها) مثال هایی از حلقه های نوتری می باشند و همچنین $\mathbf{Z}[x],\mathrm{F}[x]$ که در آن F یک میدان و $\mathbf{Z}$ حلقه اعداد صحیح می باشد، هر کدام یک حلقه نوتری است.

تعریف ۱-۸:

حلقه ی نوتری R را موضعی گوئیم هر گاه R تنها شامل یک ایده آل ماکسیمال باشد.

نکته ۱-۹:

برای هر عدد اول p، $\mathbf{Z}_{p^n}$ یک حلقه ی موضعی با ایده آل ماکسیمال $\mathbf{Z}_{p^{n-1}}$ می باشد و همچنین میدان ها و R_P ها که در آن R یک حلقه ی دلخواه و P یک ایده آل اول R می باشد نیز مثال هائی از حلقه های موضعی هستند.

تعریف ۱-۱۰:

حلقه ی نوتری R را نیمه-موضعی گوئیم هرگاه R شامل تعداد متناهی ایده آل ماکسیمال باشد.

نکته ۱-۱۱:

هر حلقه ی موضعی، نیمه-موضعی است. اگر q,p اعداد اول متمایز باشند. دراین صورت $\mathbf{Z}_{pq}$ یک مثال از حلقه ی نیمه-موضعی است که موضعی نیست زیرا $M_1=\{\overline{0},\overline{p},\overline{2p},...,\overline{qp-p}\}$ و $M_2=\{\overline{0},\overline{q},\overline{2q},...,\overline{pq-q}\}$ دو ایده آل ماکسیمال مجزا از $\mathbf{Z}_{pq}$ هستند.

تعریف ۱-۱۲:

حلقه ی R را شبه-موضعی گوئیم هر گاه R شامل تنها یک ایده آل ماکسیمال باشد.

تعریف۱-۱۳:

حلقه ی R را شبه-نیمه-موضعی گوئیم هر گاه R شامل تعداد متناهی ایده آل ماکسیمال باشد.

نکته ۱-۱۴:

در تعریف حلقه ی شبه-موضعی و حلقه ی شبه-نیمه-موضعی نیازی به نوتری بودن حلقه ی R نیست و لذا

نوتری+ شبه-موضعی= حلقه موضعی

نوتری+ شبه-نیمه-موضعی= حلقه نیمه-موضعی.

نکته ۱-۱۵:

هر حلقه ی شبه-موضعی، شبه-نیمه-موضعی است ولی عکس آن صحیح نیست.

نکته ۱-۱۶:

به ازای ایده آل اول P از R، R_P یک حلقه ی شبه-موضعی است.

مثال ۱-۱۷:

الف) فرض کنید K یک میدان باشد. دراین صورت $K[x_1,x_2,...]_{(x_1,x_2,...)}$ مثالی از حلقه ی شبه-موضعی است که موضعی نمی باشد. زیرا $R=K[x_1,x_2,...]$ نوتری نیست و اگر $P=<x_1,x_2,...>$، آنگاه R_P دارای ایده آل ماکسیمال منحصربفرد P_P است و لذا شبه-موضعی است..

ب) اگر $S=K[x_1,x_2,...]_{(x_1,x_2,...)}$، آنگاه حلقه ی $S\oplus S$ مثالی از یک حلقه ی شبه-نیمه-موضعی است که شبه-موضعی و نیمه-موضعی نمی باشد. زیرا $S\oplus(x_1,x_2,...)_{(x_1,x_2,...)}$ و $(x_1,x_2,...)_{(x_1,x_2,...)}\oplus S$ دو ایده آل ماکسیمال متمایز از $S\oplus S$ می باشند.

تعریف ۱-۱۸:

محتوای چند جمله ای $f(x)$ را ایده آل تولید شده توسط ضرائب آن معرفی می کنیم و با $<cont.f(x)>$ نشان می دهیم.

تعریف ۱-۱۹:

فرض کنید B یک حلقه و A زیرحلقه ای از B باشد. در این صورت، $x\in B$ را روی A صحیح گوئیم هرگاه x ریشه ی یک چند جمله ای تکین با ضرائب در A باشد. یعنی x در معادله ای بصورت زیر صدق کند

$$x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n=0$$

که a_iها عناصری از A هستند.

تعریف ۱-۲۰:

در تعریف۱-۲۱، اعضائی از B که روی A صحیح هستند را با C نشان می دهیم. بنا به گزاره 5.2 از [2]، C یک زیرحلقه از B و حاوی A است. C را بستار صحیح A گوئیم. اگر $C=A$ آنگاه A را بطور صحیح بسته گوئیم و هرگاه $C=B$ آنگاه Bرا یک توسیع صحیحِ A گوئیم.

تعریف ۱-۲۲:

برای ایده آل اول P از حلقه ی R، طول زنجیرهای نزولی در R که از P شروع می شوند و بیشرین طول را دارا باشند را ارتفاع ایده آل اولِ P گوئیم و با $ht(P)$ نشان می دهیم.

تعریف ۱-۲۳:

حوزه ی صحیح R که بطور صحیح بسته می باشد را یک حلقه ی نرمال گوئیم.

تعریف ۱-۲۴:

بستار صحیح حوزه ی صحیح R در میدان خارج قسمتی آن را حلقه ی مشتق شده ی نرمال R گوئیم و با R' نشان می دهیم.

تعریف ۱-۲۵:

فرض کنید K یک میدان و $K^* = K-\{0\}$ باشد. یک ارزه ی گسسته روی K، نگاشت $v: K^* \to \mathbf{Z}$ می باشد بگونه ای که نگاشت v دارای خاصیت های زیر می باشد

۱) $v(xy) = v(x)+v(y)$

۲) $v(x+y) \geq \min(v(x), v(y))$

تعریف ۱-۲۶:

برای میدان K و ارزه گسسته ی v ی تعریف شده در تعریف ۱-۲۵، مجموعه ی R متشکل از صفر و $x \in K^*$ هائی که $v(x) \geq 0$ می باشد تشکیل یک حلقه می دهد که به آن حلقه ی ارزه ی v گوئیم.

قضیه ۱-۲۷:

برای حلقه ی ارزه ی R شرایط زیر معادل می باشند:

۱) R یک حلقه ی ارزه ی گسسته است.

۲) R یک حوزه ی ایده آل اصلی است.

۳) R نوتری است.

اثبات:

برای اثبات به مرجع [8] قضیه ۱۱,۱ مراجعه شود.

قضیه ۱-۲۸:

فرض کنید R یک حلقه باشد. شرایط زیر معادل می باشند.

۱) حلقه ی R یک حلقه ی ارزه ی گسسته است.

۲) R یک حوزه ی ایده آل اصلی موضعی است که میدان نمی باشد.

۳) R یک حلقه ی موضعی است که $\dim R > 0$ و ایده آل ماکسیمال آن، یک ایده آل اصلی است.

۴) R یک حلقه ی نوتری نرمال موضعی از بعد یک است.

اثبات:

اثبات برای مثال در [8] قضیه ۱۱,۲ آمده است.

قضیه ۱-۲۹:

هر حلقه ی منظم از بعدِ یک، یک حلقه ی ارزه ی گسسته می باشد.

اثبات:

اثبات برای مثال در [2] گزاره ی ۹,۲ آمده است.

تعریف ۱-۳۰:

فرض کنید (R,M) یک حلقه ی موضعی باشد و $K = R/M$. در این صورت حلقه ی R را هنسلی گوئیم هر گاه تصویر چند جمله ای تکین $G_0(x) \in R[x]$ در $K[x]$ حاصل ضربِ دو چندجمله ای $g_1(x)$ و $g_2(x)$ از $K[x]$ باشد که $g_1(x)$ و $g_2(x)$ نسبت به هم اولند، آنگاه چندجمله ای های منحصربفرد تکین $G_i(x) \in R[x]$ موجود باشند بقسمی که $G_0(x) = G_1(x)G_2(x)$ و $\overline{G_i}(x) = g_i(x)$.

گزاره ۱-۳۱:

الف) فرض کنید B یک توسیع صحیح از A باشد. اگر J یک ایده آل از B باشد و $I = J \cap A$، دراین صورت B/J یک توسیع صحیح از A/I خواهد بود.

ب) اگر S یک زیرمجموعه ضربی از A باشد، آنگاه B_S یک توسیع صحیح A_S می باشد.

اثبات:

رجوع شود به [4] لم ۹,۱.

لم ۱-۳۲:

فرض کنید B یک حوزه صحیح و یک توسیع صحیح از A باشد. در این صورت B یک میدان است اگر و فقط اگر A یک میدان باشد.

اثبات:

رجوع شود به [4] لم ۹,۲.

گزاره ۱-۳۳:

فرض کنید B یک توسیع صحیح از A و Q یک ایده آل اول از B و $P = Q \cap A$. آنگاه Q یک ایده آل ماکسیمال B است اگر و فقط اگر P یک ایده آل ماکسیمال A باشد.

اثبات:

رجوع شود به [4] نتیجه ۹,۳.

گزاره ۱-۳۴:

فرض کنید B یک توسیع صحیح از A باشد و همچنین P یک ایده آل اول در A باشد. اگر B و B' دو ایده آل اول در B باشند بقسمی که هر دو شامل P باشند در این صورت $B'=B$.

اثبات:

رجوع شود به [4] نتیجه ۹,۴.

لم ۱-۳۵:

فرض کنید B یک توسیع صحیح از A باشد و P یک ایده آل اول در A باشد. دراین صورت ایده آل اول B در B وجود دارد که $P=B\cap R$.

اثبات:

رجوع شود به [4] لم ۹,۵.

نتیجه ۱-۳۶:

اگر B یک توسیع صحیح از A باشد بقسمی که B شبه-نیمه-موضعی باشد آنگاه A نیز شبه-نیمه-موضعی است.

اثبات:

با استفاده از گزاره ۱-۳۳ و گزاره ۱-۳۴ و لم ۱-۳۵ نتیجه حاصل می شود.

تعریف۱-۳۷:

فرض کنیم $x_1,x_2,...,x_n$ عناصری از R باشند. در این صورت گوییم که $x_1,x_2,...,x_n$ یک R-دنباله است هرگاه:

$(x_1,x_2,...,x_n) \neq R$ (i

$\forall i=1,...,n \quad x_i \notin Z(R/(x_1,x_2,...,x_{i-1}))$ (ii

به عبارت دیگر شرط دوم بیان می دارد که x_1 در R مقسوم علیه صفر نباشد و x_2 در $R/(x_1)$ وهمچنین x_3 در $R/(x_1,x_2)$ و . . . و x_n در $R/(x_1,x_2,...,x_{n-1})$ مقسوم علیه صفر نباشد.

نکته ۱-۳۸:

در یک R-دنباله ترتیب نوشتن اعضای دنباله مهم است. برای مثال $6,3$ یک $\mathbf{Z}$-دنباله می باشد در حالی که $3,6$ یک $\mathbf{Z}$-دنباله نمی باشد زیرا $3 \in Z(\frac{\mathbf{Z}}{6\mathbf{Z}})$.

تعریف ۱-۳۹:

حوزه ی صحیح R را یک حلقه ی ارزه گوئیم هرگاه به ازای هر $a,b \in R$، $a|b$ یا $b|a$.

قضیه ۱-۴۰:

شرایط زیر معادل می باشند

۱) به ازای هر $a \in K$ (K میدان خارج قسمتی R است)، $a \in R$ یا $a^{-1} \in R$. به عبارت دیگر اگر R^{-1} را معکوس اعضا ناصفر R قرار دهیم داشته باشیم $K = R \bigcup R^{-1}$.

۲) هر ایده آل متناهی- المولد R، اصلی است و خود R نیز شبه-موضعی است.

۳) در هر حلقه ی ارزه برای هر دو ایده آل I,J از R داریم یا $I \subset J$ و یا $J \subset I$.

اثبات:

۱) اثبات در [9] قضیه ۱،۱۱(۱) صفحه ی ۳۴.

۲) اثبات در [9] قضیه ۱،۱۱(۲) صفحه ی ۳۴.

۳) اگر $x \in I$ و $x \notin J$ در این صورت برای هر $y(\neq 0) \in J$، داریم که $\frac{x}{y} \notin R$ (زیرا اگر $\frac{x}{y} \in R$ آنگاه $x = y \times \frac{x}{y} \in J$). بنابراین از آنجا که R یک حلقه ی ارزه است لذا $\frac{y}{x} \in R$ و از این نتیجه می شود که $y = x \times \frac{y}{x} \in I$. در نتیجه $J \subset I$.

نکته ۱-۴۱:

ایده آل های حلقه ی ارزه ی R یک مجموعه ی کلا" مرتب تحت شمول تشکیل می دهند (این مطلب از اثبات (۳) قضیه ۱-۴۰ نتیجه می شود) و در نتیجه R تنها یک ایده آل ماکسیمال خواهد داشت و بنابراین R شبه-موضعی خواهد بود.

تعریف ۱-۴۲:

حوزه ی صحیح R را یک حلقه ی کرول گوئیم هرگاه دو شرط زیر برقرار باشد:

۱) اگر P یک ایده آل اول از ارتفاع یک در R باشد، آنگاه R_P یک حلقه ی نوتری ارزه باشد.