دانشگاه زنجان
دانشکده علوم- گروه ریاضی

پایان نامه ی کارشناسی ارشد

عنوان:

عملگرهای به طور ضعیف فشرده در فضاهای نرم دار غیر کامل

نگارش:

مریم حبیبی

استاد راهنما:

دکتر حبیب امیری

استاد مشاور:

دکتر هادی خطیب زاده

شهریور ۱۳۹۱

بسم الله الرحمن الرحیم

تقدیم به

پس از سپاس و ثنای بی‌حد بر آستان صفات بی‌همتای احدیت که در کمال رافت و در نهایت عطوفت رخصت اتمام این پایان نامه را به نگارنده عطا فرموده است؛ در کمال مودت و مسرت، این پایان نامه را که حاصل ماه‌ها تلاش و کوشش مستمر این بنده بوده است؛ تقدیم می‌نمایم به پدر و مادر بسیار عزیزم که پیوسته جرعه نوش جام تعیلم و تربیت، فضیلت و انسانیت آن‌ها بوده‌ام و همواره چراغ وجودشان روشنگر راه من در سختی‌ها و مشکلات بوده است.

تقدیر و تشکر

به مصداق «من لم یشکر المخلوق لم یشکر الخالق » بسی شایسته است از استاد راهنمای دانشمند و پرمایه‌ام جناب آقای دکتر حبیب امیری که با نکته‌های دلاویز و گفته‌های بلند، صحیفه‌های سخن را علم پرور نمودند و گلشن سرای علم و دانش را با راهنمایی‌های کار ساز و سازنده بارور ساختند و همواره راهنما و راه گشای بنده در اتمام و اکمال پایان نامه بوده اند؛ تقدیر و تشکر نمایم.

هم‌چنین از استاد مشاور ارجمندم جناب آقای دکتر هادی خطیب زاده که از محضر پر فیض تدریسشان، بهره‌ها برده‌ام و نیز از پدر و مادر عزیز، دلسوز و مهربانم که آرامش روحی و آسایش فکری فراهم نمودند تا با حمایت‌های همه جانبه در محیطی مطلوب، مراتب تحصیلی و نیز پایان نامه درسی را به نحو احسن به اتمام برسانم؛ سپاسگزاری نمایم.

و با تشکر خالصانه خدمت همه کسانی که به نوعی مرا در به انجام رساندن این مهم یاری نموده‌اند.

چکیده

ما ثابت می‌کنیم که عملگرهای به‌طور ضعیف فشرده روی یک فضای نرم‌دار غیر انعکاسی، نمی‌توانند دوسویی باشند. هم‌چنین نشان می‌دهیم که در نتیجه‌ی بالا، دوسویی بودن نمی‌تواند با پوشایی بودن جایگزین شود. سرانجام، به مطالعه‌ی عملگرهای $T - \lambda I$ می‌پردازیم که T یک عملگر پوشای به‌طور ضعیف فشرده و I عملگر همانی است. در طول مطالعه، نتیجه‌ی جدید اسپرنی[1] به‌دست می‌آید که: عملگرهای فشرده روی یک فضای نرم‌دار نامتناهی البعد نمی‌توانند پوشا باشند.

واژگان کلیدی: عملگر به‌طور ضعیف فشرده، فضاهای نرم‌دار غیرکامل، فضای انعکاسی.

[1] Spurny

فهرست مطالب

پیشگفتار

می‌دانیم فضاهای نرم‌دار نامتناهی البعد مانند X و Y موجوداند به‌طوری‌که عملگر فشرده دوسویی از X به Y موجود باشد (به قضیه (۱.۱.۳) رجوع شود). همچنین معلوم است که در این حالت فضای Y نمی‌تواند کامل باشد. زیرا اگر Y کامل باشد در این صورت Y باناخ است (هر فضای نرم‌دار کامل باناخ است) بنا به نتیجه‌ی (۲.۲.۲)، Y باید متناهی البعد باشد که این تناقض است. پس Y نمی‌تواند کامل باشد. از طرف دیگر، فضای X در بالا، می‌تواند به‌طور دلخواه از میان دوگان‌های فضاهای باناخ جدایی پذیر نامتناهی البعد (گزاره (۳.۲.۲) را ببینید) و به خصوص از میان فضاهای جدایی‌پذیر انعکاسی نامتناهی البعد، برگزیده شود. در واقع $X = \ell^{2}$ می‌تواند انتخاب مناسبی باشد. از سوی دیگر، فضای X در بالا، همچنین می‌تواند غیرکامل انتخاب شود (گزاره (۴.۲.۲) را ببینید). این مثال‌هایی از فضاهای نرم‌دار X و Y را به وجود می‌آورد به‌طوری‌که یک عملگر به‌طور ضعیف فشرده‌ی دوسویی از X به Y وجود دارد که X و Y هر دو غیر انعکاسی هستند.

به عنوان اولین نتیجه‌ی اصلی، نشان می‌دهیم که آخرین مورد در حالتی که $X = Y$، اتفاق نمی‌افتد (قضیه (۳.۱.۳)).

به عنوان یک نتیجه، اگر T یک عملگر به‌طور ضعیف فشرده روی فضای نرم‌دار روی $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C} =$) باشد، در این صورت مجموعه‌ی آن $\lambda \in \mathbb{K}$هایی که $T - \lambda$ دوسویی نیست یک زیرمجموعه‌ی فشرده از $\mathbb{K}$ می‌شود (نتیجه (۴.۱.۳)).

ما در شروع بخش (۲.۳) نشان می‌دهیم که شرط دوسویی بودن در قضیه (۳.۱.۳) که در بالا اشاره شد، نمی‌تواند به پوشایی بودن تقلیل پیدا کند. واضح است که ما می‌توانیم فضاهای نرم‌دار غیرکامل (بنابراین غیرانعکاسی) X را پیدا کنیم به‌طوری‌که عملگرهای به‌طور ضعیف فشرده‌ی پوشا از X به X وجود داشته باشند (گزاره‌ی (۱.۲.۳)).

به عنوان دومین نتیجه، ثابت می‌کنیم که اگر T یک عملگر به‌طور ضعیف فشرده‌ی پوشا روی یک

فضای نرم‌دار غیرانعکاسی باشد در این صورت $\delta > 0$ وجود دارد به‌طوری‌که برای λهایی که $0 < |\lambda| < \delta$، $T - \lambda$ پوشاست اما یک به یک نیست (قضیه‌ی (۳.۲.۳)).

از آن جا که اگر عملگر T فشرده باشد این نتیجه نمی‌تواند صحیح باشد، نتیجه جدید در [۳] را به دست می‌آوریم که عملگرهای فشرده روی یک فضای نرم‌دار نامتناهی البعد، نمی‌توانند پوشا باشند (نتیجه (۵.۲.۳)).

سرانجام از روش مقاله [۳] (برهان قضیه‌ی (۱.۱.۲)) برهانی استخراج می‌کنیم و نشان می‌دهیم که اگر X یک فضای نرم‌دار و T یک عملگر به‌طور ضعیف فشرده‌ی پوشا از X به X باشد، در این صورت $X \diagup \ker(T)$، انعکاسی است (قضیه‌ی (۱.۳.۳)). این اثبات جایگزینی از قضیه‌ی (۳.۱.۳) را به ما می‌دهد.

فصل ۱

تعاریف و قضایای مقدماتی

در این فصل تعاریف و مفاهیم اولیه‌ای که در ادامه کار به آن‌ها نیاز خواهیم داشت بیان می‌شوند.
در این فصل بیشتر از مراجع [۲، ۴، ۵، ۷، ۱۱، ۱۲، ۱۳] استفاده شده است.

۱.۱ تعاریف و قضایای مقدماتی

تعریف ۱.۱. اگر X یک فضای برداری روی $\mathbb{K}$ باشد و $A \subseteq X$، در این صورت A یک مجموعه *محدب* است اگر

$$\forall x, y \in A, \quad \forall t \in [۰, ۱] \Rightarrow tx + (۱ - t)y \in A.$$

تعریف ۲.۱. یک مجموعه A در یک فضای برداری X *متعادل* گفته می‌شود هرگاه برای هر $|\alpha| \leq ۱$

$$\alpha A \subset A.$$

تعریف ۳.۱. یک شبه نرم در یک فضای برداری X، تابع حقیقی مقدار p در X هست به‌طوری‌که

(۱) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$،

(۲) $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$.

برای همه x و yها در X و همه اسکالرهای α. ویژگی (۱)، ویژگی زیرجمعی نامیده می‌شود. یک شبه نرم p یک نرم است هرگاه در شرط (۳)، صدق کند.

(۳) اگر $x \neq 0$ آن‌گاه $p(x) \neq 0$.

یک خانواده‌ی $\mathcal{P}$ از شبه نرم‌های X را جدا شونده گویند هرگاه به هر $x \neq 0$ یک $p \in \mathcal{P}$ نظیر شود که $p(x) \neq 0$.

یک مجموعه محدب $A \subset X$ را در نظر بگیرید که *جاذب* است به این معنی که هر $x \in X$ در tA قرار دارد برای برخی $t = t(x) > 0$، (برای مثال: هر همسایگی صفر در یک فضای برداری توپولوژیکی جاذب است. هر مجموعه جاذب به وضوح شامل صفر است.)

تابعک مینکوفسکی[1] μ_A از A توسط

$$\mu_A(x) = \inf \{t > 0 \ : \ t^{-1}x \in A\} \qquad (x \in X)$$

تعریف می‌شود. توجه کنید که $\mu_A(x) < \infty$ برای همه $x \in X$، چون A جاذب است.

قضیه ۱.۱.۱. *فرض کنید p یک شبه نرم روی فضای برداری X باشد در این صورت*

(۱) $p(0) = 0$،

(۲) $|p(x) - p(y)| \leq p(x - y)$،

(۳) $p(x) \geq 0$،

(۴) $\{x : \ p(x) = 0\}$ *زیرفضای X است،*

(۵) *مجموعه $B = \{x : \ p(x) < 1\}$ محدب، متعادل، جاذب است و $p = \mu_B$.*

[1] Minkowski Functional

برهان. رجوع شود به [۵] قضیه‌ی (۱۰۳۴). □

قضیه ۲.۱.۱. *فرض کنید A یک مجموعه‌ی جاذب محدب در فضای برداری X باشد در این صورت*

(۱) $\mu_A(x+y) \leq \mu_A(x) + \mu_A(y)$،

(۲) *اگر* $t \geq ۰$ $\mu_A(tx) = t\mu_A(x)$،

(۳) *اگر A متعادل باشد، μ_A یک شبه نرم است،*

(۴) *اگر* $B = \{x :\ \mu_A(x) < ۱\}$ و $C = \{x :\ \mu_A(x) \leq ۱\}$ *در این صورت*
$B \subset A \subset C$ و $\mu_B = \mu_A = \mu_C$.

برهان. رجوع شود به [۵] قضیه‌ی (۱۰۳۵). □

تعریف ۴.۱ (فضای توپولوژیک). یک توپولوژی روی یک مجموعه X، خانواده‌ی τ از زیرمجموعه‌های X است که دارای خواص زیر باشد:

(۱) $\emptyset,\ X \in \tau$.

(۲) اجتماع هر گردایه‌ای از اعضای τ متعلق به τ باشد.

(۳) اشتراک هر تعداد متناهی از اعضای τ متعلق به τ باشد.

(X, τ) را یک فضای توپولوژیک می‌گویند.

تعریف ۵.۱ (فضای برداری توپولوژیک). فرض کنیم X یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{K}$ باشد. اگر روی X یک توپولوژی قرار دهیم که اعمال جمع برداری $+ : X \times X \to X$ و ضرب در اسکالر $\cdot : \mathbb{K} \times X \to X$ پیوسته باشند آن‌گاه X را یک فضای برداری توپولوژیک می‌نامیم.

قضیه ۳.۱.۱. *فرض کنید $\mathcal{B}$ یک پایه موضعی متعادل محدب در یک فضای برداری توپولوژیکی X باشد. به هر $V \in \mathcal{B}$ تابعک مینکوفسکی‌اش μ_V را نسبت می‌دهیم. در این صورت*

(۱) *برای هر* $V \in \mathcal{B}$، $V = \{x \in X :\ \mu_V(x) < ۱\}$.

(۲) $\{\mu_V :\ V \in \mathcal{B}\}$ *یک خانواده از شبه نرم‌های پیوسته‌ی جدا کننده روی* X *است.*

برهان. رجوع شود به [۵] قضیه‌ی (۱۰۳۶). □

تعریف ۶.۱ (فضای موضعاً محدب). فضای برداری توپولوژیکی E یک *فضای موضعاً محدب* نامیده می‌شود اگر E یک پایه‌ی موضعی متشکل از مجموعه‌های محدب داشته باشد. توپولوژی τ روی E *توپولوژی موضعاً محدب* نامیده می‌شود اگر (E, τ) یک فضای موضعاً محدب باشد.

قضیه ۴.۱.۱. *فرض کنید* $\mathcal{P}$ *یک خانواده از شبه نرم‌های جدا کننده روی یک فضای برداری* X *باشد. به هر* $p \in \mathcal{P}$ *و به هر عدد صحیح مثبت* n *مجموعه*

$$V(p, n) = \{x : p(x) < \frac{۱}{n}\}$$

را نسبت دهید.

فرض کنید $\mathcal{B}$ *گردایه همه اشتراک‌های متناهی مجموعه‌های* $V(p, n)$ *باشد. در این صورت* $\mathcal{B}$ *یک پایه موضعی متعادل محدب برای یک توپولوژی* τ *روی* X *هست که* X *را به یک فضای موضعاً محدب تبدیل می‌کند به‌طوری‌که*

(۱) *هر* $p \in \mathcal{P}$ *پیوسته است،*

(۲) *یک مجموعه* $E \subset X$ *کراندار است اگر و فقط اگر هر* $p \in \mathcal{P}$ *روی* E *کراندار باشد.*

برهان. رجوع شود به [۵] قضیه‌ی (۱۰۳۷). □

تعریف ۷.۱ (فضای هاسدورف). فضای توپولوژیک X را فضای هاسدورف خوانیم در صورتی‌که به ازای هر دو نقطه‌ی متمایز $x_۱$ و $x_۲$ از X، همسایگی‌هایی مانند $U_۱$ و $U_۲$، به‌ترتیب از $x_۱$ و $x_۲$ یافت شوند که از هم جدا باشند.

تعریف ۸.۱. فرض کنید $\{P_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ خانواده ای از شبه نرم‌ها بر فضای X باشند، شرط زیر را شرط هاسدورف می‌گوییم،

$$\bigcap_{\alpha\in\Lambda}\{x\in X : P_\alpha(x)=0\}=\{0\}.$$

اگر خانواده‌ای از شبه نرم‌ها روی فضای برداری X موجود باشد که در شرط هاسدورف صدق کند، آن‌گاه X را به یک فضای برداری توپولوژیک موضعاً محدب هاسدورف تبدیل می‌کند. عکس این مطلب نیز درست است یعنی هر توپولوژی موضعاً محدب روی یک فضای برداری توپولوژیک هاسدورف توسط یک خانواده از شبه نرم‌ها که در شرط هاسدورف صدق می‌کند ایجاد شده است.

تعریف ۹.۱ (توپولوژی ضعیف [۱]). اگر X فضای برداری توپولوژیک باشد و X^* دوگان X باشد، خانواده‌ی $\{P_f\}_{f\in X^*}$ که‌برای هر $f\in X^*$ به‌صورت $P_f(x)=|f(x)|$ تعریف می‌شود خانواده‌ای از شبه نرم‌ها است که در شرط هاسدورف صدق می‌کند. توپولوژی ایجاد شده توسط این خانواده از شبه نرم‌ها بر X را توپولوژی ضعیف می‌نامیم.

توپولوژی ضعیف $\sigma(X,X^*)$ روی X، کوچک‌ترین توپولوژی روی X است که تمام نگاشت‌های $(P_f)_{f\in X^*}$ را پیوسته می‌سازد.

تعریف ۱۰.۱ (توپولوژی ضعیف* [۲]). اگر X فضای نرم‌دار باشد و X^* دوگان X باشد، خانواده‌ی $\{P_x\}_{x\in X}$ روی X^* که به‌صورت $P_x(f)=|f(x)|$ تعریف می‌شود، خانواده‌ای از شبه نرم‌ها است که در شرط هاسدورف صدق می‌کند، توپولوژی ایجاد شده توسط این خانواده از شبه نرم‌ها بر X^* را توپولوژی ضعیف *می‌نامیم.

توپولوژی ضعیف* $\sigma(X^*,X)$ روی X^*، ضعیف‌ترین توپولوژی روی X^* است که تمام نگاشت‌های $(P_x)_{x\in X}$ را پیوسته می‌سازد.

[۱] Weak Topology

[۲] Weak* Topology

تعریف ۱۱.۱. فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک باشد. گوییم دنباله‌ی (x_n) از نقاط X یک *دنباله‌ی کوشی* در (X,d) است هرگاه به ازای هر $\epsilon > 0$، عدد صحیحی مانند $N(\epsilon)$ وجود داشته باشد که

$$\text{اگر } n,m \geqslant N(\epsilon) \quad \text{آن‌گاه} \quad d(x_n,x_m) < \epsilon$$

فضای متریک (X,d) را *کامل* (*تام*) گوییم در صورتی‌که هر دنباله‌ی کوشی در X همگرا باشد.

تعریف ۱۲.۱ (فضای باناخ)**.** یک فضای نرم‌دار است که با متر به دست آمده از نرم خود، یک فضای کامل است.

تعریف ۱۳.۱ (فضای انعکاسی)**.** فرض کنیم E یک فضای باناخ و J تداخل متعارف از E به E^{**} باشد؛ یعنی

$$J : E \to E^{**}$$

$$J(x) = \widehat{x}$$

$$\widehat{x}(f) = f(x)$$

برای هر $x \in E$ و $f \in E^*$. می‌گوییم E انعکاسی است اگر $J(E) = E^{**}$، وقتی E انعکاسی است E را با E^{**} یکی می‌گیریم (با کمک یکریختی J).

تعریف ۱۴.۱. مجموعه E در فضای توپولوژیک X را *هیچ جا چگال* گوییم اگر بستارش $\overline{E}$ شامل زیرمجموعه باز ناتهی‌ای از X نباشد. هر اجتماع شمارش‌پذیر از مجموعه‌های هیچ جا چگال را یک مجموعه از *رسته اول* می‌نامند. سایر زیرمجموعه‌های X، از *رسته دوم* می‌باشند.

تعریف ۱۵.۱. منظور از *فضای برداری متناهی البعد*، فضای برداری X است که پایه‌ای متناهی داشته باشد. تعداد عضوهای هر پایه‌ی X را بعد X می‌نامیم و با $\dim(X)$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۵.۱.۱ (قضیه کره ریس [1])**.** *فرض کنیم X یک فضای برداری نرم‌دار باشد به‌طوری‌که B_X (گوی واحد بسته‌ی X) فشرده باشد در این صورت X دارای بعد متناهی است.*

[1] Riesz Sphere Theorem

برهان. رجوع شود به [۱۲] قضیه‌ی $(VI \cdot ۵)$. □

قضیه ۶.۱.۱ (قضیه گلدشتاین [۱]). *فرض کنیم X یک فضای باناخ باشد. در این صورت $J(B_X)$ در $B_{X^{**}}$ با توپولوژی $\sigma(X^{**}, X^*)$ چگال است.*

برهان. رجوع شود به [۱۲] لم $(III \cdot ۴)$. □

تعریف ۱۶.۱. فرض کنیم $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع مختلط بر مجموعه‌ی E باشد. گوییم $\{f_n\}$ بر Eبه‌طور یکنواخت همگرا به تابع مختلط f است هرگاه

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| = 0,$$

به عبارتی دیگر

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists N(\epsilon) > 0 \ \ \forall x \in E \ \ (\forall n \geqslant N(\epsilon) \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon).$$

هم‌چنین سری $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ را بر E به‌طور یکنواخت همگرا گوییم، هرگاه دنباله‌ی $\{s_n\}$ از مجموع های جزئی که با $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ تعریف می‌شود بر E به‌طور یکنواخت همگرا باشد.

قضیه ۷.۱.۱ (آزمون M-وایراشتراس). *فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع بر E باشد و $\{M_n\}$ دنباله‌ای از اعداد نامنفی باشد که به ازای هر $x \in E$ داشته باشیم $|f_n(x)| \leq M_n$، در این صورت اگر $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ همگرا باشد، آن‌گاه $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ بر E همگرای یکنواخت است.*

قضیه ۸.۱.۱ (قضیه حد یکنواخت). *فرض کنید $f_n : X \to Y$ دنباله‌ای از توابع پیوسته از فضای توپولوژیک X به فضای متریک Y باشد. اگر $\{f_n\}$ همگرای یکنواخت به f باشد آن گاه f پیوسته است.*

برهان. رجوع شود به [۱۳] قضیه‌ی $(۶ \cdot ۱۰)$. □

[۱] Goldstine's Theorem

تعریف ۱.۱۷ (فضای جدایی‌پذیر). می‌گوییم یک فضای متریک E جداپذیر است هرگاه یک زیر مجموعه‌ی شمارای چگال داشته باشد.

قضیه ۱.۱.۹ (باناخ- آلاقلو- بورباکی [۲]). *مجموعه‌ی*

$$B_{E^*} = \{f \in E^*, \ \ \|f\| \leq ۱\},$$

*با توپولوژی ضعیف** $\sigma(E^*,\ E)$ *فشرده است.*

برهان. رجوع شود به [۱۲] قضیه‌ی ($III \cdot$ ۱۵). $\square$

تعریف ۱.۱۸. یک *عملگر*، یک نگاشت بین فضاهای برداری است. مثلاً اگر Y, X دوفضای برداری باشند آن‌گاه $A : X \to Y$ یک عملگر بین فضاهای برداری ذکر شده است و نیز عملگر $A : X \to X$ یک عملگر روی فضای برداری X است.

تعریف ۱.۱۹. فرض کنید Y, X دو فضای برداری روی میدان $\mathbb{K}$ باشند، تابع $T : X \to Y$ را یک تبدیل خطی می‌گوییم هرگاه به ازای هر $x, y \in X$ و هر $c \in \mathbb{K}$ داشته باشیم:

$$T(cx + y) = cT(x) + T(y).$$

هر تبدیل خطی از یک فضای برداری به خودش را یک عملگر خطی می‌گوییم. اگر X و Y فضاهای نرم‌دار باشند عملگر T را *کراندار* خوانیم هرگاه $M > ۰$ موجود باشد به‌طوری‌که به ازای هر $x \in X$ داشته باشیم:

$$\|Tx\| \leq M\|x\|.$$

هم‌چنین دسته‌ی تمام تبدیلات خطی کراندار از X به Y را با $B(X, Y)$ نشان می‌دهیم.

---

[۲] Banach- Alaoglu- Bourbaki

تعریف ۲۰.۱. یک عملگر خطی T، از یک فضای نرم‌دار X به یک فضای نرم‌دار Y، فشرده (به‌طور ضعیف فشرده) نامیده می‌شود اگر $\overline{T(B_X)}$ یک زیر مجموعه فشرده (به‌طور ضعیف فشرده) Y باشد. در این جا به جای گوی واحد بسته X، B_X قرار دارد.

گزاره ۱۰.۱.۱.

(۱) *اگر هر یک از X یا Y انعکاسی باشد، در این صورت هر عملگر در $B(X,Y)$ به‌طور ضعیف فشرده است.*

(۲) *اگر $T: X \to Y$ به‌طور ضعیف فشرده و $A \in B(Y,Z)$ باشد در این صورت AT به‌طور ضعیف فشرده است.*

(۳) *اگر $T: X \to Y$ به‌طور ضعیف فشرده و $B \in B(Z,X)$ باشد در این صورت TB به‌طور ضعیف فشرده است.*

برهان. رجوع شود به [۲] گزاره‌ی (۲ ۰ ۵). □

فرض کنید X یک فضای باناخ باشد و فرض کنید W یک زیر مجموعه‌ی متعادل محدب کراندار از X باشد. برای $n > ۱$ قرار دهید:

$$U_n = ۲^n W + ۲^{-n}\mathrm{int}(B_X).$$

فرض کنید p_n تابعک مینکوفسکی U_n باشد. چون $U_n \supseteq ۲^{-n}\mathrm{int}(B_X)$، واضح است که p_n یک نرم روی X است، در حقیقت p_n و $\|\cdot\|$ معادل‌اند. برای دیدن این مطلب توجه کنید که اگر $\|x\| < ۱$ در این صورت $۲^{-n}x \in U_n$ بنابراین $p_n(x) < ۲^n$، در نتیجه $p_n(x) \leq ۲^n\|x\|$. هم‌چنین، چون W کراندار است، U_n باید کراندار باشد. فرض کنید

$$M > \sup\{\|x\| :\ x \in U_n\},$$

بنابراین اگر $p_n(x) < 1$، $\|x\| < M$. در نتیجه $\|x\| \le Mp_n(x)$، بنابراین $\|\cdot\|$ و p_n دو نرم معادل هستند.

لم ۱.۱.۱۱. *برای یک فضای باناخ X فرض کنید W و U_n و p_n به همان صورتی باشند که در بالا ذکر شد. فرض کنید R مجموعه‌ی همه‌ی $x \in X$ها باشد به‌طوری‌که*

$$|||x||| \equiv \Big[\sum_{n=1}^{\infty} p_n(x)^2\Big]^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

در این صورت

(۱) $W \subseteq \{x : |||x||| < 1\}$،

(۲) *$(R, |||\cdot|||)$ یک فضای باناخ است و نگاشت شمول $A : R \to X$ پیوسته است،*

(۳) *$A^{**} : R^{**} \to X^{**}$ یک به یک است و $(A^{**})^{-1}(X) = R$،*

(۴) *R انعکاسی است اگر و فقط اگر $\overline{W}$ به‌طور ضعیف فشرده باشد.*

برهان. رجوع شود به [۲] لم (۳۰۵). □

تعریف ۱.۲۱. فرض کنید $T : Z \to X$ یک عملگر پیوسته بین دو فضای باناخ باشد. گوییم T از طریق یک فضای باناخ Z_1 تجزیه می‌شود هرگاه عملگرهای پیوسته‌ی $Z \xrightarrow{S} Z_1 \xrightarrow{R} X$ وجود داشته باشند که در $T = RS$ صدق کنند (عملگرهای R و S عامل‌های T نامیده می‌شوند).

قضیه ۱.۱.۱۲. *اگر X و Y فضاهای باناخ و $T \in B(X, Y)$ باشد، در این صورت T به‌طور ضعیف فشرده است اگر و فقط اگر یک فضای انعکاسی R و عملگرهای $A \in B(R, Y)$ و $B \in B(X, R)$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که $T = AB$.*

برهان. اگر $T = AB$ باشد که A و B همان شکل توصیف شده در قضیه را داشته باشند در این صورت طبق گزاره‌ی (۱.۱.۱۰)، T به‌طور ضعیف فشرده است.

حال فرض کنید که T به‌طور ضعیف فشرده باشد و قرار دهید $W = T(B_X)$. همچنین R را نیز به همان صورتی که در لم (۱۱.۱.۱) تعریف شد در نظر بگیرید. طبق بند (۴) لم (۱۱.۱.۱)، R انعکاسی است. فرض کنید $A : R \to Y$ نگاشت شمول باشد. توجه کنید که اگر $x \in B_X$ در این صورت $Tx \in W$. طبق بند (۱) لم (۱۱.۱.۱)، $|||Tx||| < ۱$ وقتی $\|x\| < ۱$.

بنابراین $B : X \to R$ تعریف شده توسط $Bx = Tx$ یک عملگر کراندار است و به‌وضوح $AB = T$. □

قضیه ۱۳.۱.۱. *اگر X و Y فضاهای باناخ باشند و $T \in B(X, Y)$، احکام زیر معادل‌اند:*

(۱) *T به طور ضعیف فشرده است،*

(۲) $T^{**}(X^{**}) \subseteq Y$،

(۳) *T^* به‌طور ضعیف فشرده است.*

برهان. (۲ ⇐ ۱) فرض کنیم R یک فضای انعکاسی باشد، $A \in B(R, Y)$ و $B \in B(X, R)$ به‌طوری‌که $T = AB$. بنابراین $T^{**} = A^{**}B^{**}$. اما $A^{**} : R \to Y^{**}$ است چون $R^{**} = R$. بنابراین $A^{**} = A$. پس $T^{**} = AB^{**}$ و بنابراین $\text{ran}T^{**} \subseteq \text{ran}A \subseteq Y$.

(۱ ⇐ ۲) $T^{**}(B_{X^{**}})$ طبق قضیه باناخ-آلااقلو (۹.۱.۱) و پیوستگی ضعیف* عملگر T^{**}، $\sigma(Y^{**}, Y^*)$ فشرده است و طبق (۲)، $C = T^{**}(B_{X^{**}})$ در Y، $\sigma(Y, Y^*)$ فشرده است. بنابراین $C \subseteq T(B_X)$ است و باید بستار به‌طور ضعیف فشرده داشته باشد.

(۱ ⇐ ۳) فرض کنید Z یک فضای انعکاسی و $C \in B(Y^*, Z)$ و $D \in B(Z, X^*)$ به‌طوری‌که $T^* = DC$. بنابراین $T^{**} = C^*D^*$، $D^* : X^{**} \to Z^*$ و $C^* : Z^* \to Y^{**}$.

قرار دهید: $R = \text{cl}D^*(X)$ و $B = D^*\big|X$، در این صورت $B : X \to R$ و R انعکاسی است.

فرض کنید $A = C^*\big|R$، بنابراین $A : R \to Y^{**}$ است.

اما اگر $x \in X$،

$$ABx = C^*D^*x = T^{**}x = Tx \in Y,$$