بسم‌الله الرحمن الرحیم

١٣٨١ /١/ ٣٠

دانشگاه آزاد اسلامی
واحد کرمان

017049

پایان‌نامه:

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

رشته: ریاضی

گرایش: محض

موضوع:

بررسی حلقه درون‌ریختیهای یک مدول ضربی

استاد راهنما:

دکتر رضا نکویی

۴۰-۹۱

نگارش:

باقر بارانی‌نیا

شهریور ۱۳۸۰

موضوع:

بررسی حلقه درون‌ریختیهای یک مدول ضربی

توسط:

باقر بارانی‌نیا

پایان‌نامه:

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

رشته و گرایش: ریاضی محض

از این پایان‌نامه در تاریخ ۸۰/۶/۲۹ در مقابل هیئت داوران دفاع به عمل آمده و مورد تصویب قرار گرفت.

اعضاء هیئت داوران:

استاد راهنما: دکتر رضا نکویی

داور ۱: دکتر محمدحسن دوگانی

داور ۲: دکتر عباس حسنخانی

مدیر گروه آموزش کارشناسی ارشد:
دکتر عباس حسنخانی

سرپرست کمیته تحصیلات‌تکمیلی:
دکتر محسن زاینده‌رودی

تشکر و قدردانی

خداوند منان را سپاسگذارم که به من سعادت کوشش در راه کسب علم و دانش را عطا فرمود و به لطف و عنایت او توانستم قطره‌ای از اقیانوس بیکران علم و دانش را بچشم.

در ابتدا برخود لازم می‌دانم از پدر و مادر مهربانم که در تمام مراحل زندگیم از هیچگونه تلاشی در راه تحصیل اینجانب دریغ نکرده و همواره مشوق من در ادامه تحصیل و چراغ هدایتی برایم بوده‌اند صمیمانه تشکر کنم.

از استاد ارجمندم جناب آقای دکتر رضا نکویی که قبول زحمت نموده و راهنمایی این رساله را بعهده گرفته و با کمال صبر و متانت و گشاده‌رویی پاسخگوی مشکلات اینجانب بوده‌اند کمال تشکر و قدردانی را دارم.

همچنین از اساتید گرامی آقایان دکتر محمدحسن دوگانی و دکتر عباس حسنخانی که زحمت مطالعه و داوری این رساله را بعهده داشته‌اند و از راهنمائیهای ایشان استفاده نموده‌ام سپاسگزاری می‌کنم.

از خانم باقری که زحمت تایپ این پایان‌نامه را به عهده گرفتند تشکر می‌کنم.

باقر بارانی‌نیا

شهریورماه ۱۳۸۰

تقدیم به :

همسر مهربانم بتول

فرزند دلبندم بنیامین

چکیده

در این پایان‌نامه، ابتدا مجموعه مولدهای حلقه درون‌ریختیهای بعضی از Rـمدولها را بدست می‌آوریم. در ادامه به بررسی ساختار حلقه درون‌ریختیهای بعضی از Rـمدولها می‌پردازیم. در پایان ضمن بیان پاره‌ای از خواص رادیکال جیکوبسون حلقه درونریختیهای بعضی از Rـمدولهای مانند M (که با $E(M)$ نمایش می‌دهیم) و مدولهای ضربی هموار را نیز مطالعه خواهیم کرد.

فهرست مطالب

مقدمه

این پایان‌نامه حاصل مطالعه مقالات [۱۶] و [۱۷] است که در فهرست مراجع آمده است و در دو فصل به شرح زیر تنظیم شده است.

در فصل اول، مجموعه مولدهای مدولهای $Hom(P,P)$ و $Hom(A,A)$ را بدست می‌آوریم که P یک R_مدول تصویری، A یک R_مدول ضربی و با تولید متناهی هستند. در ادامه خواص مدولهای تصویری و ضربی را بررسی می‌کنیم. همچنین ثابت می‌کنیم یک R_مدول با تولید متناهی A، ضربی است و پوچساز آن با یک عضو خودتوان تولید می‌شود اگر و فقط اگر A تصویری و $End(A)$ جابجایی باشد.

در فصل دوم، ابتدا مدولهای موضعاً دوری را تعریف کرده و در ادامه به رابطه بین مدولهای ضربی و موضعاً دوری می‌پردازیم. همچنین ضمن معرفی مدولهای ضربی هموار و زیرمدولهای کوچک، ثابت می‌کنیم $J(E(M)) = T(M)$ و اگر M یک R_مدول ضربی باوفا و هموار باشد، آنگاه $J(E(M)) = \circ$ اگر و فقط اگر $J(R) = \circ$. در پایان با بیان تعاریف درون ریختیهای قطری و اسکالر، همراه با یک مثال نشان می‌دهیم که هر درون‌ریختی قطری الزاماً اسکالر نیست.

لازم به ذکر است که در این پایان‌نامه تمامی حلقه‌ها جابجایی و یکدار و تمامی مدولها یکانی می‌باشند.

فصل ۱

مجموعه مولدهای حلقه درون ریختیهای پاره‌ای از R_مدولها

۱.۱ مدولهای ضربی

فرض کنید A یک Rـمدول باشد. قرار می‌دهیم

$$End(A) = \{f : A \longrightarrow A \mid \text{یک همریختی } R\text{ ـمدولی است } f\}$$

بوضوح $End(A)$ همراه با عمل جمع و ترکیب توابع، یک حلقه است.

لم ۱.۱.۱. فرض می‌کنیم A یک Rـمدول آزاد باشد بطوریکه $rank\ A = n > 1$. اگر $M_{n\times n}(R)$ حلقه ماتریسهای $n \times n$ روی حلقه R باشد، آنگاه $End(A) \simeq M_{n\times n}(R)$. لذا حلقه $End(A)$ در حالت کلی جابجایی نمی‌باشد.

برهان: فرض کنید A دارای پایه‌ای مانند $B = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ باشد. حال اگر $f \in End(A)$، آنگاه

$$f(a_i) = \sum_{j=1}^{n} \beta_{ji} a_j \qquad \left(\begin{array}{c} \beta_{ji} \in R \\ 1 \leq i \leq n \end{array}\right)$$

همریختی Rـمدولی ϕ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{array}{rcl} \phi : End(A) & \longrightarrow & M_{n\times n}(R) \\ f & \longmapsto & \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \ldots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \ldots & \beta_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \ldots & \beta_{nn} \end{pmatrix} \end{array}$$

ابتدا نشان می‌دهیم ϕ خوشتعریف است. فرض کنید $f,g \in End(A)$. اگر

$$f = g \Rightarrow f(a_i) = g(a_i), \quad (1 \le i \le n)$$
$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} \beta_{ji} a_j = \sum_{j=1}^{n} \beta'_{ji} a_j, \quad (1 \le i \le n)$$

بنابراین

$$\beta_{ji} = \beta'_{ji} \quad (1 \le i, j \le n)$$

در نتیجه

$$\phi(f) = \phi(g)$$

بوضوح ϕ یک به یک است. حال ثابت می‌کنیم ϕ پوشا است. فرض کنید

$$T = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

عضوی دلخواه در $M_{n \times n}(R)$ باشد. همریختی Rـمدولی f را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$f : A \longrightarrow A$$
$$f(a_i) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji} a_j, \quad (1 \le i \le n)$$

بوضوح $\phi(f) = T$ و لذا ϕ پوشا است. بنابراین $End(A) \simeq M_{n \times n}$ و اثبات تمام است.■

لم (پایه دوگان) ۲.۱.۱. J یک Rـمدول تصویری است اگر و فقط اگر مجموعه $\{(y_i, g_i) | i \in I\}$ موجود باشد به طوری که $y_i \in J$ و $g_i : J \longrightarrow R$ همریختی‌های Rـمدولی باشند

به قسمی که برای هر $y \in J$، $g_i(y) \neq 0$ برای تعداد متناهی $i \in I$ و

$$y = \sum_{i\in I}(g_i(y))y_i \cdot$$

برهان: ([۲]، لم ۲_۱۰).■

لم ۳.۱.۱. فرض کنید P یک R_مدول تصویری و با تولید متناهی که توسط مولفه‌های بردار $U = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ تولید شده باشد. آنگاه یک ماتریس خودتوان $n \times n$ مانند $M = [r_{ij}]$، با مولفه‌های در R وجود دارد، بطوریکه

۱) $U = UM$

۲) $U^\perp = Ann(M)$

که در آن

$$U^\perp = \{X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n | \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0\}$$

$$Ann(M) = \{X \in R^n | MX^t = 0\}$$

و X^t، ترانهاده X می‌باشد.

برهان: (مرجع [۷]).■

فرض کنید P همان باشد که در لم ۳.۱.۱ آمده است و برای هر j، $1 \leq j \leq n$، تعریف می‌کنیم:

$$L^j : P \longrightarrow R$$

$$a = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \longrightarrow \sum_{i=1}^{n} r_{ji} x_i, \qquad (x_i \in R, i = 1, 2, \dots, n) \cdot$$

که در آن $L^j(a_i) = r_{ji}$.

ابتدا نشان می‌دهیم L^j خوشتعریف است. فرض کنید $\sum_{i=1}^{n} a_i x'_i = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$. بنابراین داریم:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x_i - x'_i) = 0$$

لذا طبق لم ۳.۱.۱،

$$(x_1 - x'_1), (x_2 - x'_2), (x_3 - x'_3), \ldots, (x_n - x'_n) \in U^{\perp}$$

چون $Ann(M) = U^{\perp}$ می‌باشد، پس

$$(x_1 - x'_1), (x_2 - x'_2), (x_3 - x'_3), \ldots, (x_n - x'_n) \in Ann(M)$$

اما $M = [r_{ij}]$ و $Ann(M) = \{X \in R^n | MX^t = 0\}$، پس

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{n} r_{ji}(x_i - x'_i) = 0 \\ \Rightarrow \quad & \sum_{i=1}^{n} r_{ji} x_i = \sum_{i=1}^{n} r_{ji} x'_i \\ \Rightarrow \quad & L^j(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i) = L^j(\sum_{i=1}^{n} a_i x'_i) \end{aligned}$$

پس L^j خوشتعریف است.

در ادامه نشان می‌دهیم که $\{L^j | 1 \leq j \leq n\}$ مجموعه مولدی برای مدول $P^* = Hom(P, R)$ می‌باشد.

بدین منظور فرض کنید $g \in P^*$، بنا به لم ۳.۱.۱، داریم:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \ldots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \ldots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \ldots & r_{nn} \end{bmatrix}$$

لذا برای هر i، $(1 \leq i \leq n)$، $a_i \in P$،

$$a_i = a_1 r_{1i} + a_2 r_{2i} + \ldots + a_n r_{ni}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} g(a_i) &= g(a_1 r_{1i} + a_2 r_{2i} + \ldots + a_n r_{ni}) \\ &= r_{1i} g(a_1) + r_{2i} g(a_2) + \ldots + r_{ni} g(a_n) \end{aligned}$$

حال فرض کنید $a \in P$ دلخواه باشد. لذا $s_1, s_2, \ldots, s_n$ متعلق به R وجود دارند بطوریکه

$$a = s_1 a_1 + s_2 a_2 + \ldots + s_n a_n$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} g(a) &= g(s_1 a_1 + s_2 a_2 + \ldots + s_n a_n) \\ &= s_1 g(a_1) + s_2 g(a_2) + \ldots + s_n g(a_n) \\ &= s_1 [r_{11} g(a_1) + r_{21} g(a_2) + \ldots + r_{n1} g(a_n)] \end{aligned}$$

$$+s_2[r_{12}g(a_1) + r_{22}g(a_2) + \ldots + r_{n2}g(a_n)]$$

$$+ \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$+s_n[r_{1n}g(a_1) + r_{2n}g(a_2) + \ldots + r_{nn}g(a_n)]$$

قرار می‌دهیم $L^j(a_i) = r_{ji}$، لذا داریم:

$$\begin{aligned}
g(a) &= g(a_1)(s_1L^1(a_1)) + g(a_2)(s_1L^2(a_1)) + \ldots + g(a_n)(s_1L^n(a_1)) \\
&\quad +g(a_1)(s_2L^1(a_2)) + g(a_2)(s_2L^2(a_2)) + \ldots + g(a_n)(s_2L^n(a_2)) \\
&\quad + \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
&\quad +g(a_1)(s_nL^1(a_n)) + g(a_2)(s_nL^2(a_n)) + \ldots + g(a_n)(s_nL^n(a_n)) \\
&= g(a_1)[s_1L^1(a_1) + s_2L^1(a_2) + \ldots + s_nL^1(a_n)] \\
&\quad +g(a_2)[s_1L^2(a_1) + s_2L^2(a_2) + \ldots + s_nL^2(a_n)] \\
&\quad + \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
&\quad +g(a_n)[s_1L^n(a_1) + s_2L^n(a_2) + \ldots + s_nL^n(a_n)]
\end{aligned}$$

قرار می‌دهیم

$$L^j(a) = s_1L^j(a_1) + s_2L^j(a_2) + \ldots + s_nL^j(a_n)$$

بنابراین

$$g(a) = g(a_1)L^1(a) + g(a_2)L^2(a) + \ldots + g(a_n)L^n(a)$$