بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه گیلان

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

(گرایش محض)

پایان نامه کارشناسی ارشد

بررسی دوگان زیر مدولهای اول

از :

سیده مریم علیزاده

استاد راهنما :

دکتر احمد عباسی

شهریور ۱۳۸۷

تقدیم به

دوستداران علم و دانش

و

پدر و مادر عزیزم

تقدیر و تشکر

خداوند منان را سپاسگزارم که توفیق انجام کاری هر چند کوچک را در راستای علم به من عطا نمود که بی شک اگر خواست و اراده او نبود ، موفقیت چنین کاری حاصل نمی شد .

در اینجا لازم میدانم مراتب سپاسم را به محضر بزرگانی که مرا در این راه یاری نموده اند ، اعلام نمایم

از جناب آقای دکتر احمد عباسی ، استاد راهنمای بزرگوارم که در تمامی مراحل این پایان نامه کمال مساعدت را نموده اند بسیار تشکر می کنم و برایشان آرزوی موفقیت روز افزون دارم .

از جناب آقای دکتر حبیب ا... انصاری و جناب آقای دکتر فرهاد درستکار که زحمت داوری این کار را تقبل نمود ه اند و نظرات و پیشنهادات مفیدی ارائه کردند ، سپاسگزارم و همچنین از جناب آقای دکتر عزیزپور نماینده محترم تحصیلات تکمیلی و جناب آقای دکتر فتحی مدیر محترم گروه ریاضی ، قدر دانی می کنم .

از خانواده عزیزم که همواره در تمامی مراحل زندگی ام همراه و همیار من بوده اند بسیار سپاسگزارم و از خداوند بزرگ برایشان آرزوی سلامتی و سعادتی خواستارم .

فهرست مطالب

چکیده

بررسی دوگان زیر مدولهای اول

سیده مریم علیزاده

این پایان نامه به مطالعه خواص زیر مدولهای اول و اولیه و زیر مدولهای ثانی و ثانویه اختصاص داده شده است . ابتدا زیر مدولهای اولیه و اول توصیف کرده ایم و بعد با ارائه تعاریفی از زیر مدولهای ثانویه و ثانی ، به راحتی می توانیم بررسی کنیم که زیر مدولهای ثانی ، دوگان زیر مدولهای اول می باشد و نتایجی در این باره مورد مطالعه قرار می دهیم .

کلید واژه ها : زیر مدولهای اول ، اولیه و زیر مدولهای ثانی ، ثانویه .

Abstract

The Dual Notion Of Prime Submodules
Seyedeh Maryam Alizadeh

This thesis is devoted to study some properties of prime , primary , second and secondary submodules .
Frist , we describe the primary and prime submodules .Second , we examine to second submodules with the presentation of definitions of secondary and second submodules . that it is dual prime submodules and related results .

Key words : prime , primary ,second and secondary submodules .

" حقیقت امر . . .

. . . این است که ما کاره ای نیستیم . بدین نکته معترف نبودن خامی و پوچی بسیار می خواهد . و پرسشی پیش می آید که :

پس چه می گویی ؟

برای این پرسش پاسخی اندیشیده ایم . از هر چه بگذریم بالاخره ما هم یک تماشایی این زندگی و زمانه ایم . "

(م . امید)

هدف ما در این پایان نامه بررسی دوگان زیر مدولهای اول است . به این منظور ما ابتدا زیر مدولهای اول و اولیه را تعریف خواهیم کرد سپس به توصیف زیر مدولهای ثانی و ثانویه می پردازیم . در واقع زیر مدولهای ثانی دوگان زیر مدولهای اول می باشد .

این پایان نامه شامل سه فصل است .

در فصل اول تعاریف و قضایای مورد نیاز فصلهای آتی بیان شده است . در بیشتر مواقع برهان قضایا به منابع مربوطه ارجاع داده شده است .

در فصل دوم زیر مدولهای اولیه و اول را تعریف خواهیم کرد و چندین قضیه در آن باره مطرح شده و همچنین قضایایی در باره موضعی سازی مدول به طور مختصر آورده شده است . در نهایت شرایطی که زیر مدول اولیه ، رادیکال اول دارد ، در قضیه ای بیان شده است .

فصل سوم به توصیف زیر مدولهای ثانویه و ثانی می پردازد . گزاره های معادل برای زیر مدول ثانی در چندین قضیه ذکر شده است و همچنین با چه شرایطی هر زیر مدول ثانویه ، ثانی است و برعکس ، در این فصل اشاره شده است . در آخر نتایج تابعگون برای رده مدولهای اول و ثانی مطرح شده است .

فصل اول

مقدمات و مطالب پیشنیاز

مقدمات و مطالب پیشنیاز

۱-۱- مقدمه

در این فصل برخی مطالب مورد نیاز به صورت تعاریف و قضایا یاد آوری می گردد. در سراسر این نوشتار R یک حلقه جابه جایی و یکدار است .

۱-۲- تعریف

(آ) فرض کنیم که M یک R- *مدول و* L و K *زیر مدولهایی از* M *باشد* . در این صورت

$$(L:K)=\{r\in R: rK\subseteq L\}$$

(ب) فرض کنیم که M یک R- *مدول باشد . در این صورت* پوچساز M را به صورت زیر تعریف می کنیم .

$$Ann(M)=\{r\in R: rm=0, \forall m\in M\}$$

روشن است که $(0:M)=Ann(M)$

واضح است که اگر N یک R زیرمدول M باشد،آنگاه

$$Ann(\frac{M}{N}) = (N : M) = \{r \in R : rM \subseteq N\}$$

یک اید ه ال R است .

۱-۳- تذکر

فرض کنیم که M و N دو $R-$مدول به قسمی باشد که $M \subseteq N$.در این صورت

$$Ann(N) \subseteq Ann(M)$$

۱-۴- قضیه

اگر M یک $R-$مدول چپ باشد،آنگاه برای هرمجموعه د لخواه I داریم

$$Ann(\sum_{i\in I} M_i) = \bigcap_{i\in I} Ann(M_i)$$

برهان : به ازای $i \in I$ ، داریم $M_i \subseteq \sum_{i\in I} M_i$.پس بنا بر تذکر ۱-۳، به ازای $i \in I$،

$Ann(\sum_{i\in I} M_i) \subseteq Ann(M_i)$. در نتیجه

$$Ann(\sum_{i\in I} M_i) \subseteq \bigcap_{i\in I} Ann(M_i)$$

برعکس ، فرض کنیم که $r \in \bigcap_{i\in I} Ann(M_i)$. در این صورت به ازای $i \in I$ ، $r \in Ann(M_i)$. پس برای

$x_i \in M_i$ ، $rx_i = 0$.

اگر $x \in \sum_{i\in I} M_i$ باشد ، یعنی $x = x_{i1} + x_{i2} + \dots$ ، آنگاه $rx = rx_{i1} + rx_{i2} + \dots$. پس ، $rx = 0$. یعنی

$r \in Ann(\sum_{i\in I} M_i)$. این نتیجه می دهد که

$$Ann(\sum_{i\in I} M_i) = \bigcap_{i\in I} Ann(M_i)$$

۱-۵- قضیه

اگر M یک R - مدول و I یک ایده ال R باشد به طوری که $I \subseteq Ann(M)$ ، آنگاه M یک $\frac{R}{I}$ - مدول است واگر

N زیر مدول M باشد ، آنگاه N نیز یک $\frac{R}{I}$ - زیرمدول M است .

برهان : همریختی زیر را به ازای $r \in R$ و $m \in M$ تعریف می کنیم ،

$$\frac{R}{I} \times M \to M$$
$$(r+I)m \mapsto rm$$

که $r+I \in \frac{R}{I}$ و $rm \in M$. نشان می دهیم همریختی فوق خوش تعریف است .

به ازای $r_1, r_2 \in R$ داریم :

$$r_1 + I = r_2 + I$$

$$\Rightarrow \qquad r_1 - r_2 \in I$$

به طوری که $I \subseteq Ann(M)$. در نتیجه $(r_1 - r_2)m = 0$ ، یعنی $r_1 m = r_2 m$. پس ، M یک $\frac{R}{I}$ - مدول است .

اگر $N \subseteq M$ ، آنگاه $Ann(M) \subseteq Ann(N)$. در نتیجه $I \subseteq Ann(M) \subseteq Ann(N)$. یعنی N نیز یک $\frac{R}{I}$ -

زیرمدول M است .

۱-۶- تعریف

R - مدول N را ساده می نامیم ، هر گاه N زیر مدول غیر بدیهی به جز صفر نداشته باشد .

۱-۷- تذکر

پوچساز هر R مدول ناصفر M ، زیر مجموعه ای از یک ایده ال بیشین R است .

۱-۸- قضیه

فرض کنیم که N یک R - مدول باشد. در این صورت N ساده است اگر و تنها اگر برای ایده ال بیشین $\underline{m}$ از R داشته

باشیم ، $N \cong \frac{R}{\underline{m}}$.

برهان : ر. ک . [نتیجه ۹-۳، ۱].

۱-۹- تعریف

فرض کنیم که R یک دامنه صحیح و M یک R - مدول باشد . مجموعه

$$\{x \in M : \exists r \in R, r \neq 0, rx = 0\}$$

یک زیرمدول M است . این زیر مدول را زیر مدول تابی M می نامیم و آن را با نماد $T(M)$ نمایش می دهیم .

اگر $T(M) = M$، آنگاه M یک مدول تابی است و اگر $T(M) = 0$ ، مدول M را تاب آزاد می نامیم . یعنی M تاب آزاد است ، اگر برای هر $x \in M, r \in R$ ، برابری $rx = 0$ ایجاب کند $r = 0$ یا $x = 0$.

۱-۱۰- مثال

هر فضای برداری روی حلقه تقسیم D ، تاب آزاد است .

۱ -۱۱- تعریف

R - مدول M را تقسیم پذیر می نامیم اگر برای هر $x \in M$ و هر مقسوم علیه غیر صفر $r \in R$، $y \in M$ وجود داشته باشد به طوریکه $ry = x$.

۱-۱۲- قضیه

اگر P یک R - مدول چپ باشد ،آنگاه گزاره های زیر با یکدیگر معادلند .

(آ) P پروژکتیو است .

(ب) برای هر بروریختی $f : M \to N$ نگاشت $Hom(P, M) \to Hom(P, N)$ بروریختی است .

(ج) برای هر دو مدول P، تابعگون $Hom(P,-) : M \to M$ دقیق است .

(د) برای هر دنباله دقیق $M' \to M \to M''$ ، دنباله

$$Hom(P, M') \to Hom(P, M) \to Hom(P, M'')$$

دقیق است .

برهان : ر. ک .[قضیه ۱-۱۷، ۱].

۱-۱۳- قضیه

اگر E یک R - مدول چپ باشد ، آنگاه گزاره های زیر با یکدیگر معادلند .

(آ) E انژکتیو است .

(ب) برای هر تکریختی $f : N \to M$ ، نگاشت $Hom(M,E) \to Hom(N,E)$ بروریختی است .

(ج) برای هر دو مدول E ، تابعگون $Hom(-,E) : M \to M$ دقیق است .

(د) برای هر دنباله دقیق $M' \to M \to M''$ ، دنباله

$$Hom(M'',E) \to Hom(M,E) \to Hom(M',E)$$

دقیق است .

برهان : ر. ک . [قضیه ۱-۱۸ ، ۱] .

۱-۱۴- قضیه

فرض کنیم ، D یک حلقه تقسیم پذیر باشد . در این صورت هر D - مدول M ، انژکتیو است .

برهان : ر. ک . [قضیه ۹-۵، ۱۸] .

۱-۱۵- قضیه

فرض کنیم ، M یک R - مدول باشد . اگر M انژکتیو باشد ، آنگاه M تقسیم پذیر است .

برهان : ر. ک . [قضیه ۲۳-۳، ۱۳] .

۱-۱۶- تعریف

فرض کنیم ، M یک R - مدول و υ رده ای از R - مدولها باشد . در این صورت M توسط υ تولید می شود ، اگر به ازای یک گردایه ی $\{U_i\}_{i\in I}$ از اعضای υ یک همریختی پوشای $\oplus_{i\in I} U_i \to M$ موجود باشد .

۱-۱۷- تعریف

فرض کنیم ، M یک R -مدول و $\mho$ رده ای از R - مدولها باشد . در این صورت M توسط $\mho$ هم تولید می شود ، اگر گردایه ی $\{U_i\}_{i\in I}$ از اعضای $\mho$ وجود داشته باشد به طوری که همریختی $M \to \prod_{i\in I} U_i$ یک به یک باشد .

۱-۱۸- تذکر

اگردردو تعاریف بالا I مجموعه متناهی باشد ، آنگاه M توسط $\mho$ تولید شده متناهی و هم تولید شده متناهی می باشد .

۱-۱۹- قضیه

اگر F یک R -مدول تخت باشد و $0 \to K \to F \xrightarrow{\varphi} M \to 0$ دنباله دقیق از R - مدول ها باشد ، آنگاه گزاره های زیر با یکدیگر معادلند .

(آ) M تخت است .

(ب) برای هر ایده ال I ، $K \cap FI = KI$.

(ج) برای هر ایده ال تولید شده متناهی I ، $K \cap FI = KI$.

برهان : ر .ک . [قضیه ۵۵-۳ ،۱۳] .

۱-۲۰- نکته

هر مدول آزاد ، تخت است .

۱-۲۱- قضیه

فرض کنیم ، R یک حوزه صحیح و M یک R- مدول باشد . در این صورت اگر M یک مدول تخت باشد ، آنگاه تاب آزاد است .

برهان : فرض کنیم که M یک مدول تخت باشد . در این صورت F یک R - مدول آزاد وجود دارد و K زیر مدول F ، به طوری که دنباله $0 \to K \to F \xrightarrow{\varphi} M \to 0$ دقیق است پس بنا بر قضیه ۱-۱۹ ، برای هر ایده ال I ، $K \cap FI = KI$. فرض کنیم که $m \in M$ و $rm = 0$ و $r \neq 0$. اگر $x \in F$ و $\varphi(x) = m$ ، آنگاه $rx \in K \cap rF = rK$. دراین صورت برای $k \in K$ ، $rx = rk$. چون F یک R - مدول تاب آزاداست پس ، $r(x-k) = 0$ بنابراین ، $x = k \in K$. در نتیجه $m = \varphi(x) = 0$. یعنی M تاب آزاد است .

۱-۲۲- قضیه

فرض کنیم ، M یک R-مدول تولید شده متناهی باشد . در این صورت اگر $f: M \to M$ یک همریختی R-مدولی پوشا باشد ، آنگاه f یک به یک است . لذا ، هربروریختی از M به M ، یک خودریختی از M است .

برهان : ر .ک . [قضیه۲-۱،۱۷] .

۱-۲۳- لم

فرض کنیم ، M یک R-مدول و f همریختی از M باشد . در این صورت

(آ) اگر M آرتینی باشد ، آنگاه به ازای $n \in \aleph$ ی ، $\operatorname{Im} f^n + Ker f^n = M$. بنابراین ، f یک خودریختی است اگر و تنها اگر f یک به یک باشد .

(ب) اگر M نوتری باشد ، آنگاه به ازای $n \in \aleph$ ی ، $\operatorname{Im} f^n \cap Ker f^n = 0$. بنابراین ، f یک خودریختی است اگر و تنها اگر f پوشا باشد .

برهان (آ) : زنجیری از $\operatorname{Im} f \leq M$ را در نظر می گیریم

$$\operatorname{Im} f \geq \operatorname{Im} f^2 \geq \ldots$$

فرض کنیم که M آرتینی باشد . در این صورت این زنجیر ایستا است و $n \in \aleph$ ی وجود دارد به قسمی که

$$\operatorname{Im} f^{2n} = \operatorname{Im} f^n$$

اگر $x \in M$ ، آنگاه $f^n(x) \in \operatorname{Im} f^{2n}$. پس ، به ازای $y \in M$ ، داریم $f^n(x) = f^{2n}(y)$

$$x = f^n(y) + (x - f^n(y)) \in \operatorname{Im} f^n + Ker f^n$$

از این رو ، اگر f یک به یک باشد ، آنگاه $Ker f = 0$. پس ، $\operatorname{Im} f^n = M$.

برهان (ب) : مشابه (آ) اثبات می شود .

۱-۲۴- تعریف

فرض کنیم که M یک R- *مدول باشد*.در این صورت M را با طول متناهی می نامیم اگر زیر مدولهای $M_n = M, \ldots, M_1, M_0 = 0$ از M وجود داشته باشند به طوری که

$$M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset \ldots \subset M_{n-1} \subset M_n$$

طول زنجیر فوق برابر با n تعریف می شود .

۱-۲۵- قضیه

فرض کنیم که M یک R- *مدول باشد*.در این صورت M با طول متناهی است اگر و تنها اگر M نوتری و آرتینی باشد .

برهان : ر .ک . [۱].

۱-۲۶- قضیه

اگر M یک مدول با طول متناهی n و f یک خود ریختی از M باشد ، آنگاه

$$M = \operatorname{Im} f^n \oplus Kerf^n$$

برهان : فرض کنیم ، M یک مدول با طول متناهی باشد . در این صورت بنا بر قضیه ۱-۲۵ ، M نوتری و آرتینی است . پس بنا بر لم ۱-۲۳ ، به ازای $m \in \aleph$ ی $M = \operatorname{Im} f^m \oplus Kerf^m$. اما چون M با طول متناهی n است پس ،

$$\operatorname{Im} f^m = \operatorname{Im} f^n , Kerf^m = Kerf^n$$

۱-۲۷- تعریف

اگر M یک R -مدول و N زیر مدول سره M باشد ، آنگاه N زیر مدول بیشین M است هرگاه N مشمول هیچ زیر مدول سره غیر از خودش نباشد .

۱-۲۸- تعریف

اگر M یک R -مدول و N زیر مدول ناصفر M باشد ، آنگاه N زیر مدول کمین M است هرگاه N شامل هیچ زیر مدول نا صفر غیر از خودش نباشد .

۱-۲۹- تذکر

زیر مدول نا صفر N از M را زیر مدول کمین است ، اگر N یک مدول ساده باشد .

۱-۳۰- تعریف

فرض کنیم ، $\{N_i\}_{i\in I}$ خانواده ای از زیر مدولهای ساده N باشد . اگر N جمع مستقیم این خانواده باشد ، آنگاه $N = \bigoplus\limits_{i\in I} N_i$ تجزیه نیم ساده N است . در این صورت مدول N را نیم ساده می نامیم ، اگر تجزیه نیم ساده داشته باشد .

۱-۳۱- قضیه

برای هر R - مدول N ، گزاره های زیر با یکدیگر معادلند .

(آ) N نیم ساده است .

(ب) N توسط مدولهای ساده تولید شده است .

(ج) N به صورت جمع خانواده ای از زیر مدولهای ساده است .

(د) N به صورت جمع زیر مدولهای ساده خودش است .

(و) هر زیر مدول N یک جمعوند مستقیم N است .

(ه) هر دنباله دقیق کوتاه $0 \to K \to N \to M \to 0$ شکافته است .

برهان : ر .ک . [قضیه ۶-۹، ۱] .

۱-۳۲- تعریف

فرض کنیم که υ خانواده ای از R - مدولها و M یک R - مدول باشد . در این صورت تعریف می کنیم

$$Tr_M(\upsilon) = \sum\{\operatorname{Im} h : h : U \to M, U \in \upsilon\}$$

۱-۳۳- قضیه

فرض کنیم که υ خانواده ای از R - مدولها و M یک R - مدول باشد . در این صورت $Tr_M(\upsilon)$ بزرگترین زیر مدول M است که توسط خانواده υ تولید می شود و این زیر مدول یکتاست .

برهان : ر .ک . [۱] .

۱-۳۴- تعریف

فرض کنیم که S خانواده تمام R - مدولهای ساده و M یک R - مدول باشد . در این صورت تعریف می کنیم

$$Soc(M) = Tr_M(S) = \sum\{\operatorname{Im} h : h : U \to M, U \in S\}$$

۱-۳۵- تذکر

فرض کنیم ، M یک R-مدول باشد . در این صورت از تعریف بی درنگ نتیجه می شود که M نیم ساده است اگر و تنها اگر $M = Soc(M)$.

۱-۳۶- تعریف

فرض کنیم ، N و N' زیر مدولهای M باشد به طوری که $N \cap N' = 0$ و N' تحت این خاصیت بیشین باشد . در این صورت N' را M-متمم N می نامیم .

۱-۳۷- تعریف

فرض کنیم که M یک R-مدول و L زیر مدول M باشد . در این صورت L یک زیر مدول اساسی M است اگر به ازای هر زیر مدول N از M ، $N \cap M = 0$ ، آنگاه $N = 0$. زیر مدول اساسی L از M را با نماد $L \lhd M$ نمایش می دهیم .

۱-۳۸- تعریف

فرض کنیم که M یک R-مدول و L زیر مدول M باشد . در این صورت L یک زیر مدول زائد M است اگر به ازای هر زیر مدول N از M ، $N + L = M$ ، آنگاه $N = M$. زیر مدول زائد L از M را با نماد $L \prec\prec M$ نمایش می دهیم .

۱-۳۹- قضیه

فرض کنیم که N زیر مدول M و N' یک M-متمم N باشد . در این صورت

(آ) $N \oplus N' \lhd M$

(ب) $\dfrac{N \oplus N'}{N'} \lhd \dfrac{M}{N'}$

برهان : ر .ك . [قضیه ۱۲–۱۸، ۱].

۱–۴۰– قضیه

اگر M یک R – مدول چپ باشد ، آنگاه

$$Soc(M) = \sum\{K \leq M : \text{در } M \text{ کمین است } K\}$$

$$= \bigcap\{L \leq M : \text{در } M \text{ اساسی است } L\}$$

برهان : اثبات تساوی اول ، فرض کنیم K زیر مدول کمین M باشد . در این صورت بنا بر تعریف ۱–۲۹ ، K زیر مدول ساده M نیز است و بنا بر تعریف $Soc(M)$ بدیهی است .

فرض کنیم که N زیر مدول ساده ای از M باشد . در این صورت اگر L در M اساسی باشد ، آنگاه $L \cap N \neq 0$.

پس ، $N \leq L$. از این رو ، $Soc(M)$ شامل هر زیر مدول اساسی M است .

از طرف دیگر فرض کنیم که

$$H = \bigcap\{L \leq M : \text{در } M \text{ اساسی است } L\}$$

ادعا می کنیم که H نیم ساده است .

فرض کنیم که $N \leq H$ و N' زیر مدول مکمل N باشد . در این صورت $N + N' = N \oplus N' \lhd M$ ، اما $N \leq H \leq N \oplus N'$ وبنا بر قانون مدولی

$$H = H \cap (N \oplus N') = N \oplus (H \cap N')$$

پس N جمعوند مستقیم H است و بنا بر قضیه ۱–۳۱ ، H نیم ساده است .

۱–۴۱– قضیه

اگر M یک R – مدول و N زیر مدول M باشد به قسمی که $N \lhd M$ ، آنگاه $E(N) = E(M)$. که در آن E پوش انژکتیو است .

برهان : ر .ك . [قضیه ۱۲–۱۸، ۱].

۱–۴۲– قضیه