بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه شهید بهشتی

دانشکده علوم ریاضی

گروه آمار

پایان نامهٔ کارشناسی ارشد آمار بیمه

چگالی زمان ورشکستگی در مدل ریسک کلاسیک

توسط

مریم مقدمی

استاد راهنما

دکتر عبدالرحیم شهلایی

استاد مشاور

دکتر محمد ذکایی

۱۳۸۸

در آغاز لازم می‌دانم

به پاس تعبیر عظیم و انسانی شان از کلمه ایثار و ازخود گذشتگی،

به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان که در این سردترین روزگاران بهترین پشتیبان است،

به پاس قلب‌های بزرگشان که فریادرس است،

و به پاس محبت‌های بی‌دریغشان که هرگز فروکش نمی‌کند،

از پدر و مادر گرامی ام کمال تشکر و قدردانی را بنمایم.

همچنین از زحمات اساتید محترم و دانشجویان صمیمی و مهربان دانشگاه شهید بهشتی و به خصوص استاد ارجمند جناب آقای دکتر شهلایی که با راهنماییهای بی‌دریغ خود راهگشای من در پیمودن این راه بودند و جناب آقای دکتر ذکایی که افتخار مشاوره ایشان در فراز و نشیب این راه نیروبخش قدمهای اراده‌ام بود، کمال تشکر و سپاس را دارم.

هرچیزی در این دنیا پایان یافتنی ست؛ با تمام وجودم این پایان نامه را به کسی تقدیم می‌کنم که عشقم نسبت به اون هیچوقت پایان یافتنی نیست.

پیش گفتار

اهمیت منحصر به فرد بیمه درآن است که برخلاف بسیاری از تدابیر و برنامه‌هایی که برای شرایط به سامان تنظیم شده‌اند، ظرفیت خود را برای رویارویی با خطرها وشرایط نابسامان که موجب تهدید فعالیت‌های جاری اقتصادی و اجتماعی هستند سامان دهی می‌نماید. بیمه یک مکانیسم انتقال مخاطره است که از طریق آن بار مخاطره زیان‌های اقتصادی ناشی از وقوع خسارت از یک شخص یا بنگاه اقتصادی به دیگران منتقل شده و در سطح گسترده‌تر پیش بینی شده‌ای قرار می‌گیرد. از این رو مسائل مربوط به ورشکستگی برای ادامهٔ حیات یک شرکت بیمه بسیار مهم است و در تصمیم‌گیری‌های مدیریت یک شرکت بیمه نقش بسیار مهمی ایفا می‌کند.

نظریه مخاطره و نظریه‌های مرتبط با آن، بخصوص ورشکستگی نقش مهمی را در ریاضیات بیمه بازی می‌کنند. تاکنون کتاب‌ها و مقالات بسیاری در این زمینه نوشته و پژوهش‌های بسیاری هم در این مورد انجام شده است.

در این ارتباط می‌توان به مقاله‌ای از دیکسون و واترز(۲۰۰۲) اشاره نمود که مبادرت به بدست آوردن تابع چگالی زمان ورشکستگی و سه گشتاور اول آن به صورت تقریبی نمودند. تا سال ۲۰۰۲ تمامی سعی‌ها مبتنی بر افزایش دقت تقریب‌های ارائه شده بود. در سال ۲۰۰۳ احتمال زمان ورشکستگی با ادعاهای نمایی توسط ویلموت به طور دقیق محاسبه شد. اکثر مقاله‌های ارائه شده در سال‌های اخیر، از دستاوردهای گربر-شیو (۱۹۹۸) استفاده کرده‌اند که مبتنی بر تبدیل لاپلاس تابع چگالی زمان ورشکستگی و استفاده از معادلهٔ تابع تاوان تخفیف یافته است. از تحقیقات سال‌های ۲۰۰٤ و ۲۰۰۵ می‌توان به بررسی زمان خروج از حالت ورشکستگی شرکت بیمه و همچنین مطالعات

بسیاری که دربارهٔ احتمـال زمـان ورشکسـتگی در مـدل مخـاطرهٔ پواسـون مرکـب بـا ادعاهایی از توزیع‌های مختلف انجام شده است، اشاره کرد.
دراین پایان‌نامه که برپایهٔ مقاله‌ای از دیکسون و ویلموت (۲۰۰۵) نگاشـته شـده اسـت، سعی براین است که تابع چگالی زمان ورشکستگی در مـدل مخـاطره کلاسـیک را بـه-صورت صریح بدست آوریم. بدیهی است که از موارد بدست آمده می‌توان در تحلیـل-های آماری یا بیمه‌ای مشابه بهره برد. مخصوصاً که موضوع ورشکستگی شـرکت هـای بیمه بسیار مورد توجه بوده و شرکت‌های بیمه تمامی سعی خود را مبتنی بر هرچه دور کردن زمان ورشکستگی می‌کنند که این شامل منظور کردن نتایج بدست آمده از تحلیـل ورشکستگی در تمامی بیمه‌نامه‌ها و نیز محاسبه حق بیمه می‌شود.

در اینجا خلاصه‌ای از آنچه که در این پایان نامه مطرح می‌گردد بیان می‌شود تا خواننده با روند نگارش این پایان نامه آشنا شود.

در ابتدای این پایان نامه به بررسی چند مبحث در آمار و بیمه پرداخته شـده اسـت کـه هرکدام با توجه به نیازهای پایان نامه آورده شده است. بدین ترتیب در فصل اول سعی شده است که هرچه خلاصه‌تر به این مـوارد پرداختـه شـود و در جـای لازم خواننـده علاقه‌مند برای اطلاعات بیشتر به منـابع مختلـف ارجـاع داده شـود. در فصـل دوم بـه چگونگی بدست آوردن تابع چگالی زمان ورشکستگی با استفاده از معادلـه تـابع تـاوان تخفیف یافتهٔ گربر- شیو پرداخته و در فصـل سـوم بطـور مسـتقیم از معکـوس تبـدیل لاپلاس تابع چگالی زمان ورشکستگی، تابع چگالی زمان ورشکسـتگی را بدسـت مـی آوریم. در فصل چهارم از نتایج بدست آمده از فصل‌های دوم و سـوم اسـتفاده کـرده و تابع چگالی زمان ورشکستگی را درحـالتی کـه توزیـع ادعاهـا ارلانـگ آمیختـه اسـت، محاسبه می‌کنیم.

امید است که نتایج بدست آمده دراین پایان نامه بتوانـد راه‌گشـای خواننـده گرامـی در مسائل بیمه‌ای باشد.

نمادها

احتمال ورشکستگی زمان متناهی .... $\psi(u,t)$

پیچش n - تایی .... F^{n*}

تابع توزیع متغیر تصادفی x .... $F(x)$

تبدیل لاپلاس .... $\tilde{f}$

تعداد ادعاها تا زمان t .... $N(t)$

توزیع ارلانگ .... $E(n,x)$

توزیع تعادلی .... F_1

تابع چگالی ورشکستگی زمان متناهی .... $w(u,t)$

سیگما میدان بورل .... $\sigma(\beta)$

فرایند مازاد .... $U(t)$

فرایند مخاطره جمعی .... $S(t)$

فضای احتمال پایه .... (Ω, F, P)

مجموعه اعداد حقیقی .... $\mathbb{R}$

میانگین ادعاهای فردی .... m_1

چکیده

یکی از راههای بدست آوردن احتمال زمان ورشکستگی، دانستن تابع چگالی زمان ورشکستگی است. در این پایان نامه، سعی بر این است که بتوانیم تابع چگالی زمان ورشکستگی در مدل مخاطره کلاسیک را با استفاده از معکوس تبدیل لاپلاس مربوطه بدست آورده و به کمک آن احتمال زمان ورشکستگی را در حالتی را که توزیع ادعاها ارلانگ آمیخته است محاسبه نماییم و درپایان نشان می‌دهیم احتمال ورشکستگی زمان متناهی برای این حالت چگونه بدست می‌آید.

واژه‌های کلیدی:

زمان ورشکستگی، تبدیل لاپلاس، توزیع هندسی مرکب، توزیع ارلانگ آمیخته، ورشکستگی زمان متناهی، تابع تاوان تخفیف یافته گربر- شیو، قضیهٔ تابع ضمنی لاگرانژ.

فهرست مندرجات

فهرست شکل‌ها

فهرست جدول‌ها

فصل ۱

تعریف‌ها و مفاهیم اولیه

برای بدست آوردن تابع چگالی زمان ورشکستگی، به برخی از مفاهیم آمار و بیمه نیاز داریم که در این فصل سعی بر آن شده است که به طور خلاصه به آنها پرداخته و خواننده برای اطلاعات بیشتر به منابع مختلف ارجاع داده شود.

۱.۱ معرفی برخی توزیع‌های مورد نیاز

تعریف ۱.۱.۱ : P یک اندازه احتمال گسسته بر $\mathbb{R}$ است اگر و تنها اگر دنباله‌های $\{t_n\}$ و $\{p_n\}$ از اعداد حقیقی چنان موجود باشند که برای هر n، $p_n \geq 0$، $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1$ و بتوان تابع توزیع نظیر P را به صورت

$$F(x) = \sum_{n} p_n I_{[t_n,\infty)}$$

نمایش داد که در آن

$$I_{[t_n,\infty)}(x)=\begin{cases}1 & x\in[t_n,\infty)\\ 0 & x\notin[t_n,\infty)\end{cases}$$

تابع توزیع یک اندازه احتمال گسسته تنها در جهش‌ها افزایش می‌یابد.

جهش‌ها در نقاط t_n با اندازه جهش p_n هستند. باید توجه داشت که تعداد جهش‌ها حداکثر شماراست و از این جهت با دنباله‌ای از جهش‌ها مانند $\{t_n\}$ سروکار داریم.

واضح است که تابع توزیع نظیر P به صورت پله‌ای است همچنین اگر شکل یک تابع توزیع، پله‌ای باشد آنگاه توزیع یا اندازه احتمال نظیر آن گسسته است. مثلاً توزیع پواسون، توزیع برنولی و توزیع دوجمله‌ای گسسته‌اند و نمودار توزیع آنها پله‌ای است.

تعریف ۲.۱.۱ : یک اندازه احتمال P بر $\mathbb{R}$ را پیوستهٔ مطلق گوییم هرگاه P دارای چگالی باشد. یعنی یک تابع اندازه‌پذیر و نامنفی f بر $\mathbb{R}$ چنان موجود باشد که:

$$.P((-\infty,x]\,)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt$$

پس می‌توان گفت اندازه احتمال P بر $\mathbb{R}$ پیوسته مطلق است اگر و تنها اگر یک تابع اندازه‌پذیر و نامنفی f چنان موجود باشد که $\int_R f(t)dt=1$.

وقتی‌که P چگالی دارد، مقادیر اندازه احتمال P کاملاً توسط چگالی f تعیین می‌شود.

تعریف ۳.۱.۱ : توزیع آمیخته شامل هر دو نوع توزیع است. می‌توان گفت توزیع آمیخته توزیع پیوسته است اما حداقل در یک نقطه و حداکثر در تعداد شمارش‌پذیری از نقاط دارای جرم احتمال است. بنابراین در توزیع آمیخته حداقل یک جهش داریم.

تعریف ٤.۱.۱ :تابع توزیع تعادلی از $F(y)$ که با $F_1(y)$نشان داده می‌شود، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F_1(y) = 1 - \overline{F}_1(y) = \int_0^y \{\overline{F}(x)/E(Y)\}\, dx \quad ,y \geq 0$$

همچنین تبدیل لاپلاس مربوط به آن نیز با $\widetilde{f}_1$ نشان داده می‌شود.

واز آنجاییکه $\overline{F}(y) = 1 - F(y)$ و $E(Y) = \int_0^\infty \overline{F}(y)dy$، لذا داریم:

$$\int_0^\infty \{\overline{F}(y)/E(Y)\}\, dy = 1.$$

بنابراین $f_1(y) = \dfrac{\overline{F}(y)}{E(Y)}$ یک تابع چگالی است (حتی اگر $F(y)$ مطلقاً پیوسته نباشد).

تعریف ۵.۱.۱ : توزیع ارلانگ یک توزیع پیوسته است که به ازای همهٔ مقادیر حقیقی مثبت بزرگتر از صفر تعریف می‌شود و با دو پارامتر مشخص می‌شود. پارامتر شکل α که یک عدد صحیح مثبت و پارامترنرخ β که یک عدد حقیقی مثبت است. این توزیع گاهی با معکوس پارامتر نرخ معرفی می‌شود که به این پارامتر، θ (پارامتر مقیاس) گفته می‌شود. ($\theta = \dfrac{1}{\beta} > 0$).

زمانی‌که پارامتر شکل α برابر با ۱ باشد این توزیع بـه توزیـع نمـایی تبـدیل می‌شود. توزیع ارلانگ حالت خاصی از توزیع گاما می‌باشـد در صـورتیکه پـارامتر α یک عدد صحیح باشد. در توزیع گاما این پارامتر به عدد صحیح محدود نمی‌شود.

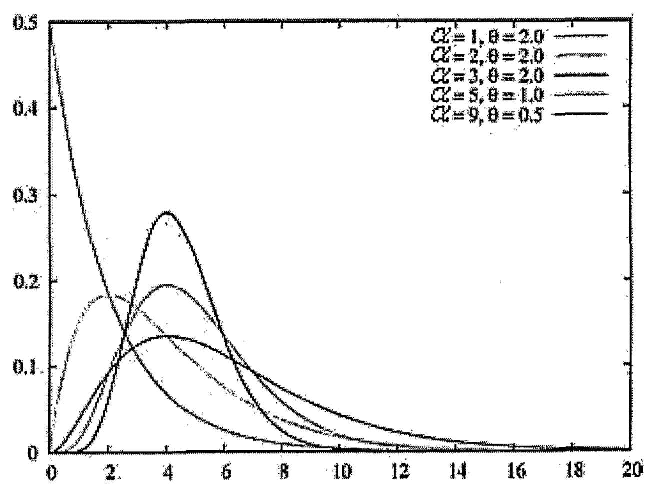
تابع چگالی احتمال توزیع ارلانگ به فرم زیر می‌باشد:

$$f(x;\alpha,\beta)=\frac{\beta^{\alpha}x^{\alpha-1}e^{-\beta x}}{(\alpha-1)!} \qquad \forall x,\beta \geq 0$$

زمانی‌که پارامتر مکان θ را داریم، تابع چگالی احتمال به فرم زیر می‌باشد:

$$f(x;\alpha,\theta)=\frac{x^{\alpha-1}e^{-\frac{x}{\theta}}}{\theta^{\alpha}(\alpha-1)!} \qquad \forall x,\theta \geq 0$$

در شکل ۱.۱.۱ نمودار تابع چگالی توزیع ارلانگ به ازای مقادیر مختلـف پارامترهـای α و θ نمایش داده شده است.



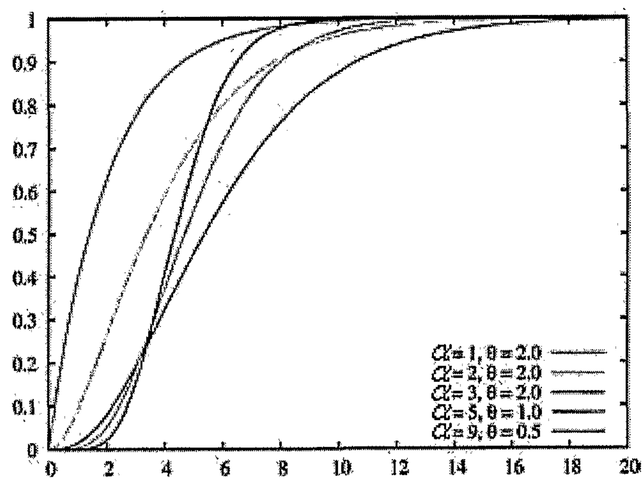
شکل ۱.۱.۱ تابع چگالی توزیع ارلانگ

به علت وجود تابع فاکتوریل در مخرج توزیع ارلانگ تنها زمانی‌که پارامتر α یک عدد صحیح مثبت است تعریف می‌شود.
این توزیع گاهی به فرم توزیع $\alpha-$ ارلانگ نیز خوانده می‌شود. (برای مثال توزیع ارلانگ ۲، توزیع ارلانگ با پارامتر شکل $\alpha = ۲$است).

تابع توزیع تجمعی توزیع ارلانگ به فرم زیر است:

$$F(x;\alpha,\beta) = ۱ - \sum_{n=۰}^{\alpha-۱} e^{-\beta x} (\beta x)^n \big/ n!$$

در شکل ۲.۱.۱ نمودار تابع توزیع تجمعی ارلانگ به ازای مقادیر مختلف پارامترهای α و θ نمایش داده شده است.



شکل۲.۱.۱ تابع توزیع تجمعی ارلانگ

در جدول ۱.۱.۱، بعضی مشخصات توزیع ارلانگ آورده شده است.

جدول ۱.۱.۱ برخی روابط مربوط به توزیع ارلانگ

پارامترها	$\alpha > 0 \in Z$ (پارامتر شکل) $\beta > 0$ (پارامتر نرخ) $\theta = \frac{1}{\beta} > 0$ (پارامتر مکان)
تکیه گاه	$x \in [0 ;\infty)$
تابع چگالی احتمال	$\frac{\beta^{\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}}{(\alpha-1)!}$
تابع توزیع تجمعی	$1-\sum_{n=0}^{\alpha-1} e^{-\beta x} (\beta x)^n / n!$
میانگین	α/β
میانه	فرم صریح بسته‌ای وجود ندارد
مد	$(\alpha-1)/\beta \quad \forall \alpha \geq 1$
واریانس	α/β^2
چولگی	$\frac{2}{\sqrt{\alpha}}$
تابع مولد گشتاور	$(1-t/\beta)^{-\alpha} \quad \forall t < \beta$
تابع مشخصه	$(1-it/\beta)^{-\alpha}$

تعریف ٦.۱.۱ : فرض‌کنید که N متغیر تصادفی شمارشی با تابع احتمال $q_n = \Pr(N = n)$ برای $n = ۰,۱,۲,...$ باشد. همچنین فرض‌کنید $\{X_n, n = ۱,۲,...\}$ دنباله ای از متغیرهای تصادفی مثبت، مستقل (همچنین مستقل از N) و هم‌توزیع با تابع توزیع P باشد. اینک توزیع مجموع تصادفی

$$S = X_۱ + X_۲ + ... + X_N$$

را توزیع مرکب می‌نامیم که در آن، اگر $N = ۰$، آنگاه $S = ۰$.

تابع توزیع S به صورت زیر بدست می‌آید:

$$F_S(x) = \Pr(S \le x) = \Pr(X_۱ + X_۲ + ... + X_N \le x)$$

$$= \sum_{n=۰}^{\infty} F^{*n}(x) \Pr(N = n)$$

$$= \sum_{n=۰}^{\infty} F^{*n}(x) q_n \quad , x \ge ۰$$

معمولاً نام توزیع مرکب را از نام توزیع N می‌گیرند. در اینجا یادآوری می‌کنیم که $F^{*n}(x)$ تابع توزیع مجموع n متغیر تصادفی مستقل و هم‌توزیع با تابع توزیع F است؛ به عبارتی پیچش n ام $F(x)$ با خودش را نمایش‌می‌دهد.

اکنون حالتی را درنظربگیرید که N دارای توزیع هندسی با پارامتر $\rho \in (۰,۱)$ باشد، بدین ترتیب S دارای توزیع هندسی مرکب خواهدبود.

مثال: توزیع نامنفی $F(x)$، توزیع هندسی مرکب نامیده می‌شود هرگاه:

$$F(x) = \sum_{n=۰}^{\infty} (۱-\rho)\rho^n H^{*n}(x) \quad , \quad x \ge ۰$$

که در آن $۰ \prec \rho \prec ۱$ یک مقدار ثابت، H تابع توزیع یک متغیر تصادفی نامنفی و

$$H^{*}(x)=\begin{cases} ۱ & x\geq ۰ \\ ۰ & \text{.در غیر این صورت} \end{cases}$$

۲.۱ مفاهیم بیمه‌ای

نظریهٔ مخاطره و نظریه‌های مرتبط با آن، بخصوص ورشکستگی، نقش مهمی را در ریاضیات بیمه بازی می‌کنند. نظریه ورشکستگی در کشورهای اسکاندیناوی توسط لوندبرگ(۱۹۲۶) و کرامر(۱۹۳۰) و در کشور ایتالیا توسط دفینتی(۱۹۳۹) مورد بسط و گسترش قرار گرفت. این توسعه به‌طور دقیق توسط دبوردیه در سال ۱۹۵۲ شرح داده شد. تا کنون کتاب‌ها و مقالات زیادی در این زمینه نوشته و پژوهش‌های بسیاری هم دراین‌باره انجام شده است.

در این قسمت سعی بر این است که مفاهیم بیمه‌ای مورد نیاز در این پایان نامه برای بدست آوردن تابع چگالی زمان ورشکستگی و متعاقباً پیدا کردن احتمال ورشکستگی که در فصل‌های بعد به آن می‌پردازیم به طور خلاصه توضیح داده شود.

تحت پوشش یک نوع بیمه خاص در یک شرکت بیمه، قراردادهایی در قالب یک داشتمان بسته می‌شوند. شرکت بیمه بابت هر کدام، حق‌بیمه‌ای را مطالبه کرده و تضمین می‌نماید که در صورت وقوع خسارت به مورد بیمه شده، هزینه ناشی از آن را جبران‌نماید؛ به هر کدام از این خسارت‌ها، اصطلاحاً ادعای فردی گفته وبا X_i نمایش داده می‌شوند. اندیس i نشان دهنده i امین ادعا در طول دوره مورد مطالعه است.

۱.۲.۱ مدل مخاطرهٔ جمعی

یک داشتمان را گردایه‌ای از ادعاها در نظر می‌گیریم که تعداد آنها تصادفی است.

$$\begin{cases} S=X_۱+\dots+X_N \\ N=۰\Rightarrow S=۰ \end{cases} \qquad X_i:\ \text{ادعای}\ i\text{ام}$$