دانشگاه زنجان

گروه ریاضی ـ دانشکده علوم

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

عنوان:

محاسبه کران‌های پایین و بالا برای ارزیابی کوچکترین و بزرگترین مقادیر ویژه برخی از ماتریس‌ها

نگارش:

لیلا جعفری

استاد راهنما:

دکتر مجید ادیب

شهریور ۹۱

چکیده

حل بسیاری از مسائل در علوم و مهندسی منجربه حل دستگاه معادلات خطی می‌شود. دستگاه‌های خطی نیز عموماً با روش‌های تکراری حل می‌گردد. وضعیت همگرایی یا واگرایی روش‌های تکراری نیز با شناخت وضعیت مقادیر ویژه ماتریس ضرایب دستگاه ارتباط مستقیم دارد. از بین مقادیر ویژه، کوچکترین و بزرگترین مقدار ویژه از اهمیت بسزایی برخوردار هستند. در این پایان‌نامه کران‌های بالایی برای بزرگترین مقدار ویژه ماتریس‌های متقارن، کران‌های پائینی برای کوچکترین مقدار ویژه M ـ ماتریس‌های نامنفرد و M ـ ماتریس‌های اکیداً غالب قطری و همچنین کران‌های پائینی برای کوچکترین مقدار ویژه P ـ ماتریس‌ها محاسبه می‌کنیم.

کلمات کلیدی: کوچکترین مقدار ویژه، بزرگترین مقدار ویژه، M ـ ماتریس، P ـ ماتریس، ماتریس‌های غالب قطری، حاصل‌ضرب هادامارد.

فهرست مندرجات

فصل ۱

مقدمات و پیش‌نیازها

در این فصل مفاهیمی چون مقدار ویژه، بردار ویژه، ماتریس متقارن، نامساوی میانگین حسابی ـ هندسی، ماتریس معین مثبت و ماتریس کاملاً نامنفی، حاصل‌ضرب هادامارد، P ـ ماتریس، M ـ ماتریس و ماتریس غالب قطری را ارائه می‌کنیم. برای بیان بهتر مفاهیم مثال‌هایی نیز ذکر خواهیم کرد.

۱.۱ مقدار ویژه و بردار ویژه

اگر A یک ماتریس مربعی از مرتبه n باشد، آنگاه برای این ماتریس می‌توان مقادیر حقیقی یا مختلط λ را به‌نحوی پیدا نمود که به‌ازای بردار مخالف صفر x در رابطه $Ax = \lambda x$ صدق نماید. در این‌صورت λ را مقدار ویژه و بردار x را بردار ویژه می‌نامند.

- طبق تعریف مقدار ویژه داریم:

$$Ax = \lambda x \;\Rightarrow\; Ax = \lambda I x \;\Rightarrow\; (A - \lambda I)x = \circ.$$

• اگر A یک ماتریس مربعی مرتبه n باشد، بسط $\det(\lambda I - A) = ۰$ را می‌توان به‌صورت یک چندجمله‌ای درجه n برحسب λ بیان نمود. بنابراین

$$f(\lambda) = \lambda^n + p_۱\lambda^{n-۱} + p_۲\lambda^{n-۲} + \cdots + p_{n-۱}\lambda + p_n = ۰,$$

را معادله مفسر یا معادله مشخصه ماتریس A گویند.

• به ریشه‌های معادله مشخصه، مقادیر ویژه ماتریس A گفته می‌شود.

مثال ۱.۱.۱ [٦]: معادله مشخصه ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ ۸ & -۱ \end{bmatrix}$ عبارتست از:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \lambda - ۳ & ۰ \\ -۸ & \lambda + ۱ \end{vmatrix} &= (\lambda - ۳)(\lambda + ۱) = ۰, \\ f(\lambda) &= \lambda^۲ - ۲\lambda - ۳ = ۰, \end{aligned}$$

و درنتیجه مقادیر ویژه A عبارت خواهند بود از:

$$\lambda_۱ = ۳ \quad , \quad \lambda_۲ = -۱.$$

مثال ۲.۱.۱ [۳۲]: بردارهای ویژه نظیر مقادیر ویژه ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند.

$$\det(\lambda I - A) = ۰,$$

و درنتیجه مقادیر ویژه A عبارت خواهد بود از:

$$\lambda_۱ = ۱, \quad \lambda_۲ = ۳.$$

ابتدا بردار ویژه نظیر $\lambda_1 = 1$ را به‌دست می آوریم.

$$\begin{aligned} & (\lambda_1 I - A)x = 0 \\ \Rightarrow\ & \begin{bmatrix} 1-2 & -1 \\ -1 & 1-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow\ & x = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

به‌طور مشابه بردار ویژه نظیر $\lambda_2 = 3$ عبارتست از:

$$x = \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

تعریف ۳.۱.۱ [۶]: ماتریس Q را متعامد یکه گوییم اگر $Q^T Q = I$ در این‌صورت:

۱) $Q^{-1} = Q^T$.

۲) ستون‌های Q یک مجموعه متعامد یکه از بردارهای متعامد از اندازه ۱ هستند.

تعریف ۴.۱.۱ [۶]: ماتریس A را قطری شدنی گوییم هرگاه یک ماتریس P وجود داشته باشد به‌طوری که:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix},$$

و بنابراین λ_i ها مقادیر ویژه A خواهند بود.

۱.۱.۱ خصوصیت‌های مقادیر ویژه

اگر λ یک مقدار ویژه ماتریس A و x بردار ویژه نظیر آن باشد. آنگاه

۱) به‌ازای $\alpha \neq 0$، αx نیز یک بردار ویژه A خواهد بود [۳۲].

۲) x بردار ویژه نظیر λ^k برای ماتریس A^k نیز می‌باشد. یعنی λ^k مقدار ویژه A^k است [۶، ۳۲].

۳) اگر A معکوس‌پذیر باشد $\frac{1}{\lambda}$ مقدار ویژه A^{-1} است و x بردار ویژه A^{-1} وابسته به مقدار ویژه $\frac{1}{\lambda}$ است [۶، ۳۲].

۴) مقادیر ویژه A و A^T برابرند [۳۲].

۵) اگر c یک اسکالر باشد آنگاه $\lambda - c$ مقدار ویژه $A - cI$ است و x بردار ویژه $A - cI$ وابسته به مقدار ویژه $\lambda - c$ است [۳۲].

۶) به‌ازای هر دو عدد طبیعی k و k'، $\lambda^k + \lambda^{k'}$ مقدار ویژه ماتریس $A^k + A^{k'}$ و x بردار ویژه آن است [۳۲].

نکته ۵.۱.۱ [۳۲]: اگر λ و μ به‌ترتیب مقادیر ویژه ماتریس A و B باشند در این‌صورت لزوماً $\lambda + \mu$ مقدار ویژه $A + B$ نیست، به‌عنوان مثال فرض کنید که $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ باشد، در این‌صورت مقادیر ویژه A عبارتند از ۲ و ۱ و مقادیر ویژه B عبارتند از ۴ و ۳، در حالی‌که مقادیر ویژه $A + B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ عبارتند از ۲ و ۸.

نکته ۶.۱.۱ [۳۲]:

- اگر A یک ماتریس مثلثی $n \times n$ باشد آنگاه درایه‌های روی قطر اصلی، مقادیر ویژه A هستند.

- اگر A یک ماتریس $n \times n$ باشد، آنگاه A معکوس‌پذیر است اگر و تنها اگر A دارای مقدار ویژه صفر نباشد.

- اگر A و B دو ماتریس $n \times n$ باشند، آنگاه ماتریس‌های AB و BA دارای چندجمله‌ای مشخصه یکسان هستند.

- اگر A یک ماتریس $m \times n$ روی اعداد حقیقی باشد، آنگاه مجموع m مقدار ویژه AA^t برابر با مجموع n مقدار ویژه A^tA است.

- مقادیر ویژه هر ماتریس خودتوان (ماتریس خودتوان ماتریسی است که $A^۲ = A$ باشد) صفر یا یک است.

- اگر λ مقدار ویژه ماتریس متعامد A باشد، آنگاه $\frac{۱}{\lambda}$ نیز مقدار ویژه آن است.

۲.۱ ماتریس متقارن، نامساوی میانگین حسابی ـ هندسی

تعریف ۱.۲.۱ [۳۳]: ماتریس $n \times n$، A را متقارن گوییم اگر $A^T = A$.

حال برخی خواص ماتریس‌های متقارن را ذکر می‌کنیم.

۱) اگر A و B ماتریس‌های متقارن باشند در این‌صورت:

$$(A+B)^T = A^T + B^T = (A+B),$$

یعنی $A+B$ نیز متقارن است.

۲) اگر A و B ماتریس‌های متقارن باشند آنگاه:

$$(AB)^T = B^T A^T = BA \neq AB,$$

و لذا AB لزوماً متقارن نیست.

۳) فرض کنیم C ماتریسی مربعی باشد در این‌صورت $B = C^T C$ متقارن است.

تعریف ۲.۲.۱ [۳۵]: گیریم n یک عدد طبیعی باشد. برای هر n عدد حقیقی نامنفی $a_۱$، $a_۲$، ...، a_n عدد

$$A(a_۱, a_۲, \dots, a_n) := \frac{a_۱ + a_۲ + \cdots + a_n}{n},$$

میانگین حسابی و عدد

$$G(a_۱, a_۲, \dots, a_n) := \sqrt[n]{a_۱ a_۲ \cdots a_n},$$

میانگین هندسی آن‌ها نامیده می‌شود. نامساوی میانگین حسابی ـ هندسی بیان می‌کند که

$$G(a_۱, a_۲, \dots, a_n) \leq A(a_۱, a_۲, \dots, a_n),$$

به‌علاوه تساوی برقرار است اگر و تنها اگر $a_۱ = a_۲ = \cdots = a_n$.

تعریف ۳.۲.۱ [۳۵]: در ماتریس A، کهاد نظیر عضو a_{ij}، دترمینان ماتریسی است که از حذف سطر iام و ستون jام ماتریس A ایجاد می‌شود و آن را با نماد M_{ij} نشان می‌دهیم. $\Delta_{ij} = (-۱)^{i+j} M_{ij}$ همسازه نظیر عضو a_{ij} و ماتریس $N = [\Delta_{ij}]$، ماتریس همسازه A نامیده می‌شود.

ترانهاده ماتریس همسازه را ماتریس الحاقی نامیده و با N' نمایش داده می‌شود.

تعریف ۴.۲.۱ [۳۴]: فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ باشد. ماتریس $A_{k\times k}$ که از حذف $n-k$ سطر و $n-k$ ستون (متناظر) ماتریس A به‌دست آمده است را زیرماتریس اصلی A می‌نامیم. دترمینان یک زیرماتریس اصلی از A را کهاد اصلی A می‌نامیم.

برای مثال ماتریس $A=[a_{ij}]_{۱\leq i,j\leq ۳}$ را درنظر بگیرید. در این‌صورت A تنها یک کهاد اصلی از مرتبه ۳ دارد که در واقع همان دترمینان A می‌باشد. توجه کنید که برای ماتریس A سه کهاد اصلی مرتبه دوم به‌صورت زیر وجود دارد:

$$\begin{vmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۳} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{vmatrix}.$$

همین‌طور A دارای سه کهاد اصلی از مرتبه اول به‌صورت زیر می‌باشد:

$$|a_{۱۱}|, |a_{۲۲}|, |a_{۳۳}|.$$

تعریف ۵.۲.۱ [۳۴]: ماتریس $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ مفروض است، بنابه تعریف، هر دترمینان استخراجی از این ماتریس که متشکل از عناصر r سطر و r ستون اولیه ماتریس A باشد، $۱\leq r\leq n$ را دترمینان‌های اصلی پیشرو یا کهادهای اصلی پیشرو ماتریس A خوانند. با این تعریف روشن است که ماتریس مربع A از درجه n دارای n کهاد اصلی پیشرو بوده و این n کهاد اصلی پیشرو دترمینان‌هایی از درجه ۱ و درجه ۲ تا درجه n می‌باشند.

مثال ۶.۲.۱ [۳۴]: ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ مفروض است. کهادهای اصلی پیشرو آن عبارتند از:

$$H_۱=|۱|=۱, \quad H_۲=\begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ \end{vmatrix}=۱-۴=-۳, \quad H_۳=\begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۲ \end{vmatrix}=-۲.$$

۳.۱ ماتریس معین مثبت و ماتریس‌های کاملاً مثبت

تعریف ۱.۳.۱ [۳۲، ۶]: ماتریس حقیقی متقارن A را معین مثبت[۱] گوئیم اگر برای هر $x \neq 0$، $x^T Ax > 0$.

ماتریس A را نیمه‌معین مثبت گویند اگر و تنها اگر برای هر $x \neq 0$، $x^T Ax \geq 0$ باشد.

گزاره ۲.۳.۱ [۳۲]: اگر A یک ماتریس معین مثبت باشد آنگاه:

۱ - A^{-1} وجود دارد.

۲ - $a_{ii} > 0$، $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

۳ - زیرماتریس‌های اصلی نیز معین مثبت هستند.

۴ - اگر $N = \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix}$ یک ماتریس متقارن باشد. در این‌صورت N معین مثبت است اگر و تنها اگر A و $C - B^T A^{-1} B$ معین مثبت باشند.

گزاره ۳.۳.۱ [۳۲، ۳۳]: فرض کنید A یک ماتریس متقارن و نیمه معین مثبت باشد. در این‌صورت اگر $\det(A) \neq 0$ باشد، آنگاه A معین مثبت خواهد بود.

برهان: برای ساده‌تر شدن اثبات گزاره از نتایج زیر در مورد مقدار ویژه استفاده می‌کنیم.

۱ - مقادیر ویژه یک ماتریس متقارن همگی نامنفی هستند اگر و تنها اگر آن ماتریس نیمه‌معین مثبت باشد [۳۴].

[۱] Positive definite

۲ ـ مقادیر ویژه یک ماتریس متقارن همگی مثبت هستند اگر و تنها اگر ماتریس، معین مثبت باشد [۳۴].

۳ ـ حاصل‌ضرب مقادیر ویژه یک ماتریس، دترمینان آن ماتریس است [۳۴، ۳۲].

فرض کنیم λ_1 و λ_2 و ... و λ_n مقادیر ویژه ماتریس نیمه‌معین مثبت متقارن $n \times n$، A باشند. با استفاده از نتیجه اول، برای هر i داریم $\lambda_i \geq 0$. با استفاده از سومین نتیجه داریم $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$. چون دترمینان یک ماتریس نیمه‌معین مثبت متقارن صفر نیست، پس همه مقادیر مثبت هستند. با استفاده از دومین نتیجه چنین ماتریسی معین مثبت است. □

تعریف ۴.۳.۱ [۳۳]: یک ماتریس را کاملاً مثبت (نامنفی) گوییم اگر هر کهادش مثبت (نامنفی) باشد.

برای مثال ماتریس زیر کاملاً نامنفی است.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 4 & 5 & 5 \\ 3 & 4 & 4 & 5 & 5 \\ 3 & 4 & 4 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

۴.۱ حاصل‌ضرب هادامارد[۲]

تعریف ۱.۴.۱ [۱۴]: فرض کنیم A و B ماتریس‌های $m \times n$ با درایه‌هایی در $\mathbb{C}$ باشند. حاصل‌ضرب هادامارد A و B را با $A \circ B$ نشان می‌دهیم و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$[A \circ B]_{ij} = [A]_{ij}[B]_{ij}, \quad 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n.$$

[۲] Hadamard product

در واقع حاصل‌ضرب هادامارد همان ضرب ساده درایه‌ای است. قابل ذکر است که حاصل‌ضرب هادامارد همان مزیت‌های (و محدودیت‌های) ضرب در $\mathbb{C}$ را به ارث می‌برد. به‌علاوه هر دو A و B می‌بایست از یک اندازه باشند ولی لزومی به اینکه مربعی باشند نیست. از این پس "$\circ$" را به‌عنوان حاصل‌ضرب هادامارد درنظر می‌گیریم.

قضیه ۲.۴.۱ [۱۴]: فرض کنید A و B ماتریس‌هایی $m \times n$ با درایه‌هایی در $\mathbb{C}$ باشند. در این‌صورت $A \circ B = B \circ A$.

برهان: اثبات این قضیه بلافاصله از خاصیت جابه‌جایی ضرب در $\mathbb{C}$ به‌دست می‌آید. فرض کنیم A و B ماتریس‌هایی $m \times n$ با درایه‌هایی در $\mathbb{C}$ باشند. در این‌صورت

$$[A \circ B]_{ij} = [A]_{ij}[B]_{ij} = [B]_{ij}[A]_{ij} = [B \circ A]_{ij}.$$

$\square$

قضیه ۳.۴.۱ [۱۴]: ماتریس همانی در حاصل‌ضرب هادامارد، ماتریس $m \times n$ است که همه درایه‌هایش ۱ باشند و آن را با نماد J_{mn} نشان می‌دهیم.

قضیه ۴.۴.۱ [۱۴]: فرض کنید A ماتریسی $m \times n$ باشد. در این‌صورت A یک وارون هادامارد دارد (که آن را با $\hat{A}$ نمایش می‌دهیم) اگر و تنها اگر برای هر $۱ \leq i \leq m$ و $۱ \leq j \leq n$، $[A]_{ij} \neq ۰$. علاوه‌براین $[\hat{A}]_{ij} = ([A]_{ij})^{-۱}$.

قضیه ۵.۴.۱ [۱۴]: حاصل‌ضرب هادامارد خطی است. فرض کنیم $\alpha \in \mathbb{C}$ و A، B و C ماتریس‌هایی $m \times n$ باشند. در این‌صورت $C \circ (A + B) = C \circ A + C \circ B$. به‌علاوه $\alpha(A \circ B) = (\alpha A) \circ B = A \circ (\alpha B)$.

برهان: قسمت اول.

$$\begin{aligned}
[C \circ (A+B)]_{ij} &= [C]_{ij}[A+B]_{ij} \\
&= [C]_{ij}\left([A]_{ij}+[B]_{ij}\right) \\
&= [C]_{ij}[A]_{ij}+[C]_{ij}[B]_{ij} \\
&= [C \circ A]_{ij}+[C \circ B]_{ij} \\
&= [C \circ A + C \circ B]_{ij}
\end{aligned}$$

قسمت دوم.

$$\begin{aligned}
[\alpha(A \circ B)]_{ij} &= \alpha[A \circ B]_{ij} \\
&= \alpha[A]_{ij}[B]_{ij} \\
&= [\alpha A]_{ij}[B]_{ij} \\
&= [\alpha A \circ B]_{ij} \qquad \text{اولین تساوی} \\
&= \alpha[A]_{ij}[B]_{ij} \\
&= [A]_{ij}\alpha[B]_{ij} \\
&= [A]_{ij}[\alpha B]_{ij} \\
&= [A \circ \alpha B]_{ij} \qquad \text{دومین تساوی}
\end{aligned}$$

$\square$

۱.۴.۱   ماتریس‌های قطری و حاصل‌ضرب هادامارد

اگر A و B ماتریس‌های قطری باشند می‌توانیم ارتباطی بین ضرب ماتریس‌ها و حاصل‌ضرب هادامارد آنها داشته باشیم به این ترتیب که $A \circ B = AB$ اگر و تنها اگر A و B قطری باشند.

قضیه ۶.۴.۱ [۱۴]: فرض کنیم A و B ماتریس‌های $m \times n$ و D و E ماتریس‌های قطری به‌ترتیب از مرتبه m و n باشند در این‌صورت:

$$\begin{aligned} D(A \circ B)E &= (DAE) \circ B = (DA) \circ (BE) \\ &= (AE) \circ (DB) = A \circ (DBE). \end{aligned}$$

۵.۱ P ـ ماتریس، M ـ ماتریس و ماتریسِ غالب قطری

تعریف ۱.۵.۱ [۳۳]: ماتریس حقیقی $A \in M_n(R)$ را P ـ ماتریس گوییم اگر همه کهادهای اصلی‌اش مثبت باشند.

برای مثال $A = \begin{pmatrix} ۸ & ۶ & ۱ \\ ۴ & ۵ & ۱ \\ ۸ & ۶ & ۱ \end{pmatrix}$ یک P ـ ماتریس است.

تعریف ۲.۵.۱ [۶]: فرض کنیم $\lambda_۱$، $\lambda_۲$، $\cdots$، λ_n مقادیر ویژه ماتریس $A \in C^{n\times n}$ باشند. در این‌صورت شعاع طیفی A را با $\rho(A)$ نمایش می‌دهیم و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\rho(A) = \max_i \{|\lambda_i|\}.$$

تعریف ۳.۵.۱ [۲۲]: فرض کنیم Z نمایش رده همه‌ی ماتریس‌های حقیقی $n \times n$ که درایه‌های غیرقطری آن‌ها نامثبت است، باشد.

$$Z = \{A = (a_{ij}) \in M_n(R) :\ a_{ij} \leq 0,\ i \neq j,\ i, j = 1, 2, \ldots, n\},$$

ماتریس $A \in Z$ را M ـ ماتریس گوییم اگر یک ماتریس نامنفی چون B و برخی اعداد حقیقی نامنفی چون λ وجود داشته باشند به‌طوری‌که:

$$A = \lambda I_n - B, \qquad \lambda \geq \rho(B).$$

اگر $\lambda > \rho(B)$ آنگاه A را یک M ـ ماتریس نامنفرد می‌نامیم.

اگر $\lambda = \rho(B)$ آنگاه A را یک M ـ ماتریس منفرد می‌نامیم.

اگر D ماتریس قطری حاصل از M ـ ماتریس A باشد و $C = D - A$ در این‌صورت شعاع طیفی ماتریس تکراری ژاکوبی $J_A = D^{-1}C$، $\rho(J_A)$ کمتر از یک می‌باشد [۲].

$q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)^T$ را نمایش بردار ویژه متناظر $\rho(J_A)$ درنظر می‌گیریم.

اگر A یک M ـ ماتریس نامنفرد باشد در این‌صورت یک مقدار ویژه مثبت از A مانند $\tau(A)$ وجود دارد که عبارتست از

$$\tau(A) = \left[\rho(A^{-1})\right]^{-1}.$$

$\tau(A)$ می‌نیمم مقدار ویژه A نامیده می‌شود.

تعریف ۴.۵.۱ [۳۱]: ماتریس $n \times n$، A را تحویل‌پذیر[۳] می‌نامیم اگر برای برخی ماتریس جایگشت P، ماتریس $P^T AP$ بلوکی باشد یعنی $P^T AP = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$ که در آن

[۳] Reducible matrix

$B \in M_r(C)$، $C \in M_{n-r}(C)$، $D \in M_{r,n-r}(C)$ و $\circ \in M_{n-r,r}(C)$. اگر یک ماتریس مربعی تحویل‌پذیر نباشد گوییم تحویل‌ناپذیر[۴] است.

فرض کنیم $N = \{۱, ۲, \ldots, n\}$ و $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n,n}$ وارون‌پذیر باشد و برای هر $i \in N$، $a_{ii} \neq \circ$ و $A^{-۱} = (\alpha_{ij})$، تعریف می‌کنیم:

$$\begin{array}{ll} R_i(A) = \sum_{j=۱}^{n} a_{ij}, & C_i(A) = \sum_{j=۱}^{n} a_{ji}, \\ \sigma_i = \frac{۱}{|a_{ii}|} \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, & \delta_i = \frac{۱}{|a_{ii}|} \sum_{j \neq i} |a_{ji}|, \\ R(A) = \max_{i \in N} \sum_{j=۱}^{n} a_{ij}, & r(A) = \min_{i \in N} \sum_{j=۱}^{n} a_{ij}, \end{array}$$

و

$$M' = \max_{i \in N} \sum_{j=۱}^{n} \alpha_{ij}, \qquad m' = \min_{i \in N} \sum_{j=۱}^{n} \alpha_{ij}.$$

تعریف ۱.۵.۵ [۲۲]: ماتریس A را غالب قطری سطری[۵] (یا ستونی[۶]) می‌نامیم اگر برای هر $i \in N$، $\sigma_i \leq ۱$ (یا $\delta_i \leq ۱$).

(به‌عبارت دیگر ماتریسی که در آن قدرمطلق هر درایه‌ی قطری بزرگتر از مجموع قدرمطلق‌های درایه‌های غیرقطری در همان سطر یا بزرگتر از مجموع درایه‌های غیرقطری در همان ستون است غالب قطری نامیده می‌شود.)

ماتریس A را اکیداً غالب قطری سطری[۷] (ستونی) گوییم اگر $\sigma_i < ۱$ ($\delta_i < ۱$).

برای مثال ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۱/۲ & -\circ/۱ & -\circ/۱ \\ -\circ/۳ & ۱ & -\circ/۱ \\ -\circ/۲ & -\circ/۴ & \circ/۸ \end{bmatrix}$ اکیداً غالب قطری سطری می‌باشد.

---
[۴] Irreducible matrix
[۵] Diagonally dominant by rows
[۶] Diagonally dominant by columns
[۷] Strictly diagonally dominant by rows

تعریف ۶.۵.۱ [۲۲]: A را به‌طور ضعیف غالب قطری زنجیره‌ای[۸] می‌نامیم اگر $\sigma_i \leq ۱$ و $J(A) = \{i \in N: \ \sigma_i < ۱\} \neq \emptyset$ و برای هر $i \in N \setminus J(A)$، اندیس‌های $i_۱$ و $i_۲$ و ... و i_k در N وجود داشته باشند به‌طوری‌که: $a_{i_r, i_{r+۱}} \neq ۰$ برای $۰ \leq r \leq k-۱$، که در آن $i_۰ = i$ و $i_k \in J(A)$.

توجه کنیم که یک ماتریس اکیداً غالب قطری، به‌طور ضعیف غالب قطری زنجیره‌ای نیز هست.

برای مثال ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ -۱ & ۴ & -۱ & -۱ & -۱ \\ ۰ & -۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ به‌طور ضعیف غالب قطری زنجیره‌ای است.

تعریف ۷.۵.۱ [۶]: یک نرم ماتریسی بر مجموعه‌ی تمام ماتریس‌های حقیقی $n \times n$ یک تابع حقیقی مانند $\|\cdot\|$ است که بر این مجموعه تعریف می‌شود و برای تمام ماتریس‌های A و B از مرتبه n و هر عدد حقیقی دلخواه مانند α در شرایط زیر صدق می‌کند.

i) $\|A\| \geq ۰$ و $\|A\| = ۰$ اگر و تنها اگر $A = 0$.

ii) $\|\alpha A\| = |\alpha| \, \|A\|$.

iii) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$.

تعریف ۸.۵.۱ [۶]: نرم $\|A\|_E = \left(\sum_{i=۱}^{n} \sum_{j=۱}^{n} |a_{ij}|^۲ \right)^{\frac{۱}{۲}}$ را نرم اقلیدسی می‌گویند.

[۸] Weakly chained diagonally dominant

تعریف ۹.۵.۱ [٦]: فرض کنیم $\rho(A) = \max_i |\lambda_i|$ در این‌صورت:

$$\rho(A^T A) = \|A\|_2^2,$$

یا

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)}.$$

تعریف ۱۰.۵.۱ [٦]: هرگاه A یک ماتریس حقیقی $n \times n$ باشند آنگاه:

الف) $\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$.

ب) $\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$.

گزاره ۱۱.۵.۱ [٦]: اگر $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ در این‌صورت $\|A\|_2 \leq \sqrt{\|A\|_1 \|A\|_\infty}$. درنتیجه اگر A متقارن باشد آنگاه $\|A\|_2 \leq \|A\|_1$.

برهان: اگر $Z \neq 0$ در این‌صورت $A^T A Z = \gamma^2 Z$ که $\gamma = \|A\|_2$ در این‌صورت با نرم گرفتن از طرفین داریم:

$$\begin{aligned} \gamma^2 \|Z\|_1 = \|A^T A Z\|_1 &\leq \|A^T\|_1 \|A\|_1 \|Z\|_1 \\ &\leq \|A\|_\infty \|A\|_1 \|Z\|_1. \end{aligned}$$

باتوجه به این گزاره روشن است که اگر A متقارن باشد آن‌گاه $\|A\|_2 \leq \|A\|_1$. □

برای مثال اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & -1 \\ -2 & 0 & 6 \end{bmatrix}$، آنگاه

$$\|A\|_1 = \max\{1 + 5 + 2, 2 + 4 + 0, 0 + 1 + 6\} = 8,$$

$$\|A\|_\infty = \max\{1 + 2 + 0, 5 + 4 + 1, 2 + 0 + 6\} = 10.$$