بسم الله الرحمن الرحيم

بسمه تعالی

دانشگاه تربیت مدرس

دانشکده علوم ریاضی

تاییدیه اعضای هیأت داوران حاضر در جلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد

اعضای هیئت داوران نسخهٔ نهایی پایان‌نامه **آقای زهیر تویسرکانی‌راوری** رشته **ریاضی‌محض** تحت عنوان: **« مطالعه زیرخمینه‌های لاگرانژی شبه- موازی در فضافرم‌های مختلط »** را از نظر فرم و محتوا بررسی نموده و آن را برای اخذ درجهٔ کارشناسی‌ارشد مورد تأئید قرار دادند.

اعضای هیأت داوران	نام و نام‌خانوادگی	رتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنما	دکتر سیدمحمدباقر کاشانی	استاد	
۲- استاد مشاور	دکتر عباس حیدری	استادیار	
۳- استاد ناظر داخلی	دکتر فرشته سعدی	دانشیار	
٤- استاد ناظر خارجی	دکتر ناصر بروجردیان	استادیار	
۵- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر فرشته سعدی	دانشیار	

آیین نامه چاپ پایان نامه‌های دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس

نظر به اینکه چاپ و انتشار پایان نامه‌های تحصیلی دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس، مبین بخشی از فعالیت‌های علمی-پژوهشی دانشگاه است، بنا بر این به منظور آگاهی و رعایت حقوق دانشگاه، دانش آموختگان این دانشگاه نسبت به رعایت موارد ذیل متعهد می‌شوند:

ماده ۱ در صورت اقدام به چاپ پایان نامه خود، مراتب را قبلاً بطور کتبی به «دفتر نشر آثار علمی» دانشگاه اطلاع دهد.

ماده ۲ در صفحه سوم کتاب (پس از برگ شناسنامه)، عبارت ذیل را چاپ کند:
«کتاب حاضر، حاصل پایان نامه کارشناسی ارشد نگارنده در رشته ریاضی محض است که در سال هشتاد و نه در دانشکده علوم ریاضی دانشگاه تربیت مدرس به راهنمایی جناب آقای دکتر سید محمد باقر کاشانی، مشاوره جناب آقای دکتر عباس حیدری از آن دفاع شده است.»

ماده ۳ به منظور جبران بخشی از هزینه‌های انتشارات دانشگاه، تعداد یک درصد شمارگان کتاب (در هر نوبت چاپ) را به «دفتر نشر آثار علمی» دانشگاه اهدا کند. دانشگاه می‌تواند مازاد نیاز خود را به نفع مرکز نشر درمعرض فروش قرار دهد.

ماده ۴ در صورت عدم رعایت ماده ۳، ۵۰٪ بهای شمارگان چاپ شده را به عنوان خسارت به دانشگاه تربیت مدرس، تأدیه کند.

ماده ۵ دانشجو تعهد و قبول می‌کند در صورت خودداری از پرداخت بهای خسارت، دانشگاه می‌تواند خسارت مذکور را از طریق مراجع قضایی مطالبه و وصول کند؛ به علاوه به دانشگاه حق می‌دهد به منظور استیفای حقوق خود، از طریق دادگاه، معادل وجه مذکور در ماده ۴ را از محل توقیف کتاب‌های عرضه شده نگارنده برای فروش، تأمین نماید.

ماده ۶ اینجانب زهیر تویسرکانی راوری دانشجوی رشته ریاضی مقطع کارشناسی ارشد تعهد فوق و ضمانت اجرایی آن را قبول کرده، به آن ملتزم می‌شوم.

نام و نام خانوادگی: زهیر تویسرکانی راوری
تاریخ و امضا: ۸۹/۱۰/۱

آیین‌نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهش‌های علمی
دانشگاه تربیت مدرس

مقدمه:

با عنایت به سیاست‌های پژوهشی و فناوری دانشگاه در راستای تحقق عدالت و کرامت انسان‌ها که لازمه شکوفایی علمی و فنی است و رعایت حقوق مادی و معنوی دانشگاه و پژوهشگران، لازم است اعضای هیأت علمی، دانشجویان، دانش آموختگان و دیگر همکاران طرح، در مورد نتایج پژوهش‌های علمی که تحت عناوین پایان‌نامه، رساله و طرح‌های تحقیقاتی با هماهنگی دانشگاه انجام شده است، موارد زیر را رعایت نمایند:

ماده ۱- حق نشر و تکثیر پایان نامه و درآمدهای حاصل از آن متعلق به دانشگاه می‌باشد ولی حقوق معنوی پدید آورندگان محفوظ خواهد بود.

ماده ۲- انتشار مقاله یا مقالات مستخرج از پایان نامه به صورت چاپ در نشریات علمی و یا ارائه در مجامع علمی باید به نام دانشگاه بوده و با تأیید استاد راهنمای اصلی، یکی از اساتید راهنما، مشاور و یا دانشجوی مسئول مکاتبات مقاله باشد. ولی مسئولیت علمی مقاله مستخرج از پایان نامه و رساله به عهده اساتید راهنما و دانشجو می‌باشد.

تبصره: در مقالاتی که پس از دانش آموختگی بصورت ترکیبی از اطلاعات جدید و نتایج حاصل از پایان نامه نیز منتشر می‌شود باید نام دانشگاه درج شود.

ماده ۳- انتشار کتاب و یا نرم افزار و یا آثار ویژه حاصل از نتایج پایان نامه و تمامی ترح‌های تحقیقاتی کلیه واحدهای دانشگاه اعم از دانشکده‌ها، مراکز تحقیقاتی، پژوهشکده‌ها، پارک علم و فناوری و دیگر واحدها باید با مجوز کتبی صادره از معاونت پژوهشی دانشگاه و بر اساس آئین نامه‌های مصوب انجام شود.

ماده ۴- ثبت اختراع و تدوین دانش فنی و یا ارائه یافته‌ها در جشنواره ملی، منطقه‌ای و بین المللی که حاصل نتایج مستخرج از پایان نامه و تمامی طح‌های تحقیقاتی دانشگاه باید با هماهنگی استاد راهنما یا مجری طرح از طریق معاونت پژوهشی دانشگاه انجام گیرد.

ماده ۵- این آیین نامه در ۵ ماده و یک تبصره در تاریخ ۸۷/۴/۱ در شورای پژوهشی و در تاریخ ۸۷/۴/۲۳ در هیأت رئیسه دانشگاه به تأیید رسید و در جلسه مورخ ۸۷/۷/۱۵ شورای دانشگاه به تصویب رسیده و از تاریخ تصویب در شورای دانشگاه لازم الاجرا است.

«اینجانب زهیر تویسرکانی راوری دانشجوی رشته ریاضی محض گرایش هندسه ورودی سال تحصیلی ۸۸-۸۷ مقطع کارشناسی ارشد دانشکده علوم ریاضی متعهد می‌شوم کلیه نکات مندرج در آئین نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهش‌های علمی دانشگاه تربیت مدرس را در انتشار یافته‌های مستخرج از پایان نامه خود رعایت نمایم. در صورت تخلف از مفاد آئین نامه فوق الاشعار به دانشگاه وکالت و نمایندگی می‌دهم که از طرف اینجانبنسبت به لغو امتیاز به نام بنده و یا هرگونه امتیاز دیگر و تغییر آن به نام دانشگاه اقدام نماید. ضمناً نسبت به جبران فوری ضرر و زیان حاصله بر اساس برآورد دانشگاه اقدام خواهم نمود و بدینوسیله حق هرگونه اعتراض را از خود سلب نموده‌ام»

نام و نام خانوادگی: زهیر تویسرکانی راوری

تاریخ و امضا: ۸۹/۱۰/۱

دانشگاه تربیت مدرس
دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه دوره کارشناسی ارشد ریاضی محض (هندسه)

مطالعه زیرخمینه‌های لاگرانژی شبه-موازی در فضا فرم‌های مختلط

نگارنده:
زهیر تویسرکانی راوری

استاد راهنما:
دکتر سید محمد باقر کاشانی

استاد مشاور:
دکتر عباس حیدری

دی ماه ۱۳۸۹

تقدیم به کوه و دریا؛

پدر و مادر عزیزم.

یا هو

پیشگفتار

« ریاضیات هیچ حقیقتی ندارد اما بالاترین زیبایی را داراست. یک زیبایی سرد و جدی، درست مانند یک تندیس، به طور شگفت انگیزی محض، و توانا در نهایت جدیت، به طوری که تنها بزرگترینِ هنرمندان می توانند این گونه باشند »

" برتراند راسل"

سپاس پروردگار یکتا را که توفیق دانش آموزی به من بخشید. اکنون که به لطف او، کار نگارش این پایان نامه به پایان رسیده است، بر خود لازم می‌دانم تا از راهنمایی‌های استاد گران سنگ، جناب آقای دکتر سید محمد باقر کاشانی و رهنمودهای استاد گرانقدر، جناب آقای دکتر عباس حیدری سپاس گزاری کنم.

چکیده

در این پایان نامه توصیفی از زیرخمینه‌های شبه موازی در یک فضا فرم (مختلط) ارائه می‌شود. بویژه، زیرخمینه‌های شبه موازی لاگرانژی در فضا فرم‌های مختلط مطالعه شده و چند ویژگی عمومی از زیرخمینه‌های شبه موازی ۲-بعدی بیان می‌شود. همچنین، ابررویه‌ها در فضا فرم حقیقی رده بندی می‌شود، این ابررویه‌ها یا نافی‌گون هستند یا چرخه دوپین. ثابت می‌شود برای $n \geq 3$ زیرخمینه‌های شبه موازی لاگرانژی، نیم موازی‌اند، برای حالت ۲-بعدی یک رده بندی موضعی از رویه‌های لاگرانژی شبه موازی ارائه می‌شود. همچنین، نشان داده شده است رویه‌های مینیمال لاگرانژی شبه موازی هستند. بعلاوه، مثال‌هایی از زیرخمینه‌های شبه موازی، که نیم موازی نیستند ارائه می‌شود.

پایان نامه به تشریح مطالب مرجع‌های [ChL,ALM2] می‌پردازد.

واژه‌های کلیدی: فروبری طولپا، زیرخمینه لاگرانژی، زیرخمینه شبه موازی، زیرخمینه نیمه موازی، فضا فرم.

فهرست

مقدمه

خمینه‌های شبه متقارن توسط ریاضیدانان بسیاری مورد مطالعه قرار گرفته است، ولی هنوز رده بندی کاملی از آن‌ها در دسترس نیست. فروبری‌های شبه موازی تعمیمی از فروبری‌های نیم موازی و در نتیجه تعمیمی از فروبری‌های موازی هستند.

فورس[1] و دیگران مفهوم فروبرهای موازی را معرفی کردند و چنین فروبری‌هایی را رده بندی نمودند ([F,T] و [BaRe]). از سوی دیگر، دپرز[2] و دیگران مفهوم فروبری‌های نیم موازی را ارائه کردند. هرچند، رده بندی فروبری‌های نیم موازی در فضا فرم‌های حقیقی هنوز یک مسئله باز است، ولی چندین مؤلف پیشرفت‌های مهمی در این زمینه به دست آورده‌اند ([AM,Dep,Dep$_2$,Lu,Lu$_2$,Lu$_3$] و [Di]).

زیرخمینه‌های شبه موازی توسط اسپرتی[3] و دیگران در [ALM] و [ALM$_2$] به عنوان تعمیم فروبری‌های نیم موازی از نظر [Dep] معرفی شده است.

این پایان نامه به تشریح مطالب مرجع‌های [ChL] و [ALM$_2$] می‌پردازد و ساختار آن چنین است:

در فصل اول، پیش نیازها بیان شده است.

2- D. Ferus.
3- J. Deprez.
1- A.C. Asperti.

در فصل دوم بنا بر [ALM2] مفهوم فروبری‌های شبه موازی در فضا فرم $Q^N(c)$ مورد مطالعه قرار گرفته است. بطور مشروح یک رده بندی از ابررویه‌های شبه موازی ارائه شده است. این ابررویه‌ها یا نافی گون یا چرخه دوپین هستند. همچنین نشان داده شده است که رویه‌های شبه موازی یا یکروند هستند، یا کلاف عمودی تخت دارند. بعلاوه، فروبری‌های شبه موازی با کلاف نرمال اول بیشین مورد مطالعه قرار گرفته است. سرانجام، مشابه فروبری‌های موازی و نیم موازی، یک دستگاه سه تایی ژردان در ارتباط با هر فروبری شبه موازی معرفی شده است که مطالعه ویژگی‌های جبری چنین دستگاه-هایی خواننده را به نتیجه‌هایی درباره خمینه‌های شبه موازی رهنمون می‌کند.

هدف از فصل سوم مطالعه زیرخمینه‌های لاگرانژی شبه موازی در فضا فرم‌های مختلط می‌باشد. اولین نتیجه‌های فروبری‌های شبه موازی در خمینه‌های تقریباً مختلط با خمیدگی برشی تمام ریخت ثابت $4c$ در [LOr] آورده شده و یک رده بندی موضعی از ابررویه‌های حقیقی شبه موازی داده شده است.

در فصل سوم بنا بر مرجع [ChL]، ابتدا چند ویژگی از زیرخمینه‌های لاگرانژی شبه موازی در فضا فرم‌های مختلط بیان شده است. بویژه، زیرخمینه‌های H–نافی شبه موازی معرفی و مطالعه شده است. همچنین، برای حالت $n \geq 3$ شبه موازی بودن برابر با نیم موازی بودن است. در حالت ۲-بعدی نشان داده شده که رویه‌های مینیمال M^2 در $\tilde{M}^2(4c)$ ϕ–شبه موازی با ($\phi = \frac{3}{2}K$) هستند، چنان که K خمیدگی گاوسی M^2 است. بعلاوه، مثال‌هایی از رویه‌های لاگرانژی که مینیمال نیستند، آورده شده است. همچنین، یک رده بندی موضعی از رویه‌های لاگرانژی شبه موازی ارائه شده است، این رویه‌ها (موضعاً) یا تماماً ژئودزیک هستند، یا تخت و ناتماماً ژئودزیک، یا مینیمال با خمیدگی گاوسی غیر ثابت و نانیم موازی. بویژه، این رده بندی بدست می‌آید که رویه‌های لاگرانژی نیم موازی در فضا فرم‌های مختلط (موضعاً) تماماً ژئودزیک یا تخت هستند. سرانجام، مثال‌هایی از رویه‌های شبه موازی که نیم موازی نیستند آورده شده است.

فصل اول

پیش نیازها

در این فصل به صورت خلاصه پیش نیازها بیان می‌شود.

۱.۱ زیرخمینه و فروبری‌های طولپا

در این بخش زیر خمینه‌های شبه ریمانی خلاصه وار مرور می‌شود.

تعریف ۱.۱.۱ [O; P. 19]: *فرض کنید M و $\tilde{M}$ خمینه‌های هموار باشند، یک فروبری $f : M \to \tilde{M}$، نگاشتی هموار است که f_* برای هر $p \in M$ یک به یک باشد.*

تعریف ۱.۱.۲ [O; P. 121]: *فرض کنید M و $\tilde{M}$ خمینه‌های شبه ریمانی، به ترتیب با متریک‌های $\langle , \rangle$ و $\langle , \rangle'$ باشند. یک فروبری طولپا از M به $\tilde{M}$، فروبری هموار f است، چنان‌که $\langle , \rangle = f^* \langle , \rangle'$. همچنین، یک زیرخمینه فروبرده شده‌ی از خمینه $\tilde{M}$، تصویر خمینه‌ای مانند M توسط فروبری $f : M \to \tilde{M}$ است.*

از این به بعد، در این فصل $\tilde{M}$ یک خمینه شبه ریمانی و M زیرخمینه شبه ریمانی $\tilde{M}$ است، مگر اینکه خلاف آن بیان شود.

تعریف ۱.۱.۳ [O; P. 20]: *زیرخمینه* M *در* $\tilde{M}$ *با نقص بعد یک* ($\dim\tilde{M}-\dim M=1$) *را یک ابررویه نامند.*

تعریف ۱.۱.۴ [ALM; P. 58]: *فرض کنید* M *خمینه شبه ریمانی با متریک* $\langle\ \rangle$ *باشد. برای بردارهای* $x,y\in T_pM$ *عملگر خطی* $x\wedge y:T_pM\to T_pM$ *اینگونه تعریف می‌شود*

$$(x\wedge y)z=\langle y,z\rangle x-\langle x,z\rangle y \qquad (۱.۱)$$

تعریف و گزاره ۱.۱.۵ [O; P. 74]: *فرض کنید* M *یک خمینه شبه ریمانی با التصاق لوی چیویتای* ∇ *باشد. میدان تانسوری خمیدگی ریمانی* M *عبارتست از نگاشت* $C^\infty(M)$–*سه خطی،* $R:\mathcal{X}^3(M)\to\mathcal{X}(M)$ *با فرمول* $R(X,Y)Z=[\nabla_X,\nabla_Y]Z-\nabla_{[X,Y]}Z$. R *یک میدان تانسوری نوع (۱و۳) است.*

تعریف ۱.۱.۶ [O; P. 74]: *می‌توان تانسور خمیدگی ریمانی* R *را به عنوان یک تابع* $\mathbb{R}$-*سه خطی بر هر فضای مماس بر خمینه در نظر گرفت. اگر* $x,y\in T_pM$*، عملگر خطی* $R(x,y):T_pM\to T_pM$ *که هر* z *را به* $R(x,y)z$ *می‌برد عملگر خمیدگی نامند.*

گزاره ۱.۱.۷ [O; P. 75]: *اگر* $x,y,v,w\in T_pM$*، آنگاه*

$$R(x,y)=-R(y,x) \qquad (۱.۲)$$

$$\langle R(x,y)v,w\rangle=-\langle R(x,y)w,v\rangle \qquad (۱.۳)$$

$$\langle R(x,y)v,w\rangle=\langle R(v,w)x,y\rangle \qquad (۱.۴)$$

$$R(x,y)v+R(y,v)x+R(v,x)y=0 \qquad \text{(اتحاد اول بیانکی)} \qquad (۱.۵)$$

تعریف ۱.۱.۸[O; P. 43]: *یک وابرش تانسوری بر خمینه هموار* M *مجموعه نگاشت‌های* $\mathbb{R}$–*خطی* $\mathfrak{D}=\mathfrak{D}_s^r:\mathfrak{T}_s^r(M)\to\mathfrak{T}_s^r(M)$ ($r\geq 0,\ s\geq 0$) *می‌باشد چنان که برای هر تانسور* A *و* B *داریم:*

آ- $\mathfrak{D}(A\otimes B)=\mathfrak{D}A\otimes B+A\otimes\mathfrak{D}B$،

ب- $\mathfrak{D}(CA)=C(\mathfrak{D}A)$ برای هر انقباض C.

هر میدان تانسوری نوع (۱و۱) مانند B بر یک خمینه هموار M، یک وابرش $B\cdot$ را بر جبر تانسوری خمینه تعریف می‌کند که با انقباض‌ها جا به جا می‌شود ([Be; P. 324]). بویژه، میدان تانسوری پادمتقارن نوع (۱و۱)، $R(X,Y)$ عملگر مشتق $R(X,Y)\cdot$ را القا می‌کند. بنا بر این برای

هر میدان تانسوری T از نوع (k و۰)، میدان تانسوری $R\cdot T$ از نوع (k+۲و۰)، را به صورت پایین می‌دهد

$$\begin{aligned}(R.T)(X_1,X_2,...,X_k;X,Y) &= \left(R(X,Y).T\right)(X_1,...,X_k)\\ &= -T\left(R(X,Y)X_1,...,X_k\right)-...-T\left(X_1,...,R(X,Y)X_k\right)\end{aligned}$$

در نتیجه

$$R(X,Y).T = \nabla_X(\nabla_Y T)-\nabla_Y(\nabla_X T)-\nabla_{[X,Y]}T$$

بویژه، برای میدان تانسور خمیدگی ریمانی R میدان تانسوری $R\cdot R$ را داریم، چنان که

$$\begin{aligned}\left(R\cdot R\right)(V,W;X,Y) &= \left(R(X,Y)\cdot R\right)(V,W)\\ &= -R\left(R(X,Y)V,W\right)-R\left(V,R(X,Y)W\right)\end{aligned}$$

همچنین، برای زیرخمینه M در $\tilde{M}$ با تانسور خمیدگی ریمانی $\tilde{R}$ باشد، عملگر $\tilde{R}\cdot\mathbb{I}$، که $\mathbb{I}$ فرم اساسی دوم M در $\tilde{M}$ است، داریم ([ALM; P. 60])

$$\tilde{R}(X,Y)\cdot\mathbb{I} = \left([\tilde{\nabla}_X,\tilde{\nabla}_Y]-\tilde{\nabla}_{[X,Y]}\right)\mathbb{I}\,,\quad \forall X,Y\in\mathcal{X}(M) \tag{۱.۶}$$

چنان که

$$\begin{aligned}\left(\tilde{\nabla}\mathbb{I}\right)(X,Y,Z) &= \left(\tilde{\nabla}_X\mathbb{I}\right)(Y,Z)\\ &= \nabla^{\perp}_X\left(\mathbb{I}(Y,Z)\right)-\mathbb{I}\left(\nabla_X Y,Z\right)-\mathbb{I}\left(Y,\nabla_X Z\right)\end{aligned}$$

گزاره ۱.۱.۹ [ALM; P. 61]: *هرگاه M با التصاق لوی چیویتای ∇ و تانسور خمیدگی ریمانی R، زیر خمینه شبه ریمانی $\tilde{M}$ با التصاق $\tilde{\nabla}$ و تانسور خمیدگی ریمانی $\tilde{R}$ باشد، همچنین M با فرم اساسی دوم $\mathbb{I}$ و تانسور خمیدگی عمودی $R^{\perp}$ باشد، آنگاه داریم*

$$\begin{aligned}\left(\tilde{R}(X,Y)\cdot\mathbb{I}\right)(Z,W) &= R^{\perp}(X,Y)\circ\mathbb{I}(Z,W)+\left(R(X,Y).\mathbb{I}\right)(Z,W)\\ &= R^{\perp}(X,Y)\circ\mathbb{I}(Z,W)-\mathbb{I}(R(X,Y)Z,W)-\mathbb{I}(Z,R(X,Y)W)\end{aligned} \tag{۱.۷}$$

برهان: برای میدان‌های برداری $W,X,Y,Z\in\mathcal{X}(M)$ داریم

$$\left(\tilde{\nabla}_Z\mathbb{I}\right)(X,Y) = \nabla^{\perp}_Z\left(\mathbb{I}(X,Y)\right)-\mathbb{I}(\nabla_Z X,Y)-\mathbb{I}(X,\nabla_Z Y)$$

وابرش هموردای مرتبه دوم $\mathbb{I}$، $\tilde{\nabla}^2\mathbb{I}:\otimes^4\mathcal{X}(M)\to\mathcal{X}^{\perp}(M)$ چنین است.

$$
\begin{aligned}
\left(\tilde{\nabla}^2\mathbb{I}\right)(X,Y,Z,W) &= \left(\tilde{\nabla}_W\tilde{\nabla}_Z\mathbb{I}\right)(X,Y)\\
&= \nabla_W^{\perp}\left[\left(\tilde{\nabla}_Z\mathbb{I}\right)(X,Y)\right]-\left(\nabla_Z^{\perp}\mathbb{I}\right)(\nabla_W X,Y)-\left(\nabla_Z^{\perp}\mathbb{I}\right)(X,\nabla_W Y)\\
&\quad -\left(\tilde{\nabla}_{\nabla_W Z}\mathbb{I}\right)(X,Y)
\end{aligned}
$$

آنگاه داریم

$$
\begin{aligned}
\left(\tilde{R}(X,Y)\cdot\mathbb{I}\right)(Z,W) &= \left(\tilde{\nabla}_X\tilde{\nabla}_Y\mathbb{I}\right)(Z,W)-\left(\tilde{\nabla}_Y\tilde{\nabla}_X\mathbb{I}\right)(Z,W)\\
&= R(X,Y)\circ\mathbb{I}(Z,W)-\mathbb{I}(R(X,Y)Z,W)-\mathbb{I}(Z,R(X,Y)W). \qquad \square
\end{aligned}
$$

لم ۱.۱.۱۰ [O; P. 77]: *فرض کنید $\prod$ یک زیر فضای خطی ۲-بعدی ناتبهگون از فضای مماس بر M در نقطه $p\in M$ تولید شده توسط بردارهای مماس v,w باشد. مقدار عددی پایین مستقل از پایه $\prod$ است، و آن را خمیدگی برشی در نقطه $p\in M$ نسبت به $\prod$ نامند.*

$$\mathrm{Sec}(\prod)=\mathrm{Sec}(v,w)=\frac{\langle R(v,w)v,w\rangle}{\langle v,v\rangle\langle w,w\rangle-\langle v,w\rangle^2} \tag{۱.۸}$$

لم ۱.۱.۱۱ [O; P. 80]: *فرض کنید M یک خمینه ریمانی با خمیدگی برشی ثابت c باشد. آنگاه برای تانسور خمیدگی ریمانی R داریم*

$$R(X,Y)=c(X\wedge Y) \tag{۱.۹}$$

لم (شور) **۱.۱.۱۲** [O; P. 96]: *اگر M^n خمینه شبه ریمانی همبند، $n\geq 3$، و برای هر $p\in M$، خمیدگی برشی M نسبت به صفحه‌های ۲-بعدی ناتبهگون $\prod$ در T_pM ثابت باشد، آنگاه خمیدگی برشی M ثابت است.*

تعریف ۱.۱.۱۳ [O; P. 79]: *خمینه شبه ریمانی M را تخت نامند، هرگاه خمیدگی آن در هر نقطه صفر باشد.*

تعریف ۱.۱.۱۴ [O; P. 81]: *فرض کنید M یک خمینه ۲-بعدی باشد، آنگاه خمیدگی برشی یک تابع حقیقی مقدار بر M است، که آن را خمیدگی گاوسی M نامند.*

تعریف ۱.۱.۱۵ [O; P. 101]: *فرض کنید M یک زیرخمینه n-بعدی از خمینه ریمانی $\tilde{M}$ باشد. کنج متعامد یکه مماس موضعی $\{e_1,\ldots,e_n\}$ را برای M در نظر می‌گیریم. میدان برداری خمیدگی میانگین $M\subset\tilde{M}$ عبارتست از*

$$H = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{I}(e_i, e_i) \tag{۱.۱۰}$$

که در آن $\mathbb{I}$ فرم اساسی دوم M (نسبت به $\tilde{M}$) است.

تعریف ۱.۱.۱۶ [KoN$_{V2}$; P. 379]: *زیرخمینه M^n در $\tilde{M}$ را خمینه مینیمال نامند هرگاه در هر نقطه p از M خمیدگی میانگین صفر باشد.*

تعریف ۱.۱.۱۷ [Le; P. 141]: *فرض کنید M^n یک زیرخمینه از خمینه ریمانی $\tilde{M}$ با فرم اساسی دوم $\mathbb{I}$ و عملگر شکل A باشد. در هر نقطه $p \in M$، برای $\xi \in T_p^{\perp}M$، A_ξ دارای مقادیر ویژه $\kappa_1, \ldots, \kappa_n$ است و پایه یکه متعامد $\{e_1, \ldots, e_n\}$ از فضای مماس T_pM شامل بردارهای ویژه A_ξ وجود دارد. بر مبنای این پایه $\mathbb{I}$ و A_ξ قطری هستند. آنگاه خمیدگی‌های اصلی M در p عبارت است از مقدارهای ویژه A_ξ، و فضای ویژه متناظر با آن‌ها را جهت اصلی می‌نامند.*

خمیدگی‌های اصلی مستقل از انتخاب پایه هستند، اما اگر بردار نرمال ξ را تقییر دهیم علامت خمیدگی اصلی تغییر می‌کند.

گزاره ۱.۱.۱۸ [ALM$_2$; P. 59]: *فرض کنید $f : M^n \to \tilde{M}^{n+1}$ یک ابررویه باشد. ξ بردار عمودی یکه و $\{e_1, \ldots, e_n\}$ کنج یکه متعامد مماس بر M در نقطه $p \in M$ باشد، چنان که عملگر شکل A_ξ را قطری کند. قرار می‌دهیم $\lambda_i = \langle A_\xi e_i, e_i \rangle$ آنگاه λ_i یک خمیدگی اصلی M است.*

گزاره ۱.۱.۱۹ [C$_2$; P. 2]: *فرض کنید M یک خمینه n-بعدی طولپا فروبرده شده در خمینه شبه ریمانی m-بعدی $\tilde{M}$ باشد، و ∇ و $\tilde{\nabla}$ به ترتیب التصاق‌های لوی چیویتای M و $\tilde{M}$ باشند. فرض کنید $\mathbb{I}$ فرم اساسی دوم و A_ξ عملگر شکل در راستای میدان برداری عمودی ξ باشد. آنگاه برای میدان‌های برداری X, Y، مماس بر M فرمول گاوس و وینگارتان به ترتیب چنین است*

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \mathbb{I}(X, Y) \tag{۱.۱۱}$$

$$\tilde{\nabla}_X \xi = -A_\xi X + \nabla_X^{\perp} \xi \tag{۱.۱۲}$$

نتیجه ۱.۱.۲۰ [C$_2$; P. 3]: *فرض کنید $M \subset \tilde{M}$ زیرخمینه شبه ریمانی باشد، آنگاه برای عمگر شکل و فرم دوم اساسی M داریم*

$$\left\langle A_\xi X, Y \right\rangle = \left\langle \mathbb{I}(X, Y), \xi \right\rangle, \quad \forall X, Y \in \mathcal{X}(M), \quad \forall \xi \in \mathcal{X}^{\perp}(M) \tag{۱.۱۳}$$

قضیه (معادله گاوس) **۱.۱.۲۱** [O; P. 100]: فرض کنید $M \subset \tilde{M}$ زیرخمینه شبه ریمانی باشد، و R و $\tilde{R}$ به ترتیب تانسورهای خمیدگی ریمانی M و $\tilde{M}$ باشند و $\mathbb{I}$ فرم اساسی دوم M باشد. آنگاه

$$\langle R(X,Y)V,W\rangle = \langle \tilde{R}(X,Y)V,W\rangle + \langle \mathbb{I}(X,V),\mathbb{I}(Y,W)\rangle - \langle \mathbb{I}(X,W),\mathbb{I}(Y,V)\rangle \qquad (۱.۱۴)$$
$$\forall X,Y,V,W \in \mathcal{X}(M)$$

قضیه (معادله ریچی) **۱.۱.۲۲** [ALM; P. 61]: *برای زیرخمینه ریمانی M از $\tilde{M}$ با فرم اساسی دوم $\mathbb{I}$ و تانسور خمیدگی عمودی $R^{\perp}$، برای $p \in M$ و بردارهای $x,y \in T_pM$ و $\xi,\eta \in T_p^{\perp}M$ داریم*

$$\langle R^{\perp}(x,y)\xi,\eta\rangle = \langle [A_{\xi},A_{\eta}]x,y\rangle \qquad (۱.۱۵)$$

گزاره (معادله کودازی) **۱.۱.۲۳** [O; P. 115]: *فرض کنید M یک زیرخمینه شبه ریمانی $\tilde{M}$ باشد. آنگاه*

$$(\tilde{R}(X,Y)Z)^{\perp} = -(\nabla_X \mathbb{I})(Y,Z) + (\nabla_Y \mathbb{I})(X,Z), \quad \forall X,Y,Z \in \mathcal{X}(M) \qquad (۱.۱۶)$$

نتیجه ۱.۱.۲۴ [O; P. 115]: *فرض کنید $\tilde{M}$ دارای خمیدگی ثابت باشد.*

الف- معادله کودازی $M \subset \tilde{M}$ عبارت است از

$$(\nabla_X \mathbb{I})(Y,Z) = (\nabla_Y \mathbb{I})(X,Z), \quad \forall X,Y,Z \in \mathcal{X}(M) \qquad (۱.۱۷)$$

ب-اگر M ابررویه‌ای در $\tilde{M}$ با عملگر شکل A باشد، آنگاه

$$(\nabla_X A_{\xi})(Y) = (\nabla_Y A_{\xi})(X), \quad \forall X,Y \in \mathcal{X}(M), \quad \forall \xi \in \mathcal{X}^{\perp}(M), \quad \langle \xi,\xi\rangle = 1 \qquad (۱.۱۸)$$

تعریف ۱.۱.۲۵ [O; P. 204]: *فرض کنید B و F خمینه‌های شبه ریمانی و $h > 0$ تابعی هموار بر B باشد، آنگاه ضرب تابدار $B \times_h F$ خمینه ریمانی $B \times F$ به همراه متریک تانسوری پایین است.*

$$g = \pi^*(g_B) + (h \circ \pi)^2 \sigma^*(g_F)$$

که π,σ نگاشت تصویر به ترتیب روی مؤلفه‌های اول و دوم است. B را پایه $B \times_h F$ و F را تار می‌نامیم.

۱.۲ ساختار تقریباً مختلط

تعریف ۱.۲.۱ [LeóR; P. 151]: *یک ساختار تقریباً مختلط بر خمینه هموار M، یک میدان تانسوری J از نوع (۱و۱) است چنان که $J^2=-\mathrm{Id}$. خمینه M با ساختار تقریباً مختلط J را خمینه تقریباً مختلط نامند.*

هرگاه J یک ساختار تقریباً مختلط بر خمینه M باشد. آنگاه، برای هر $p\in M$، J_p یک درونریختی از فضای مماس T_pM است، که $J_p{}^2=-\mathrm{Id}_{T_pM}$. بنا بر این، T_pM یک فضای برداری مختلط با ضرب عددی $\mathbb{C}\times T_pM \to T_pM$ به شکل پایین است.

$$(a+bi)x = ax + bJx, \quad \forall x \in T_pM, \quad \forall a,b\in\mathbb{R}$$

که $i=\sqrt{-1}$. از این رو بعد حقیقی T_pM باید زوج باشد. در واقع، اگر $\{X_1,\dots,X_n\}$ پایه‌ای برای T_pM به عنوان یک فضای برداری مختلط باشد، آنگاه $\{X_1,\dots,X_n,JX_1,\dots,JX_n\}$ پایه‌ای برای T_pM به عنوان فضای برداری حقیقی است.

مثال ۱.۲.۲: فرض کنید $\{e_1,\dots,e_{2n}\}$ پایه‌ای از $\mathbb{R}^{2n}$ باشد. آنگاه ساختار مختلط J بر $\mathbb{R}^{2n}$ عبارتست از

$$J(e_{2i-1})=e_{2i}, \quad J(e_{2i})=-e_{2i-1}, \quad i=1,\dots,n$$

گزاره ۱.۲.۳ [$\mathrm{KoN_{V2}}$; P. 121]: *هر خمینه تقریباً مختلط زوج بعدی و جهت پذیر است.*

گزاره ۱.۲.۴ [W; P. 30]: *هر خمینه مختلط M یک ساختار تقریباً مختلط دارد.*

مثال ۱.۲.۵ [W; P. 31]: کره دو بعدی S^2 در بر دارنده یک ساختار مختلط ($\cong \mathbb{C}\mathrm{P}^1$) است، و کره شش بعدی S^6 دارای یک ساختار تقریباً مختلط است. قضیه‌ای از بورل[1] و سیری[2] در [BS] نشان داده که در میان کره‌های زوج بعدی فقط S^2 و S^6 ساختار تقریباً مختلط می‌پذیرند.

1- A. Borel.
2- J. P. Serre.

تعریف ۱.۲.۶ [LeóR; P. 156]: *فرض کنید M یک خمینه تقریباً مختلط با بعد $2n$ و ساختار تقریبا مختلط J باشد. یک التصاق خطی ∇ بر M را التصاق تقریباً مختلط نامند، هرگاه ساختار تقریباً مختلط، موازی باشد. یعنی*

$$\nabla_X J = 0 \,, \quad \forall X \in \mathcal{X}(M) \tag{1.19}$$

۱.۳ خمینه‌های کیلری

در این بخش یک رده مهم از خمینه‌های تقریباً مختلط معرفی می‌شود.

تعریف ۱.۳.۱ [LeóR; P. 161]: *یک متریک هرمیتی بر خمینه تقریباً مختلط M با ساختار تقریباً مختلط J، یک متریک ریمانی $\langle\ \rangle$ است چنان که برای هر $p \in M$ و بردارهای $x, y \in T_pM$ داشته باشیم $\langle x, y\rangle = \langle Jx, Jy\rangle$.*

تعریف ۱.۳.۲ [LeóR; P. 161]: *خمینه تقریباً مختلط M با یک متریک هرمیتی را خمینه تقریباً هرمیتی نامند. اگر M دارای ساختار مختلط باشد، آن را خمینه هرمیتی نامند.*

اگر M یک خمینه تقریباً هرمیتی با ساختار تقریباً مختلط J و متریک $\langle\ \rangle$ باشد. سه تایی $(M, J, \langle\ \rangle)$ را ساختار تقریباً هرمیتی نامند.

لم ۱.۳.۳ [LeóR; P. 161]: *فرض کنید V یک فضای برداری حقیقی $2n$ بعدی با ساختار تقریباً مختلط J و ضرب داخلی هرمیتی $\langle\ \rangle$ باشد. آنگاه پایه‌ای یکه متعامد به شکل $\{X_1, \ldots, X_n, JX_1, \ldots, JX_n\}$ برای V وجود دارد.*

تعریف ۱.۳.۴ [LeóR; P. 163]: *فرض کنید $(M, J, \langle\ \rangle)$ یک ساختار تقریباً هرمیتی باشد. ۲-فرم Ω بر M چنین تعریف می‌شود*

$$\Omega(X, Y) = \langle X, JY\rangle \tag{1.20}$$