وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه تربیت معلم آذربایجان
دانشکده علوم پایه

پایان نامه
جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد
رشته ریاضی محض-گرایش هندسه

روش های محاسبه ناورداهای توپولوژیکی سیستمهای هامیلتونی انتگرال پذیر همراه با مثال

استاد راهنما
دکتر قربانعلی حقیقت دوست

استاد مشاور
دکتر اسمعیل عابدی

پژوهشگر
مجید مرادی

اسفند ماه ۱۳۹۰
تبریز - ایران

بسم الله الرحمن الرحیم

خدایا...

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مُردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آنچنان که تو دوست می‌داری.
تو می‌دانی و همه می‌دانند که شکنجه دیدن بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگی من است، از شادی توست که من در دل می‌خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته‌ام می‌درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه‌هایم احساس می‌کنم. نمی‌توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله‌های ضعیف و افتاده، پنهان کرده‌ام دریاب، دریاب.
تو می‌دانی و همه می‌دانند که زندگی از تحمیل لبخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از برانگیختن موج شعفی در دل من، عاجز است.
تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت.
به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی‌همراه، جهاد بی‌سلاح، کار بی‌پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی‌دنیا، مذهب بی‌عوام، عظمت بی‌نام، خدمت بی‌نان، ایمان بی‌ریا، خوبی بی‌نمود، گستاخی بی‌خامی، قناعت بی‌غرور، عشق بی‌هوس، تنهایی در انبوه جمعیت، و دوست داشتن بی‌آنکه دوست بداند، روزی کن.

اگر تنهاترین تنها شوم، باز خدا هست

او جانشین همه نداشتن‌هاست...

سپاس‌گزاری...

سپاس خداوندی را که به من آموخت در لحظه‌های شادی شکرگزار باشم و فراموش نکنم، تمام داشته‌ها و دانسته‌هایم از لطف بی‌منت اوست و آموخت که در لحظه‌های اندوهم صبور باشم که همه‌ی غم‌ها رفتنی است و سربلند کسی است که مطیع تقدیر و حکمت الهی باشد.

اینک به پاس لطف الهی که پایان‌نامه‌ی حاضر، آماده شده است برخود واجب می‌دانم از حمایت‌های بی‌دریغ، بذل توجه و مساعدت‌های استاد راهنمایم جناب آقای دکتر قربانعلی حقیقت دوست سپاس‌گزاری نمایم.

از جناب آقای دکتراسمعیل عابدی، که مشاوره و مطالعه این پایان‌نامه را به عهده گرفتند، کمال تشکر را دارم. و از آقای دکتر محمد جهانشاهی نیز سپاسگزارم که قبول زحمت فرموده و داوری این تحقیق را برعهده گرفتند.

و بوسه می‌زنم بر دستان مادر و پدر عزیزم که توانستم زیر سایه مهربانی و صبوری‌هایشان در راه کسب علم و دانش قدم بردارم. هم‌چنین تشکر می‌کنم از برادران و خواهران عزیزم، به پاس کمک‌های بی‌دریغ و دلگرمی‌های بی‌پایان‌شان، که بهترین پشتیبان من بودند.

مجیدمرادی

اسفندماه ۱۳۹۰

فهرست مطالب

چکیده

ابتدا سیستم های هامیلتونی انتگرال پذیر لیوویلی که دارای نقش مهمی در فیزیک ومکانیک هستند راتعریف می کنیم .خیلی وقتها در فیزیک و مکانیک مساله زیر نمایان می شود:فرض کنیم که دو سیستم هامیلتونی انتگرال پذیر را داریم ،می خواهیم مشخص کنیم که آیا از نظر توپولوژیکی با یکدیگر هم ارز هستند یا خیر.یعنی،آیا بین برگ بندی لیوویلی سیستم اول به برگ بندی لیوویلی سیستم دوم نگاشت هومئومورفیسمی وجود داردیا خیر.در بسیاری از حالات تنها راه مجازی برای حل این مساله محاسبه ناورداهای فومنکو-زیشانگ است.درادامه روشهای محاسبه این ناورداهارا همراه با چند مثال شرح می دهیم.

واژگان کلیدی: ناورداهای توپولوژیکی، سیستمهای هامیلتونی، دیاگرام انشعاب، نگاشت ممانی.

پیشگفتار

در دهه ۸۰ میلادی قرن گذشته ریاضی دان روسی، آناتولی فومنکو طی یک سری مباحث ومقالات برای هر سیستم هامیلتونی انتگرال پذیر،یک گراف خاص W را که مولکول نامیده می شود نسبت داد.درادامه فومنکو به همراه ریاضی دان آلمانی زیشانگ [۱] روی مولکول، مارک ها را تعریف کردند ومولکول W^* که مولکول مارک دار نامیده می شود، را تعریف کردند که به واسطه این ناوردا می توان بطور کامل ساختار برگ بندی لیوویلی توسط چنبره های لیوویلی ورده بندی رویه های هم انرژی را توصیف کرد.پس بدین وسیله نظریه رده بندی سیستم های هامیلتونی با دو درجه آزادی تثبیت شد.بعدا شاگردان فومنکو از جمله الکسی بولسینوف [۲]، اوشمکوف[۳] ،آیدین [۴]و بسیاری دیگر روش ایشان را برای سیستم های خاص که در فیزیک،مکانیک و هندسه کار برد دارند را به کار بردند.یعنی تحلیل سیستم های دینامیکی خاص که ابزاری قدرتمند برای مطالعه خواص کیفی سیستم های انتگرال پذیر،مثل برگ بندی لیوویلی ،انشعاب چنبره و.... می باشد.در این رساله با تکینگی ،تبهگونی ،دیاگرام انشعاب و مولکول های حلقوی آشنا شده،سپس روش هایی که برای محاسبه مارک ها روی مولکول ،تاکنون پیدا شده ،را شرح می دهیم در خاتمه نقاط تکین برای دومین نوع هامیلتونین و انتگرال حالت سوکولوف روی جبر لی $so(۴)$ را بررسی خواهیم کرد.

---
[۱] H. zischang
[۲] A.V. Bolsinov
[۳] A.A. Oshemkov
[۴] M. Audin

فصل ۱

مقدمات و تعریف ها

مقدمه

در ابتدای این فصل با فضاهای سیمپلکتیک ومنیفلد های سیمپلکتیک آشنا می‌شویم و در ادامه قضیه مهم لیوویل را بیان می‌نماییم. در ادامه مفاهیم سیستم های تشدید شدنی و عدد دوران ، نگاشت مومنتوم، دیاگرام انشعاب و نقاط بحرانی نگاشت مومنتوم ، را تعریف می کنیم.
در بخش پایانی از این فصل هم ارزی لیوویلی اکید را مورد بحث و بررسی قرار می دهیم و با ساختن مولکول سیستم انتگرالپذیر با استفاده از سه اتم ها و بیان قضیه ای در این باره این فصل به پایان می رسد.
عمده مطالب این فصل از فصل های ۱ ,۲ ,۳ مرجع [۱] انتخاب شده است.

۱.۱ منیفلدهای سیمپلکتیک، سیستم هامیلتونی انتگرالپذیر

تعریف ۱.۱. فرض کنیدM یک منیفلدC^{∞} باشد. در این‌صورت یک دو-فرم روی M نگاشتی دوخطی مانند $\phi : T_pM \times T_pM \to R$ می باشد که $p\in M$، T_pM فضای مماس بر M درنقطه ی p وR اعدادحقیقی است.

تعریف ۲.۱. یک فضای سیمپلکتیک به صورت یک فضای برداری V (حقیقی یا مختلط)همراه با یک دو-فرم ناتبهگون پادمتقارن$\Omega(a,b)=\sum \omega_{ij}a_ib_j, a=(a_i), b=(b_j), a,b\in V$ تعریف می شود. این فرم ساختار سیمپلکتیک روی V نامیده می شود.
اگر $e_1,...,e_m$یک پایه برای V باشد آنگاه Ω به طور منحصربه فردی توسط ماتریس $\Omega=(\omega_{ij})$ تعریف می شود که در آن $\omega_{ij}=\omega(e_i,e_j)$ و با توجه به رابطه

$$\det\Omega = det\Omega^T = det(-\Omega) = (-1)^m det\Omega,$$

که $m=dimV$ نتیجه می گیریم بعد هر فضای سیمپلکتیک زوج است.

قضیه ۳.۱. ***قضیه داربو*** *فرض کنید ω یک ساختار سیمپلکتیک روی M^{2n} باشد. در اینصورت برای هر $x_0\in M$ ، همسایگی با مختصات های q_n ،...،q_1 ، p_n ،.. .. ، p_1 از x_0 موجود است که ω را می توان به فرم کانونی نوشت:*

$$\omega=\sum_{i=1}^{n} dp_i\wedge dq_i \quad .$$

در اینصورت می بینیم که:

$$\Omega=(\omega_{ij})=\begin{bmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{bmatrix} \quad .$$

که در آن $E=E_n$ ماتریس همانی$n\times n$ است و$p_1,...,p_n,q_1,...,q_n$ نیز مختصات سیمپلکتیک یا کانونی نامیده می شوند.

نکته ۴.۱. *شرط کانونی بودن برای ساختار سیمپلکتیک بودن $\omega=\sum_{i=1}^{n} dp_i\wedge dq_i$ را می توان برحسب کروشه پواسن به صورت هم ارز به شکل زیر بازنویسی کرد:*

$$\{p_i,p_j\}=0 \quad ,\{p_i,q_j\}=\delta_{ij} \quad ,\{q_i,q_j\}=0 \quad ,1\leq i,j\leq n \quad .$$

تعریف ۵.۱. ساختارسیمپلکتیک روی منیفلد هموارM یک ۲-فرم دیفرانسیل پذیر ω است که در شرایط زیر صدق می کند:

الف)ω بسته است،یعنی $d\omega = 0$

ب)ω درهرنقطه از منیفلدناتبهگون است،یعنی در همسایگی موضعی $d\omega(x) \neq 0$

نکته ۶.۱. *فرض کنید H یک تابع هموار روی منیفلد سیمپلکتیک M باشد.بردار گرادیان $sgradH$ را برای این تابع به صورت زیر تعریف می‌کنیم:*

$$\omega(v, sgradH) = v(H)$$

که vیک بردار مماس دلخواه است.

تعریف ۷.۱. میدان برداری $sgradH$ ،میدان برداری هامیلتونین نامیده می‌شود.تابع H را هامیلتونین میدان برداری $sgradH$ می‌نامیم.

تعریف ۸.۱. فرض کنیدf و g دوتابع هموار روی منیفلد سیمپلکتیک M باشند.در اینصورت براکت پواسن f وgبه صورت زیر تعریف می شود:

$$\{f, g\} := \omega(sgraf, sgradg) = (sgradf)(g).$$

عملگر$\{.,.\} : C^\infty \times C^\infty \to C^\infty$ روی فضای توابع همواررویM را براکت پوآسن می‌نامیم.

براکت پواسن در روابط زیر صدق میکند:

(الف) $\{,\}$ دوخطی است.

(ب) $\{,\}$ پادمتقارن است، یعنی $\{f, g\} = -\{g, f\}$. بنابراین خواهیم داشت: $\{f, f\} = 0$.

(ج) اتحاد ژاکوبی $\{f, \{g, h\}\} + \{h, \{f, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} = 0$ برای هر f, g, h برقرار است.

(د) خاصیت لایب نیتس: $\{f, gh\} = \{f, h\}g + \{f, g\}h$.

کروشه پواسن f, g دارای نمایش ساده $\{f, g\} = (sgradf)g$ می باشد. یعنی مشتق g نسبت به میدان $sgradf$.بنابراین رابطه زیر را می توانیم نتیجه بگیریم:

$$\omega(v, sgradg) = v(g) = \sum_i v_i \frac{\partial g}{\partial x_i}.$$

این رابطه ساده در مطالعه انتگرال های میدان های هامیلتونی مفید است.

تعریف ۹.۱. اگر v یک میدان برداری روی منیفلد M باشد، آنگاه $f \in C^{\infty}(M)$ را انتگرال v گوییم هرگاه، $f(\alpha(t)) = c$ که $\alpha(t)$ مسیر انتگرالی میدان برداری v است.

گزاره ۱۰.۱. *فرض کنید $v = sgradH$ یک میدان برداری هامیلتونی روی منیفلد سیمپلکتیک M و f یک تابع هموار که (نسبت به براکت پواسن) با هامیلتونین H جابجا می شود، یعنی $\{H, f\} = ۰$. در این صورت f انتگرال v است.*
اگر f, g دو انتگرال به طور تابعی مستقل از دستگاه $v = sgradH$ باشند، آنگاه دو لایه بندی متفاوت از M به ابررویه های $f = const$, $g = const$ تعریف می کنند. در حالت کلی فصل مشترک دو ابررویه یک زیر منیفلد Q از بعد $۲n - ۲$ می باشد. چون میدان v مماس بر رویه های $Q^{۲n-۲}$ است، می تواند به خانواده رویه های پایا از بعد $۲n - ۲$ تحدید شود. به این ترتیب درجه دستگاه را دو درجه کاهش می دهیم. در حالت کلی اگر r تا انتگرال مستقل بیابیم درجه دستگاه تا r مرتبه کاهش می یابد. و مساله را به یافتن جواب های دستگاه روی رویه های از بعد $۲n - r$ که نسبت به میدان پایا هستند تقلیل می دهیم.

تعریف ۱۱.۱. دستگاه هامیلتونی $v = sgradH$ روی منیفلد سیمپلکتیک M انتگرالپذیر لیوویل نامیده می شود، هر گاه مجموعه ای از توابع هموار $f_۱, ..., f_n$ موجود باشد به طوری که:
(۱) $f_۱, ..., f_n$ انتگرال های v باشند.
(۲) $f_۱, ..., f_n$ روی M به طور تابعی مستقل باشند. یعنی گرادیان های آنها روی M تقریباً همه جا مستقل خطی باشد.
(۳) برای هر i, j داشته باشیم: $\{f_i, f_j\} = ۰$.
(۴) میدان برداری $sgradf_i$ کامل باشد. یعنی پارامتر طبیعی مسیرهای انتگرالی آنها روی همه اعداد حقیقی تعریف شود.

تعریف ۱۲.۱. تجزیه منیفلد $M^{۲n}$ به مولفه های همبندی از رویه های تراز مشترک انتگرال های $f_۱, ..., f_n$، برگ بندی لیوویلی متناظر با دستگاه انتگرالپذیر $v = sgradH$ نامیده می شود.
از آنجایی که $f_۱, ..., f_n$ توسط شار v حفظ می شوند، هر برگ از برگ بندی لیوویلی یک رویه پایاست.

برگ بندی لیوویلی شامل برگ های منظم (که تقریباً همه M را پر می کنند) و برگ های تکین (که مجموعه ای از اندازه صفر از M هستند) می باشد.
قضیه لیوویل که در زیر خواهد آمد ساختار برگ بندی لیوویلی نزدیک برگ های منظم را توصیف می کند.
در این قضیه T_ξ را تراز منظم مشترک توابع $f_1, ..., f_n$ در نظر می گیریم، یعنی

$$T_\xi = \{x \in M | f_i(x) = \xi_i \quad i = 1, .., n\}.$$

قضیه ۱.۱۳. *قضیه لیوویل:* *فرض کنید $v = sgradH$ یک دستگاه هامیلتونی انتگرالپذیر لیوویل روی M^{2n} و T_ξ یک رویه تراز منظم از انتگرال های $f_1, ..., f_n$ باشد.*

(۱) T_ξ یک زیر منیفلد لاگرانژ از M^{2n} است که نسبت به شار $v = sgradH$ و $v = sgradf_i \quad i = 1, ..., n$ پایاست.

(۲) اگر T_ξ همبند وفشرده باشد، آنگاه T_ξ دیفئومورف با چنبره $n-$ بعدی T^n است (این چنبره را چنبره لیوویلی می نامیم).

(۳) برگ بندی لیوویل در همسایگی ای از چنبره لیوویل بدیهی است. یعنی همسایگی U از چنبره T_ξ ضرب چنبره T^n و دیسک D^n است.

(۴) در همسایگی $U = T^n \times D^n$، دستگاه مختصات $s_1, ..., s_n, \varphi_1, ..., \varphi_n$ (که متغیرهای عمل-زاویه نامیده می شوند) موجود است که $s_1, ..., s_n$ متغیرهای روی دیسک و $\varphi_1, ..., \varphi_n$ متغیرهای زاویه ای استاندارد روی چنبره اند، به طوریکه:

(الف) $\omega = \sum d\varphi_i \wedge ds_i$.

(ب) متغیرهای s_i توابعی از انتگرال های $f_1, ..., f_n$ هستند.

(ج) متغیرهای عمل-زاویه $s_1, ..., s_n, \varphi_1, ..., \varphi_n$ هامیلتونین شار v روی هر چنبره لیوویل در همسایگی U است، یعنی $\dot{s} = 0$ و $\dot{\varphi} = q_i(s_1, ..., s_n)$. (این بدین معنی است که شار v حرکت متناوب مشروطی را تعیین می کند که پیچش مستقیم الخط گنگ و گویا را روی هر چنبره به هم تبدیل می کند).

۲.۱ سیستم های تشدید شدنی و تشدید نشدنی

چنبره لیوویلی T از یک سیستم انتگرال پذیر v در نظر می گیریم.طبق قضیه لیوویل ،در متغیر های عمل زاویه میدان برداری v روی T به شکل زیر است:

$$\dot{\varphi}_1 = c_1, \dots, \dot{\varphi}_n = c_n$$

که c_i ها ثابت هایی هستند که فرکانس نامیده می شوند.با تغییر T فرکانس ها نیز تغییر می کند.

تعریف ۱۴.۱. چنبره لیوویلی T را تشدید شدنی می نامند اگر ترکیب خطی از فرکانس ها با ضرائب صحیح برابر صفر شود .یعنی:

$$\Sigma k_i c_i = ۰$$

که در اینجا $k_i \in Z$ و $\Sigma k_i^۲ \neq ۰$.در غیر اینصورت چنبره تشدید نشدنی است.
چنبره لیوویلی تشدید نشدنی است اگر وتنها اگر بستار هر مسیر انتگرالی روی آن با خود چنبره برابر شود.بالعکس ،در حالت تشدید شدنی بعد بستار هر مسیر انتگرالی ازبعد چنبره کمتر است.

تعریف ۱۵.۱. سیستم انتگرال پذیر روی $M^۴$ تشدید نشدنی است اگر همه چنبره های لیوویلی اش تشدید نشدنی باشند.و تشدید شدنی است اگر همه چنبره های لیوویلی اش تشدید شدنی باشند.

۳.۱ عدد دوران

سیستم هامیلتونی انتگرال پذیر $v = sgradH$ با دودرجه آزادی، روی منیفلد سیمپلکتیک Mرا در نظر می گیریم ؛ فرض کنیم که T یک چنبره لیوویلی دلخواه باشد.متغیر های زاویه ای $\varphi_۱$ و $\varphi_۲$ (که در قضیه لیوویل بنا شده اند)را روی این چنبره در نظر می گیریم. آنگاه v به صورت زیر نوشته می شود:

$$\dot{\varphi}_1 = c_1\,, \qquad \dot{\varphi}_2 = c_2\,.$$

تعریف ۱۶.۱. عدد دوران سیستم انتگرال پذیرv روی چنبره لیویلی داده شده T را با عدد گویای ρ به صورت زیر نمایش می دهیم:

$$\rho = \frac{c_۱}{c_۲}$$

مقدار ρ روی چنبره لیوویلی وابسته به متغیر های عمل $s_۱$ و $s_۲$ است .

گزاره ۱۷.۱. *هامیلتونین H رابه عنوان تابعی از $s_۱$ و $s_۲$ در نظر بگیرید،آنگاه:*

$$\rho = \frac{\partial H/\partial s_1}{\partial H/\partial s_2}\,.$$

برهان. به [۱] مراجعه شود.

اگرT تشدید شدنی باشد ،آنگاه همه مسیر های انتگرالی v بسته اند و با یکدیگر مشابه (وحتی روی چنبره با یکدیگر ایزوتوپ هستند).فرض کنیم λ وμ پایه ای برای گروه اساسی چنبره باشند ،یعنی،دو دور مستقل که روی خطوط مختصاتی متغیر های زاویه ای $\varphi_۱$و$\varphi_۲$ با هم متشابه اند.آنگاه مسیر بسته γ از میدان برداری می تواند نسبت به این پایه بصورت زیر تجزیه شود:

$$\gamma = p\lambda + q\mu$$

گزاره ۱۸.۱. *عدد دوران روی یک چنبره تشدید شده برابر است $\frac{p}{q}$. به عبارت دیگر عدد دوران نوع توپولوژیکیγ را نسبت به جهت روی آن تعریف می کند.*

برهان. به [۱] مراجعه شود.

می توان دستگاه مختصات متناوب زیر را بر روی چنبره که خطوط مختصاتی اش با خطوط تراز متغیر های زاویه ای $\varphi_۱$ و $\varphi_۲$ هوموتوپ هستند را در نظر گرفت:

$$(x mod 2\pi, y mod 2\pi)$$

اینجا x و y را به عنوان مختصات روی صفحه ۲-بعدی که شامل T است ،در نظر می گیریم.فرض کنیم که $x(t)$ و$y(t)$ مختصات نقطه ای از مسیر انتگرالی دلخواهی روی v باشد،آنگاه گزاره زیر را داریم:

$$\rho = \lim_{t\to\infty} \frac{x(t)}{y(t)}\,.$$

حال می خواهیم بدانیم که ،وقتی پایه ی دوری λ, μ با دورهای λ' و μ' جابجا می شود، تابع دوران چه تغییری خواهد کرد.برای هر زوج پایه ،یک ماتریس صحیح وجود دارد بطوریکه:

$$\begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda' \\ \mu' \end{bmatrix}$$

گزاره ۱.۱۹. *فرض کنیم که ρ عدد دوران زوج دور λ و μ باشد،وρ' عدد دوران متناظر زوج دور λ' و μ' باشد.آنگاه ρ و ρ' رابطه زیر را باهم دارند:*

$$\rho' = \frac{\rho a_1 + a_3}{\rho a_2 + a_4}.$$

برهان. به [۱] مراجعه شود.

۱.۴ نگاشت مومنتوم سیستم انتگرالپذیر و دیاگرام انشعاب

فرض کنید M^{2n} منیفلدی سیمپلکتیک با یک سیستم هامیلتونی انتگرالپذیر $v = sgradH$ و $f_1, ..., f_n$ انتگرال های به طور تابعی مستقل اش باشند (یعنی، $\{f_i, f_j\} = 0$). نگاشت هموار F را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$F : M^{2n} \longrightarrow R^n \quad \text{که} \qquad F(x) = (f_1, ..., f_n) \quad .$$

تعریف ۱.۲۰. نگاشت F را نگاشت مومنتوم می نامند.

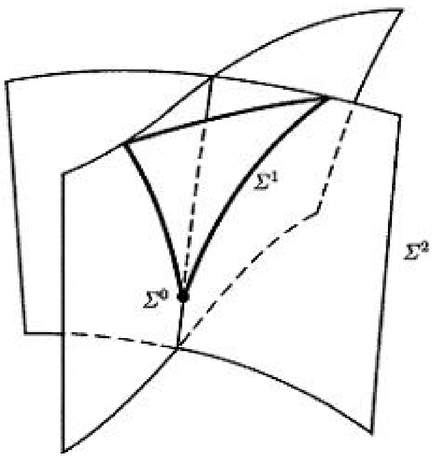
تعریف ۲۱.۱. نقطه x را نقطه بحرانی نگاشت مومنتوم F می نامند اگر $rankdF(x) < n$.
تصویر $F(x)$ در R^n را مقدار بحرانی می نامند.
فرض کنید $K \subset M$ مجموعه تمام نقاط تکینی نگاشت مومنتوم باشد.

تعریف ۲۲.۱. تصویر K تحت نگاشت مومنتوم، یعنی $\Sigma = F(K) \subset R^n$، را دیاگرام انشعاب می گویند.

نکته ۲۳.۱. *بنابراین دیاگرام انشعاب مجموعه مقادیر بحرانی (تکینی) F است. از قضیه سارد*[۱] *مجموعه Σ در R^n از اندازه صفر است. در بیشتر مثال های سیستم های انتگرالپذیر در فیزیک و مکانیک دیاگرام انشعاب Σ یک منیفلد با تکینی ها است. به عبارتی دیگر، شامل چندین تکه Σ^i که هر کدام از آنها رویه های $i-$بعدی هموار در R^n هستند. این را به صورت زیر می نویسیم:*

$$\Sigma = \Sigma^0 + \Sigma^1 + ... + \Sigma^{n-1} \quad .$$

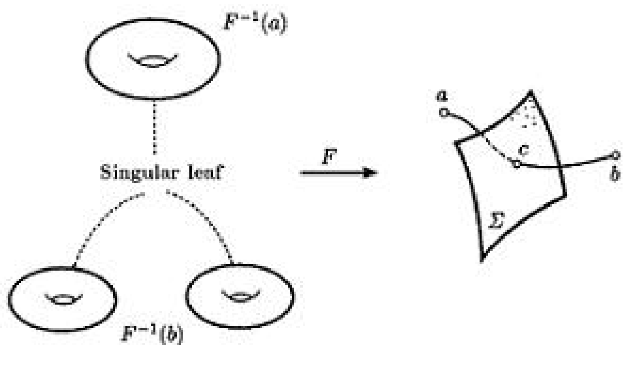
که تکه های متفاوت با همدیگر اشتراک ندارند و اجتماع آنها کل Σ می شود. مرز هر تکه Σ^i مشمول در اجتماع تکه های از بعد اکیداً کمتر است (شکل ۱.۱). توجه کنید برخی از Σ^iها می توانند تهی باشند.



شکل ۱.۱:

[۱] Sard's Theorem

نکته ۱.۲۴. مجموعه $R^n \setminus \Sigma$ شامل چندین مولفه همبندی (حجره ها) [۲] می باشد. نگاشت مومنتوم ودیاگرام انشعاب با برگ بندی لیوویلی روی M^{2n} ارتباط نزدیکی دارند.
اولاً هر برگ برگ بندی لیوویلی یک مولفه همبندی تصویر وارون یک نقطه تحت نگاشت مومنتوم است. در آنچه در ادامه می آید همواره فرض خواهیم کرد که تمام برگ های برگ بندی لیوویلی فشرده هستند.
ثانیاً، Σ تصویر برگ تکینی برگ بندی لیوویلی است.
ثالثاً تصویر وارون هر دو نقطه از یک حجره دیفئومورف با اجتماع مجزای k چنبره لیوویلی است، که k برای هر دوی این نقاط یکسان است.
دیاگرام انشعاب ما را قادر می سازد وقتی که مقادیر انتگرال های اول $f_1, ..., f_n$ تغییر می کنند، انشعاب های چنبره های لیوویلی را بررسی کنیم. برای مثال فرض کنید نقاط a, b با قطعه هموار γ که دیاگرام انشعاب را در نقطه c قطع می کند به هم وصل شده باشند. وقتی که از a به b حرکت می کنیم چنبره های لیوویلی در $F^{-1}(a)$ در M^{2n} به طور هموار حرکت می کنند. وقتی از نقطه c عبور می کنیم تعداد این چنبره ها در $F^{-1}(b)$ تغییر می کند. مثلاً یک چنبره به دو تا تبدیل می شود (شکل ۱.۲ را نگاه کنید).



شکل ۱.۲:

۱.۵ نقاط بحرانی ناتبهگون نگاشت مومنتوم

سیستم هامیلتونی $v = sgradH$ روی منیفلد سیمپلکتیک چهار بعدی M^4 را در نظر می گیریم.

[۲] Chambers